ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XV, 4 SECTIO A 1961

Z Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ADAM BIELECKI et ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur certaines familles de fonctions α-étoilées

O pewnych rodzinach funkcji α-gwiaździstych

О некоторых классах α-звездных функций

1. Introduction

Soient $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ et $F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ deux fonctions d'une variable complexe, holomorphes dans le cercle $C_\sigma = \{z: |z| < \sigma\}$ de centre 0 et de rayon $\sigma > 0$. Nous supposons encore que la seconde fonction $F(z)$ soit univalente dans C_σ et que les coefficients a_1 et A_1 soient réels et non négatifs; donc $f(0) = F(0) = \arg F'(0) = 0$, $F'(0) = A_1 > 0$, $f'(0) = a_1 \geqslant 0$.

La fonction $F(z)$ sera dite majorante de la fonction $f(z)$ dans C_ϱ, où $\varrho \leqslant \sigma$, et on écrira $f \prec_\varrho F$, si $f(C_\varrho) \subset F(C_\varrho)$, c'est-à-dire que, pour tout $z \epsilon C_\varrho$, il existe un $z_1 \epsilon C_\varrho$ tel que $f(z) = F(z_1)$. Nous appellerons la fonction F majorante en module de la fonction $f(z)$ dans C_ϱ, et nous écrirons $|f| \prec_\varrho |F|$, lorsque $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour tout $z \epsilon C_\varrho$.

L'un des auteurs de la présente note, Z. Lewandowski a démontré [3] qu'il existe une constante réelle $R > 0$ (indépendante d'une forme particulière des fonctions f et F satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer) telle que la relation $|f| \prec_1 |F|$ entraîne la relation $f \prec_\varrho F$ pour tout $\varrho \epsilon (0, R\rangle$. En outre, il a trouvé les limitations: $0{,}21 < R_{\max} \leqslant 0{,}29 \ldots$ pour la valeur maximale de R. Ce résultat est, en un certain sens, la réciproque d'un théorème dû à M. Biernacki [2], qui a été ensuite renforcé par d'autres auteurs.

Nous nous proposons ici d'envisager des problèmes semblables pour certaines classes plus étroites de fonctions, tout en admettant que les fonctions f et F sont toutes les deux univalentes. En particulier nous obtiendrons, pour les fonctions étoilées ou bien convexes des théorèmes réciproques de certains théorèmes de M. Biernacki.

2. Certaines classes de fonctions holomorphes

Nous désignerons par $\mathscr{R}_\beta^a$, où $0 \leqslant a < \beta$, l'ensemble des fonctions de la forme $\varphi(z) = \beta + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots$ holomorphes dans le cercle C_1 et satisfaisant à la condition: $\mathrm{Re}\varphi(z) > a$. Si $\varphi(z) \epsilon \mathscr{R}_\beta^a$, on a

$$(1) \qquad \arg\varphi(z) \leqslant \arcsin\left\{2r\left[1+r^2+\frac{a}{\beta-a}(1-r^2)\right]^{-1}\right\},$$

où $r = |z| < 1$, et, dans le cas particulier où $a = 0$, on a

$$(1') \qquad |\arg\varphi(z)| \leqslant \arcsin\frac{2r}{1+r^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, r.$$

On obtient facilement ces formules en appliquant le principe de Lindelöf aux fonctions $\varphi(z)$ et $a+(\beta-a)(1+z)/(1-z)$.

Les fonctions $f(z) = az + a_2 z^2 + \ldots$, où le coefficient a est réel et positif, holomorphes et univalentes dans C_1 et telles que

$$(2) \qquad \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > a, \quad 0 \leqslant a < 1,$$

cf. [6], seront appelées ici a-étoilées et leur ensemble sera noté $\mathscr{S}_a^a$. Dans le cas particulier $a = 0$ ce seront les fonctions étoilées (dans le sens usuel du mot) et, dans le cas où $a = \frac{1}{2}$, nous obtiendrons une classe de fonctions univalentes $\mathscr{S}_a^{1/2}$ contenant, entre autres, toutes les fonctions univalentes convexes $f(z)$ telles que $f(0) = 0 = \arg f'(0)$ et $f'(0) = a$; cf. [5].

Enfin, nous désignerons par $\mathfrak{S}^a$, où $0 \leqslant a < 1$, l'ensemble des fonctions complexes d'une variable complexe $z \epsilon C_1$ et d'un paramètre réel $t \epsilon \langle t_1, t_2 \rangle$, de la forme $\Phi(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \ldots$, où le coefficient $a_1(t)$ reste toujours réel et positif, jouissant des propriétés suivantes:

I. Pour tout $t \epsilon \langle t_1, t_2 \rangle$ fixé, $\Phi(z,t)$ est une fonction holomorphe et univalente de la variable $z \epsilon C_1$.

II. Pour tout $z \epsilon C_1$ fixé, $\Phi(z,t)$ est une fonction continue du paramètre t ayant une dérivée $\Phi_t'(z,t)$ continue dans l'intervalle $\langle t_1, t_2 \rangle$.

