ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XV, 8 SECTIO A 1961

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr A. Bielecki.

ADAM BIELECKI et TADEUSZ DŁOTKO

Sur certaines équations fonctionnelles.

O pewnych równaniach funkcyjnych.

О некоторых функциональных уравнениях.

1. Introduction.

L'un des auteurs de la présente note, T. Dłotko a remarqué que certains théorèmes [1], [2] concernant l'allure asymptotique et le problème des solutions oscillantes des équations différentielles ordinaires linéaires, d'ordre n, du type

$$x^{(n)} = -A(t)x, \; A(t) \leqslant 0, \tag{I}$$

peuvent être étendus au cas de certains types d'équations différentielles linéaires à argument retardé ou accéléré; par exemple aux équations de la forme

$$x^{(n)}(t) = -A(t)x\big(t-\delta(t)\big),$$

où $\delta(t)$ désigne une fonction donnée d'avance, ou bien de la forme suivante, plus générale (cf. [3]):

$$x^{(n)}(t) = -\int_0^\infty x(t-s)\,dr(t,s).$$

Il en est de même des équations du type non oscillant

$$x^{(n)}(t) = A(t)x, \; A(t) \geqslant 0, \tag{II}$$

qui se prêtent aussi bien aux généralisations de ce genre.

Indépendamment de l'étude plus détaillée de différentes sortes d'équations généralisant les équations différentielles binômes (I) et (II), auxquelles sera consacrée une autre note, nous nous proposons ici de donner un modèle abstrait qui mettra en relief une idée simple, déjà contenue implicitement dans les travaux cités de W. B. Fite [1] et de J. Mikusiński [2], et rendant possibles les vastes généralisations que nous venons de mentionner.

Bien que ce soit la méthode qui soit essentielle dans ce contexte, nous n'éviterons pas d'énoncer dans la suite quelques théorèmes, utiles dans les applications. Nous prétendons aussi donner aux démonstrations une forme concise et claire.

2. Classes de fonctions Φ^n et Ψ^{nk}.

Nous désignerons par Φ^n, $n = 1, 2, \ldots$, l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$, définies et continues dans l'intervalle $\langle a, \infty)$ tout entier et ayant dans cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.

Nous convenons d'écrire $\varphi(t) \geqslant' a$ (ou bien $\leqslant' a$) lorsqu'il existe un nombre $b \geqslant a$ tel que, l'on ait $\varphi(t) \geqslant a$ (resp. $\leqslant a$) mais non pas $\varphi(t) \equiv a$, pour $t \geqslant b$. Nous écrirons toujours $\lim\varphi(t)$ lorsqu'il s'agira de la limite pour $t \to \infty$. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(t) \in \Phi^n$ est de signe déterminé positif, noté $\mathscr{S}[\varphi] = 1$, lorsque $\varphi(t) \geqslant' 0$, et de signe déterminé négatif, $\mathscr{S}[\varphi] = -1$, lorsque $\varphi(t) \leqslant' 0$. Ceci posé, nous désignerons par Ψ^n l'ensemble formé de toutes les fonctions $\varphi \in \Phi^n$ telles que, pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, les fonctions $\varphi^{(i)}(t)$ soient de signes bien déterminés. Ensuite, nous désignerons par Ψ^{nk}, où $0 \leqslant k \leqslant n$, le sous-ensemble de Ψ^n, caractérisé par les conditions suivantes, imposées aux éléments $\varphi(t)$ de l'ensemble Ψ^{nk}:

1° $$\varphi(t) \in \Psi^n;$$

2° $$\mathscr{S}[\varphi^{(i)}]\cdot\mathscr{S}[\varphi] = 1, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots, k;$$

3° $$\mathscr{S}[\varphi^{(j)}]\cdot\mathscr{S}[\varphi] = (-1)^{j-k}, \text{ pour } j = k+1, k+2, \ldots, n-1 \text{ (si } k < n);$$

4° $$\lim\varphi^{(m)}(t) = 0, \text{ pour } m = k+1, k+2, \ldots, n-1 \text{ (si } k < n-1);$$

5° il existe une limite $\lim\varphi^{(k)}(t) =$
$$= g \neq \pm\infty \text{ et } g\cdot\mathscr{S}[\varphi] \geqslant 0 \text{ lorsque } k \leqslant n-1.$$

Dans certains cas il sera commode de mettre en évidence, même dans les notations, un nombre $b \geqslant a$ intervenant implicitement dans ces définitions. Dans ce but, nous convenons d'écrire, au besoin, Ψ_b^n ou Ψ_b^{nk} au lieu des symboles plus simples Ψ^n et Ψ^{nk}.

