ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XV, 9 SECTIO A 1961

Z Zakładu Matematyki III Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

MARIA BOJARSKA

Sur une propriété des développements à base quelconque

O pewnej własności rozwinięć przy dowolnej zasadzie

Об одном свойстве разложений при произвольном основании

Nous utiliserons partout dans cette note les notations suivantes: les minuscules grecques désigneront des entiers non négatifs, les minuscules latines m, n — des entiers positifs et les lettres p, munies d'indices, des nombres premiers.

Soit

$$(1) \qquad g = \prod_{i=1}^{\varkappa} p_i^{m_i},$$

où p_i sont des nombres premiers distincts et m_i des entiers positifs, et soit

$$(2) \qquad g^* = \prod_{i=1}^{\varkappa} p_i .$$

Désignons par $M(g)$ l'ensemble de tous les entiers positifs k tels que, pour un m, les développements, dans le système de numération à base g, des nombres $1/m$ et $1/(m+k)$ soient finis. L'ensemble complémentaire formé des entiers positifs k ne satisfaisant pas à cette condition, sera désigné par $N(g)$.

Dans la note [2], A. Wakulicz a démontré un théorème qui peut s'exprimer, moyennant le symbole $N(g)$, comme il suit: Tous les entiers positifs de la forme $13\cdot 2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ appartiennent à l'ensemble $N(10)$ et $\min N(10) = 13$. Or, il est bien naturel de poser des problèmes analogues pour d'autres systèmes de numération. Dans la présente note nous nous proposons d'envisager les systèmes de numération dont les bases sont: $g = 2^m \cdot 3^n$, $g = 2^m \cdot 7^n$, ou bien $g = p^m$. Or, la condition nécessaire et suffisante, bien connue, pour que le développement du nombre $1/n$, où n désigne un entier positif, soit fini dans le système de numération à base g, est que l'on ait

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}, \tag{3}$$

a_i étant des entiers non négatifs; cf. [1], p. 216. La condition ne changera point si l'on remplace le nombre g par g^*.

Il s'ensuit que l'on a

$$M(g^*) = M(g) \quad \text{et} \quad N(g^*) = N(g). \tag{4}$$

Donc, il résulte du théorème de A. Wakulicz que $\min N(2^m \cdot 5^n) = 13$. La même condition fournit, pour $m, n = 1, 2 \ldots$, le lemme suivant, bien utile.

Lemme. *Pour qu'un nombre k appartienne à l'ensemble $M(g) = M(g^*)$ il faut et il suffit que l'on ait*

$$k = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i} - \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}, \tag{5}$$

où a_i, β_i sont des entiers non négatifs.

En effet, si $k \in M(g)$, on a, d'après la formule (3), $k = (k+m) - m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i} - \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}$, pour un entier positif m, d'où la formule (5). Pour démontrer la réciproque il suffit de poser $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}$.

Théorème 1. *Tous les nombres de la forme*

$$41 \cdot 2^\mu \cdot 3^\nu, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2 \ldots \tag{6}$$

appartiennent à $N(6) = N(2^m \cdot 3^n)$ et $\min N(6) = 41$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme, $M(6)$ est l'ensemble de tous les entiers positifs de la forme

$$2^\alpha \cdot 3^\beta - 2^\gamma \cdot 3^\delta. \tag{7}$$

Nous allons voir qu'aucun des nombres (6) ne peut s'écrire sous cette forme. Dans ce but nous envisagerons quelques cas particuliers. Supposons d'abord que

$$(8) \qquad 41 = 2^{\alpha} - 3^{\beta}.$$

Evidemment $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, donc $41 + (2+1)^m = 2^n$ et, par conséquent $n \geqslant 6$, d'où $21 + 2^{m-1} + m2^{m-2} + \ldots + \binom{m}{3}4 + \binom{m}{2}2 + m = 2^{n-1}$, ce qui conduirait à la congruence $1 + m2 \equiv 0$ (mod. 4), qui n'a pas de solutions.