III. Pour tout $t \epsilon \langle t_1, t_2 \rangle$ et tout $z \epsilon C_1$ on a

$$(3) \qquad \mathrm{Re}\frac{z\Phi_z'(z,t)}{\Phi(z,t)} > a,$$

c'est-à-dire $\Phi(z,t) \epsilon \mathscr{S}_a^a(t)$ pour chaque valeur fixée du paramètre t.

Ainsi la fonction $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}^{a}$ peut être considérée comme une famille à un paramètre de fonctions α-étoilées.

3. Fonctions $\Phi(z,t)$ croissantes et croissantes en module

Soit $\Phi(z,t)$ une fonction satisfaisant à toutes les conditions énoncées dans la définition de la classe $\mathfrak{S}^{a}$, sauf la dernière condition III. L'ensemble de telles fonctions $\Phi(z,t)$ sera désigné par $\mathfrak{S}$. La classe $\mathfrak{S}$ contient donc toutes les fonctions $\Phi(z,t)$ holomorphes et univalentes dans C_1 pour t fixé et normées par les conditions $\Phi(0,t)=0$, $\Phi_z'(0,t)>0$. Evidemment $\mathfrak{S}^{a}\subset\mathfrak{S}$.

Nous dirons que la fonction $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}$ est croissante dans C_ϱ, ce que nous noterons $\Phi\nearrow^{\varrho}$, lorsque $\Phi(z,t)\prec_{\varrho}\Phi(z,s)$ pour $t\leqslant s$, elle s'appellera croissante en module dans C_ϱ, et nous écrirons $|\Phi|\nearrow^{\varrho}$, lorsque $|\Phi(z,t)|\prec_{\varrho}|\Phi(z,s)|$ pour $t\leqslant s$.

Lemme 1. *Si* $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}$ *et* $\Phi\nearrow^{\varrho}$ *pour* $t\in\langle t_1,t_2\rangle$, *on a*

$$\left|\arg\frac{\Phi_t'(z,t)}{z\Phi_z'(z,t)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad ou\quad \Phi_t'(z,t)=0, \tag{4}$$

pour $t\in\langle t_1,t_2\rangle$ *et* $z\in C_\varrho$.

En effet, soit $\Phi\nearrow^{\varrho}$ et fixons un point $z_0\in C_\varrho$. Donc $p=|z_0|\in(0,\varrho)$. Désignons par Γ_t l'image $\{u: u=\Phi(z,t),\ |z|=p\}$ du circuit $|z|=p$. On prouve facilement que, pour $t'<t''$, le circuit $\Gamma_{t'}$ est contenu dans le domaine fermé limité par l'autre circuit $\Gamma_{t''}$ (ce fait est une conséquence presque immédiate du lemme bien connu de Schwarz). Nous voyons ainsi que le domaine limité par le circuit mobile Γ_t s'élargit constamment quand t croît. Comme le vecteur $z\,\Phi_z'(z_0,t)$ est normal extérieurement au circuit Γ_t au point mobile $\Phi(z_0,t)$ et le vecteur $\Phi_t'(z_0,t)$ représente la vitesse instantanée de ce point, il est clair que l'angle entre ces deux vecteurs ne peut pas surpasser un angle droit, donc l'inégalité (4) est remplie pour $z=z_0$ et pour $t\in\langle t_1,t_2\rangle$. Mais le point z_0 étant arbitrairement choisi, la dernière inégalité subsiste partout dans C_ϱ.

Lemme 2. *Si* $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}$ *et*

$$\left|\arg\frac{\Phi_t'(z,t)}{z\Phi_z'(z,t)}\right|<\frac{\pi}{2}\quad ou\quad \Phi_t'(z,t)=0 \quad (*), \tag{4*}$$

pour $t\in\langle t_1,t_2\rangle$ *et* $z\in C_\varrho$, *alors* $\Phi(z,t)\nearrow^{\varrho}$.

En effet, supposons que l'inégalité (4*) soit satisfaite par une fonction $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}$. Envisageons, comme auparavant, le circuit mobile $\Gamma_t = \{u: u = \Phi(z,t), |z| = p\}$ où $p = |z_0|\in(0,\varrho)$. L'angle entre les vecteurs $\Phi_t'(z_0,t)$ et $z_0\Phi_z'(z_0,t)$ restant toujours aigu, le circuit Γ_t se meut de façon que tous ses points ont des vitesses dirigées à l'extérieur du circuit Γ_t qui, par conséquent, doit englober un domaine de plus en plus large, d'où $\Phi\nearrow^{\varrho}$.

Lemme 3. *Pour que la fonction $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}$, où $t\in\langle t_1,t_2\rangle$, soit croissante en module dans C_ϱ il faut et il suffit que l'on ait*

$$\left|\arg\frac{\Phi_t'(z,t)}{\Phi(z,t)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \textit{ou} \quad \Phi_t'(z,t) = 0 \tag{5}$$

pour $z\in C_\varrho$, $t\in\langle t_1,t_2\rangle$.