3. Quelques lemmes.

Nous allons énoncer plusieurs lemmes, dont la plupart seront presque évidents ou bien connus. Néanmoins, comme leur rôle sera important dans les raisonnements qui vont suivre, il nous a semblé nécessaire d'en donner aussi de brèves démonstrations.

Lemme 1. *Si $\varphi(t) \in \Phi^n$ et si la dérivée $\varphi^{(n)}(t)$ est de signe déterminé, alors $\varphi(t) \in \Psi^n$.*

En effet, si par exemple $\varphi^{(n)}(t) \geqslant {}'0$, la dérivée $\varphi^{(n-1)}(t)$ est, pour les valeurs suffisamment grandes de t, non décroissante. Il s'ensuit qu'elle converge vers une limite finie ou bien croît indéfiniment et, par conséquent, elle doit être de signe bien déterminé, positif ou négatif, selon le cas. Mais ce raisonnement peut se répéter jusqu'à ce que toutes les fonctions $\varphi^{(n-2)}, \varphi^{(n-3)}, \ldots, \varphi', \varphi$ soient épuisées.

Lemme 2. *Pour toute fonction $\varphi(t) \in \Psi^n$ il existe un nombre $b \geqslant a$ et un entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, tels que l'on ait $\varphi(t) \in \Psi_b^{nk}$.*

Le lemme étant trivial pour $n = 1$, il suffira de le prouver pour un $n > 1$ arbitrairement fixé, dans l'hypothèse que le lemme est déjà vérifié pour $n-1$.

Supposons d'abord que $\mathscr{S}[\varphi^{(n-1)}] \cdot \mathscr{S}[\varphi^{(n-2)}] = -1$; soit $\varphi^{(n-2)}(t) \geqslant {}'0$ et $\varphi^{(n-1)}(t) \leqslant {}'0$. Cette dernière fonction est monotone, sa dérivée $\varphi^{(n)}(t)$ étant de signe déterminé. Donc il existe une limite $\lim \varphi^{(n-1)}(t) = g \leqslant 0$. Si $g < 0$, on aurait $\varphi^{(n-1)}(t) \leqslant {}'c < 0$ et, pour un nombre b suffisamment grand, $0 < \varphi^{(n-2)}(t) < \varphi^{(n-2)}(b) - cb + ct$, ce qui est évidemment impossible; donc $g = 0$, ce qui entraîne l'inégalité $\varphi^{(n)}(t) \geqslant 0$. Nous voyons ainsi que, dans le cas envisagé, le nombre $k < n-1$ et son existence est déjà assurée par l'hypothèse que le lemme soit juste pour l'indice $n-1$. Il résulte, soit de cette hypothèse, soit du raisonnement achevé tout à l'heure, que toutes les conditions 1°-5° subsistent dans ce cas pour l'indice n. Lorsque $\mathscr{S}[\varphi^{(n-1)}]\mathscr{S}[\varphi^{(n-2)}] = 1$, il suffira de prendre $k = n$ ou $k = n-1$, suivant le signe de la dérivée $\varphi^{(n)}(t)$. Dans le dernier cas la condition 5° se vérifie sans peine, la fonction $\varphi^{(n-1)}(t)$ étant monotone et son module non croissant, eu égard aux signes des fonctions $\varphi^{(n-1)}$ et $\varphi^{(n)}$.

Remarque. Il est bien évident que pour $n \geqslant 2$ toute fonction $\varphi(t) \in \Psi^{nn}$ croît en module indéfiniment, et ses dérivées d'ordre $\leqslant n-2$ jouissent de la même propriété.