Nous allons montrer que l'égalité

$$(9) \qquad 41 = 3^{\beta} - 2^{\gamma}$$

serait aussi fausse. En effet, nous en obtiendrions $\beta \geqslant 4$, $\gamma \geqslant 6$ et $32(2^{\gamma-5}+1) = 9(3^{\beta-2}-1)$. Donc nous aurions $16(2^{\gamma-5}+1) = 9(1+3+\ldots \ldots + 3^{\beta-3}) = 9[A + (1+3+3^2+3^3)B] = 9(A+40B)$, où A désigne un des nombres $0, 1, 1+3, 1+3+3^2$ et B un entier positif. Or, le dernier membre de ces égalités étant divisible par 8, on devrait avoir $A = 0$ et, par conséquent, $2^p+1 \equiv 0$ (mod. 45), où $p = \gamma - 5 = 6r + \lambda$, $\lambda = 0, 1, \ldots 5$. Comme $2^{\lambda}+1 \equiv (9\cdot 7+1)^r \cdot 2^{\lambda}+1 = 2^p+1 \equiv 0$ (mod. 9), on aurait $\lambda = 3$ et $(-1)^{3r+1}\cdot 2+1 \equiv (5-1)^{3r+1}.2+1 = 2^p \equiv 0$ (mod. 5), ce qui est impossible.

Il est clair qu'il en est de même de l'équation

$$(10) \qquad 41 = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta} - 1.$$

D'autre part nous constatons sans peine que l'hypothèse $41\cdot 2^{\lambda}\cdot 3^{\mu} = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta} - 2^{\gamma}\cdot 3^{\delta}$ conduit toujours à l'une des égalités (8), (9) ou bien (10) que nous venons d'exclure. Ainsi il reste à montrer que $41 = \min N(6)$, mais pour cela il suffit de vérifier que chacun des nombres $1, 2, \ldots 40$ peut s'écrire sous la forme (6).

Théorème 2. *Tous les nombres de la forme* $11\cdot 2^{\mu}\cdot 7^{\nu}$ *appartiennent à l'ensemble* $N(14) = N(2^m\cdot 7^n)$ *et* $\min N(14) = 11$.

Démonstration. Il est impossible que l'on ait $11 = 2^m - 7^k$. En effet, cela conduirait à l'absurde $11 + (6+1)^k = 12 + 6\mathrm{p} = 2^m$. Il est aussi impossible que l'on ait $11 = 7^k - 2^m$, car il en résulterait $4(2^s+1) \equiv 0(\text{mod. } 7)$, d'où $2^t+1 \equiv 0(\text{mod. } 7)$, les dernières congruences étant fausses. Le raisonnement s'achève comme auparavant.

Théorème 3. *Tout nombre impair appartient à l'ensemble* $N(2\varkappa+1)$, $\varkappa = 0, 1, \ldots,$ *d'où* $\min N(2\varkappa+1) = 1$.

Théorème 4. *Pour que l'on ait* $k \in M(p)$, *où* p *est un nombre premier, il faut et il suffit que* $k = p^{\alpha}(p^{\beta}-1)$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots$ *En outre, on a* $2^{\mu}\cdot 5 \in N(2)$, $2^{\mu}\cdot 9 \in N(2)$, $\min N(2) = 5$ *et* $\min N(p) = 1$ *pour* $p \geqslant 3$.

Les démonstrations sont immédiates grâce au lemme, formule (5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Sierpiński, W., *Teoria liczb*, t. I (en polonais), Warszawa-Wrocław, 1950.

[2] Wakulicz, A., *O pewnym zagadnieniu z arytmetyki* (en polonais), Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach, 1 (1958), p. 3-5.

Streszczenie

Niech małe litery łacińskie oznaczają liczby całkowite dodatnie i niech $N(g)$ oznacza zbiór takich k, że dla każdego n co najmniej jedna z liczb $1/n$ lub $1/(n+k)$ nie ma skończonego rozwinięcia przy zasadzie g. Dowodzimy m. in., że $\min N(2^r\cdot 3^s) = 41$ i $\min N(2^r\cdot 7^s) = 11$. (A. Wakulicz [2] udowodnił, że $\min N(10) = 13$).

Резюме

Пусть строчные латинские буквы обозначают положительные целые числа и пусть $N(g)$ обозначает множество таких k, что для всякого n по меньшей мере одно из чисел $1/n$ или $1/(n+k)$ не имеет конечного разложения при основании g.

Доказано, что $\min N(2^r\cdot 3^s) = 41$ и $\min N(2^r\cdot 7^s) = 11$ (А. Вакулич [2] доказал, что $\min N(10) = 13$).