Lemme 3.[1]. *Nous supposons que $\varphi(t) \in \Psi_b^{nk}$, $0 \leqslant k < n$, $\varphi^{(n)}(t) \leqslant 0$ pour t, et que $f(s)$ soit une fonction continue et non négative dans l'intervalle $\langle b, \infty)$, telle que l'on ait, pour tout $v \geqslant t \geqslant b$,*

$$\mathscr{S}[\varphi^{(n)}] \cdot \int_t^v \varphi^{(n)}(s)\,ds \geqslant \int_t^v f(s)\,ds. \tag{1}$$

[1] L'idée d'un tel lemme nous a été suggérée par un argument de W. B. Fite [1]; voir aussi [2].

Dans ces hypothèses on a, pour $t \geqslant b$ et $\varkappa = n-1, n-2, \ldots, k+1, k$,

$$(2) \qquad \mathscr{S}[\varphi^{(\varkappa)}]\cdot\varphi^{(\varkappa)}(t) \geqslant \frac{1}{(n-\varkappa-1)!}\int\limits_t^{\infty}(s-t)^{n-\varkappa-1}f(s)\,ds \geqslant 0,$$

l'intégrale au second membre de l'inégalité (2) *étant toujours convergente;* $\mathscr{S}[\varphi^{(\varkappa)}] = (-1)^{n-\varkappa}\cdot\mathscr{S}[\varphi^{(n)}]$.

Or, en vertu des hypothèses du lemme et de la définition même de Ψ_b^{nk}, on a pour $v \geqslant t \geqslant b$ d'abord $\varphi^{(n-1)}(v) \geqslant 0$ et, ensuite,

$$0 \leqslant \varphi^{(n-1)}(v) \leqslant \varphi^{(n-1)}(t) + \int\limits_t^v f(s)\,ds$$

d'où

$$\varphi^{(n-1)}(t) \geqslant \int\limits_t^{\infty} f(s)\,ds$$

et c'est un cas particulier de la formule (2), où $\varkappa = n-1$.

Supposons-la déjà vérifiée pour un certain $\varkappa > k$ et soit, pour fixer les idées, $\mathscr{S}[\varphi^{(\varkappa)}] > 0$. On en tire les inégalités

$$0 \leqslant -\varphi^{(\varkappa-1)}(v) \leqslant -\varphi^{(\varkappa-1)}(t) - \frac{1}{(n-\varkappa-1)!}\int\limits_t^v\Big\{\int\limits_u^{\infty}(s-u)^{n-\varkappa-1}f(s)\,ds\Big\}du$$

qui entraînent la suivante

$$0 \leqslant \frac{1}{(n-\varkappa-1)!}\int\limits_t^v\Big\{\int\limits_u^{\infty}(s-u)^{n-\varkappa-1}f(s)\,ds\Big\}du \leqslant -\varphi^{(\varkappa-1)}(t),$$

dans laquelle on peut évidemment remplacer la lettre v par le signe ∞. Mais ceci suffit déjà pour déduire, par une simple transfiguration de l'intégrale, la formule qui s'obtient de (2) en remplaçant $\varkappa$ par $\varkappa-1$.

Pour achever la démonstration il suffit d'en appeler au principe de l'induction.

Lemme 4 (de J. Mikusiński). *Soit $0 \leqslant \eta < 1 < m$ et $f(t)$ une fonction continue et non négative pour $t \geqslant a$. Supposons, en plus, que $\tau > a$ et $K > 0$, et que*

$$\int\limits_{\cdot}^{\infty} s^{m-2+\eta}f(s)\,ds < \infty \quad \text{et} \quad \int\limits_{\cdot}^{\infty} s^{m-1}f(s)\,ds = \infty.$$

Dans ces hypothèses, il existe un nombre $\sigma > \tau$ tel que

$$\int\limits_\tau^t\Big\{\int\limits_u^{\infty}(s-u)^{m-2+\eta}f(s)\,ds\Big\}du \geqslant K(t-\sigma)^n, \quad \text{pour} \quad t \geqslant \sigma.$$

La démonstration est esquissée dans [2].

4. Equation fonctionnelle

Considérons une équation de la forme

$$\varphi^{(n)}(t) = \theta F\varphi(t), \; t \geqslant a, \; \theta^2 = 1, \tag{3}$$

où F désigne une transformation qui fait correspondre à toute fonction $\varphi(t)$ de classe Φ^n une fonction $\Psi(t) = F\varphi(t)$ de classe Φ^0 et, en outre, remplit d'autres hypothèses dont quelques variantes seront énoncées comme suit:

Hypothèse $\mathbf{H_1}$. *Si $\varphi(t) \in \Phi^n$ est de signe déterminé, la transformée $\Psi(t)$ l'est encore et $\mathscr{S}[\varphi]\cdot\mathscr{S}[\Psi] = 1$.*

Hypothèse $\mathbf{H_2}$. *Il existe un $\varepsilon > 0$ satisfaisant à la condition suivante: Si $\varphi(t) \in \Phi^n$ est de signe déterminé et si $|\varphi(t)| \geqslant {}'ct^\lambda$, où $c =$ const > 0 et λ est un nombre réel, non négatif, inférieur à $n-1$, alors*

$$\left|\int^{\infty} s^{n-\lambda-1-\varepsilon} F\varphi(s)\,ds\right| = \infty. \tag{4}$$

Hypothèse $\mathbf{H_2^*}$. *Si $\varphi(t) \in \Phi^n$ est de signe déterminé et si $|\varphi(t)| \geqslant {}'ct^p$, où $c =$ const > 0 et p est un entier non négatif et inférieur à $n-1$, alors*

$$\left|\int^{\infty} s^{n-p-2} F\varphi(s)\,ds\right| = \infty. \tag{5}$$

Il est visible que les conditions H_1 et H_2, même dans leur ensemble, n'assurent point l'existence de solutions d'une équation du type (3). Pour formuler des conditions suffisantes d'existence des solutions il faudrait donner la description de la nature de la transformation F et préciser plus exactement les limites des applications de notre modèle. Cependant, le problème d'existence ne faisant pas l'objet de la présente note, nous laisserons de côté toutes les questions possibles qui pourraient s'imposer en rapport avec ce problème. Ce qui nous intéresse actuellement, c'est seulement l'allure asymptotique des solutions, étant supposé qu'il en existe une au moins. Remarquons, à cette occasion, que lorsqu'il sera question des solutions de l'équation (3), elles seront toujours entendues définies dans l'intervalle $\langle a, \infty)$ tout entier.

Nous introduirons encore deux types de fonctions: Les classes de fonctions $\mathrm{B}^{nk} \subset \Psi^{nk}$ dont les éléments seront caractérisés par la condition

$$\lim \varphi^{(k)}(t) = 0, \tag{6}$$

complétant le système des conditions contenues dans la définition des classes Ψ^{nk}, et les classes A^n formées des fonctions $\varphi(t)$, dites oscillantes, qui appartiennent resp. à Φ^n et satisfont à la condition

$$\sup\{t:\varphi(t)=0\}=\infty.$$

Théorème 1. *Dans l'hypothèse H_1 toute solution de l'équation* (3) *doit appartenir soit à la classe A^n, soit à l'une des classes Ψ^{nk}, où $0\leqslant k\leqslant n$; dans le cas où $\theta=1$, on a $k\equiv n(\mathrm{mod}\ 2)$, dans le cas où $\theta=-1$, on a $k\leqslant n-1$ et $k\equiv n-1(\mathrm{mod}\,2)$.*

Démonstration. Supposons qu'une solution $\varphi(t)$ de l'équation (3) n'appartienne pas à A^n. Donc elle est de signe déterminé et, en vertu des lemmes 1 et 2, appartient à une classe Ψ_b^{nk} où $b\geqslant a$, $0\leqslant k\leqslant n$. Mais $\mathscr{S}[\varphi^{(k)}]=\mathscr{S}[\varphi]$, d'où le reste de la proposition.

5. Généralisation des théorèmes de W. B. Fite et J. G. Mikusiński.

Théorème 2 (²). *Si la transformation F satisfait aux hypothèses H_1 et H_2, toute solution $\varphi(t)$ de l'équation* (3) *appartient à l'une des classes: A^n, Ψ^{nn} ou bien B^{no}. En particulier:*

si $\theta=1$ et n est pair, $\varphi(t)$ appartient à A^n, Ψ^{nn} où B^{no},
si $\theta=1$ et n est impair, $\varphi(t)$ appartient à A^n ou Ψ^{nn},
si $\theta=-1$ et n est impair, $\varphi(t)$ appartient à A^n ou B^{no},
si $\theta=-1$ et n est pair, $\varphi(t)$ appartient à A^n.

En effet, soit $\varphi(t)$ une solution de l'équation (3) et supposons qu'elle ne soit pas oscillante; en vertu du Théorème 1, $\varphi(t)\epsilon\Psi_b^{nk}$ et le nombre k peut être égal à n seulement dans le cas où $\theta=1$. Nous pouvons donc admettre que l'on a $0\leqslant k\leqslant n+1$ Nous admettons en outre, pour simplifier les notations, que $\varphi(t)\geqslant{}'0$. Nous allons voir que le nombre k ne peut pas être supérieur à zéro(³).

Sinon, nous aurions $\varphi^{(k)}\geqslant{}'0$ et la fonction $\varphi^{(k-1)}(t)$ serait positive et non décroissante. Donc il existerait un nombre $a>0$ tel que $\varphi^{(k-1)}(t)\geqslant$

(²) Les hypothèses H_1 et H_2 sont remplies dans le cas particulier où $F\varphi(t)=A(t)\cdot\varphi(t)$, la fonction $A(t)$ étant continue et non négative dans l'intervalle $\langle a,\infty)$, et satisfaisant à la condition $\int^{\infty}t^{n-1-\varepsilon}A(t)dt=\infty$, $\varepsilon>0$. Nous obtenons ainsi, pour des ordres n pairs, une généralisation d'un théorème de J. G. Mikusiński ([2], p. 35), dans lequel un nombre $\varepsilon>0$ n'intervient que si l'ordre n est supposé pair; cf. les formules (6) et (7) dans le travail cité. Cependant, remarquons que l'on ne peut pas se passer de ce nombre $\varepsilon>0$, même dans le cas où l'ordre n est impair, ce qui montre l'exemple à la fin de la présente note (voir remarque à la page 104).

(³) La méthode du raisonnement qui va suivre a été empruntée au travail [2].

$\geqslant {}'2a$, d'où $\varphi(t) \geqslant at^{k-1}$ pour $t \geqslant b$, le nombre b étant suffisamment grand. Soit $f(t) = F\varphi(t)$. D'après (3) et l'hypothèse H_2 on aurait

$$\int^{\infty} s^{n-k-\varepsilon} f(s)\,ds = \infty, \tag{7}$$

tandis que, en vertu du lemme 3, formule (2),

$$\varphi^{(k)}(t) \geqslant \frac{1}{(n-k-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-k-1} f(s)\,ds,\; t \geqslant b,$$

d'où

$$\int^{\infty} s^{n-k-1} f(s)\,ds < \infty \tag{8}$$

et

$$\varphi^{(k-1)}(t) \geqslant \frac{1}{(n-k-1)!}\int_{\tau}^{t}\left\{\int_u^{\infty} (s-u)^{n-k-1} f(s)\,ds\right\}du,$$

pour $t \geqslant \tau \geqslant b$. Ainsi, en vertu de (7) et (8), les conditions du lemme 4 seraient remplies pour $m = n-k+1-\varepsilon$, $\eta = \varepsilon$ et, en admettant que $K = 2$, nous en tirerions les inégalités $\varphi^{(k-1)}(t) \geqslant 2a(t-\sigma)^{\varepsilon}$, où $\sigma \geqslant \tau \geqslant b$, et $\varphi(t) \geqslant a^{k-1+\varepsilon}$ pour $t \geqslant b_1 \geqslant b$. Mais, en itérant cet argument, nous verrions que

$$\varphi(t) \geqslant {}'a^{k-1+i\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \ldots j,$$

où $1-\varepsilon \leqslant j\varepsilon < 1$, et, en reprenant ce procédé encore une fois, nous arriverions aux inégalités contradictoires suivantes

$$\infty = \int^{\infty} s^{n-k-\varepsilon-j\varepsilon} f(s)\,ds \leqslant \int^{\infty} s^{n-k-1} f(s)\,ds < \infty.$$

Nous avons ainsi démontré que l'indice $k = 0$, ce qui est possible exclusivement dans les cas où $\theta = 1$ et n pair, ou bien $\theta = -1$ et n impair, en tenant compte du fait que $\varphi(t) \in \Psi^{n\theta}$ et de la condition 2° dans la définition de cette classe (page 00). Donc il reste à montrer que $\lim \varphi(t) = 0$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions $\varphi(t) \geqslant {}'a > 0$, d'où, en vertu de l'hypothèse H_2 et du lemme 3, résulteraient les inégalités

$$\infty = \int^{\infty} s^{n-2} F\varphi(s)\,ds \leqslant \int^{\infty} s^{n-1} F\varphi(s) < \infty.$$

Cette dernière contradiction achève la démonstration.

Théorème 2*. *Si la transformation F satisfait aux hypothèses H_1 et H_2^*, toute solution $\varphi(t)$ de l'équation* (3) *appartient à l'une des classes* A^n, Ψ^{nn} *ou* B^{no}, *les classes* Ψ^{nn} *étant exclues pour* $\theta = -1$ *et les classes* B^{no} *pour* $(-1)^n\theta < 0$.

La démonstration est beaucoup plus simple que celle du théorème 2, puisque dans le présent cas $\varepsilon = 1$ et les inégalités (7) et (8) sont déjà contradictoires, et le lemme 4 devient superflu. On peut aussi se passer du lemme 3, comme il suit. En supposant que l'on a $0 < \varphi(t)\,\epsilon\,\Psi^{nk}$ et $0 < k < n$, il vient, comme auparavant $\varphi(t) \geqslant {}'at^{k-1}$, d'où, d'après l'hypothèse H_2^* et (3)

$$\theta \int^{\infty} s^{n-k-1}\varphi^{(n)}(s)\,ds = \infty .$$

D'autre part, on a, en intégrant *per partes*,

$$\theta \int_{\tau}^{t} s^{n-k-1}\varphi^{(n)}(s)\,ds =$$

$$= \theta t^{n-k-1}\varphi^{(n-1)}(t) - \ldots + (n-k-1)!\,\varphi^{(k)} + \text{const} \geqslant \text{const}$$

et nous aboutissons ainsi à une contradiction.

La dernière étape de la démonstration dans cette variante du raisonnement est analogue.

R e m a r q u e. Le nombre ε, qui figure dans la formule (4) et devient égal à 1 dans (5), ne peut pas être rejeté. En effet, l'équation $\varphi^{(n)}(t) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)t^{-n}\varphi(t)$, où $1 < \alpha < n$, satisfait à la condition (4) avec $\varepsilon = 1$, mais sa solution particulière $\varphi(t) = t^{\alpha}$ n'appartient à aucune des classes A^n, B^{no}, Ψ^{nn}. Dans cet exemple $\theta = 1$ ou $\theta = -1$ selon le choix particulier de α.

Le tableau suivant met en évidence les resultats que nous venons d'éablir.

	$\varphi^{(n)} = -F\varphi$	$\varphi^{(n)} = F\varphi$	
H_1	A^n, Ψ^{nk} $0 \leqslant k < n$	A^n, Ψ^{nk} $0 \leqslant k \leqslant n$	
H_1 et H_2 ou H_2^*	A^n	A^n, Ψ^{nn}, B^{no}	n pair
	A^n, B^{no}	A^n, Ψ^{nn}	n impair

BIBLIOGRAPHIE

[1] Fite, W. B., *Concerning the zeros of solutions of certain differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **19** (1918), p. 341-352.

[2] Mikusiński, J. G., *On Fite's Oscillation Theorems*, Coll. Math., **2**, 1 (1951), p. 34-39.

[3] Мышкис, А. Д., Линейные Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Москва-Ленинград, 1951, (Equations différentielles linéaires à argument retardé, Moscou-Leningrad 1951 (en Russe).

Streszczenie

Zakładamy, że przekształcenie F przyporządkowuje funkcjom $\varphi(t)$, klasy $C^{(n)}$ w przedziale $\langle a, \infty)$, $n \geqslant 1$, funkcje $F\varphi(t)$, ciągłe w tym przedziale, zachowując, dla dostatecznie dużych wartości t, znak funkcji $\varphi(t)$ w przypadku, gdy był stały dla $t \geqslant b$, gdzie $b \geqslant a$. Zakładamy ponad to, że $\varepsilon > 0$ i że, jeśli dla dostatecznie dużych t spełniona jest nierówność $\varphi(t) \geqslant at^{\lambda}$, gdzie $a > 0$ i $0 \leqslant \lambda < n-1$, to całka

$$\int^{\infty} t^{n-1-\varepsilon-\lambda} F\varphi(t)\,dt$$

jest rozbieżna.

Przy tych założeniach, jeśli równanie $\varphi^{(n)}(t) = \theta F\varphi(t)$, $\theta^2 = 1$ ma rozwiązanie $\varphi(t)$ klasy $C^{(n)}$ w przedziale $\langle a, \infty)$, to może zajść tylko jeden z następujących przypadków:

I. Zbiór miejsc zerowych funkcji $\varphi(t)$ jest nieograniczony u góry (t.zw. rozwiązanie oscylujące).

II. Funkcja $\varphi(t)$ i jej pochodne aż do rzędu n mają, dla dostatecznie dużych t, ten sam znak; $|\varphi^{(i)}(t)| \to \infty$, gdy $t \to \infty$, dla $i = 0, 1, \ldots, n-2$.

III. Funkcja $\varphi(t)$ i jej kolejne pochodne do rzędu n mają znaki alternujące, dla dostatecznie dużych t, a ponad to $\varphi^{(i)}(t) \to 0$, gdy $t \to \infty$, dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ewentualność II jest wykluczona, gdy $\theta = -1$, ewentualność III odpada, gdy $(-1)^n \theta < 0$.

Wyniki te uogólniają pewne twierdzenia W. B. Fite'a [1] i J. G. Mikusińskiego [2].

Резюме

Полагаем, что оператор F преобразует функции $\varphi(t)$ класса $C^{(n)}$ в полусегменте $\langle a, \infty)$, причём $n \geqslant 1$, в функции непрерывные в $\langle a, \infty)$ с сохранением знака функции $\varphi(t)$ для достаточно больших значений t в том случае, когда этот знак сохранялся у $\varphi(t)$ для $t \geqslant b$, где $b \geqslant a$.

Полагаем сверх того, что для некоторого $\varepsilon > 0$, и если исполнено неравенство $\varphi(t) \geqslant at^{\lambda}$ для достаточно больших t, причём $a > 0$ и $0 \leqslant \lambda < n-1$, то интеграл

$$\int^{\infty} t^{n-1-\varepsilon-\lambda} F\varphi(t)\, dt$$

расходится.

При этих предложениях, если уравнение $\varphi^{(n)}(t) = \theta F\varphi(t)$ имеет решение $\varphi(t)$ класса $C^{(n)}$ в полусегменте $\langle 0, \infty)$, то может иметь место только один из следующих случаев

I. Множество значений t, для которых $\varphi(t) = 0$, неограничено справа (так называемое осциллирующее решение).

II. Функция $\varphi(t)$ и её производные до n-го порядка $\varphi^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеют тотже самый знак при достаточно больших t; притом $|\varphi^{(i)}(t)| \to \infty$, когда $t \to \infty$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

III. Функция $\varphi(t)$ и её производные $\varphi^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеют знаки попеременно $+$ и $-$ для достаточно больших t, а при этом $\varphi^{(i)}(t) \to 0$, когда $t \to \infty$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Случай II невозможен, когда $\theta = -1$; случай III исключен, если $(-1)^n\theta > 0$.

Это предложение обобщает некоторые теоремы У. Б. Файта [1] и Я. Г. Микусинского [2].