En effet, l'inégalité (5) peut s'interpréter comme il suit: La vitesse $\Phi_t'(z,t)$ du point mobile $\Phi(z,t)$ forme un angle droit au plus avec le rayon vecteur de ce point, donc la distance $|\Phi(z,t)|$ entre l'origine et le point ne peut pas diminuer, c'est-à-dire $|\Phi|\nearrow^{\varrho}$. Au contraire, si l'on avait le signe $<$ dans (5) pour $z = z_0$ et $t = t_0$, la vitesse du point $\Phi(z_0,t)$, à l'instant t_0, aurait une composante non nulle dans la direction opposée à celle du rayon vecteur, donc nous aurions $|\Phi(z_0,t)|' < 0$, pour $t = t_0$. Il s'ensuit que la condition $|\Phi|\nearrow\varrho$ entraîne l'inégalité (5).

Les relations formelles entre les conditions (3), (4) et (5) joueront dans la suite un rôle essentiel.

4. Deux théorèmes sur les fonctions croissantes $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}^a$

Soit $R(a)$ le plus petit nombre $r\in\langle 0,1\rangle$ tel que

$$\Omega(r,a) \equiv \arcsin\frac{2r}{1+r^2+\dfrac{a}{1-a}(1-r^2)} + 2\,\mathrm{arctg}\,r = \pi/2, \tag{6}$$

où $a\in\langle 0,1)$. Le nombre $R(a)$ est bien défini, puisque $\Omega(0,a) = 0 < \pi/2 < \pi = \Omega(1,a)$, et $0 < R(a) < 1$. Remarquons que $\Omega(r,a) < \pi/2$ lorsque $0 \leqslant r < R(a)$ et, ce qu'on prouve par un calcul élémentaire, que $R(a)$ croît avec a.

Théorème 1. *Si pour $a\in\langle 0,1)$ et $t\in\langle t_1,t_2\rangle$, $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}^a$ et $|\Phi|\nearrow^1$, alors $\Phi\nearrow^{R(a)}$.*

(*) Une formule équivalente a été donnée, pour un cas particulier, dans [4].

Théorème 2. *Si pour* $a \in \langle 0, 1)$ *et* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ $\Phi(z, t) \in \mathfrak{S}^a$ *et* $\Phi \nearrow^1$, *alors* $|\Phi| \nearrow^{R(a)}$.

En effet, pour démontrer le premier théorème supposons que $|\Phi| \nearrow^1$. Les conditions (3) et (5) étant remplies (lemme 3), on constate sans peine que la fonction $\Phi^*(z, t) = \Phi(z, t)[1 + \varepsilon(t - t_1)]$, où $\varepsilon > 0$, appartient à la classe $\mathfrak{S}^a$, que $z\Phi_z^{*'}/\Phi^* \in \mathscr{R}_1^a$ et $\Phi_t^{*'}/\Phi^* \in \mathscr{R}_{\beta(t)}^0$, d'où, en vertu de (1), (1′) et (6)

$$|\arg(\Phi_t^{*'}|z\Phi_z^{*'})| \leqslant |\arg(z\Phi_z^{*'}/\Phi^*)| + |\arg(\Phi_t^{*'}/\Phi^*| \leqslant \Omega(r, a)$$

pour $|z| < r < 1$, et, par conséquent, $|\arg(\Phi_t^{*'}/z\Phi_z^{*'})| < \frac{\pi}{2}$ pour $|z| < R(a)$, c'est-à-dire $\Phi^* \nearrow^{R(a)}$, en vertu du lemme 2.

Soit $p \in (0, R(a))$ et fixons deux nombres $t < s$ appartenant à $\langle t_1, t_2 \rangle$. Or, on a, pour $|z| \leqslant p$, $\Phi^*(z, t) \in \Phi^*(\bar{C}_p, s)$ et cette relation est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Autrement dit, pour $|z| \leqslant p$ et $\varepsilon > 0$ il existe toujours un nombre $z^* \in \bar{C}_p$ tel que $\Phi(z, t)[1 + \varepsilon(t - t_1)] = \Phi(z^*, s)[1 + \varepsilon(s - t_1)]$. L'ensemble $\bar{C}_p$ étant compact, il est facile de prouver, en faisant diminuer ε jusqu'à zéro, qu'il existe un $\bar{z}$ pour lequel $\Phi(z, t) = \Phi(\bar{z}, s)$. Nous arrivons ainsi à la conclusion que $\Phi(z, t) \prec \Phi(z, s)$ dans $\bar{C}_p$, mais, comme $p \in (0, R(a))$ pouvait être choisi arbitrairement, la dernière relation s'étend au cercle $C_{R(a)}$ tout entier, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

La démonstration du second théorème est beaucoup plus simple, car il n'y a plus besoin d'introduire une fonction auxiliaire Φ^*. En outre, les calculs restent tout à fait analogues et nous ne croyons pas nécessaire de les reproduire.

L'analogie entre les deux théorèmes et, en particulier, la coïncidence des rayons $R(a)$ sont assez frappantes, mais il serait encore plus intéressant de savoir si, dans le théorème 1 ou bien 2, la constante $R(a)$ ne pourrait pas être remplacée par une autre, plus grande. Nous allons construire deux exemples qui montrent que, dans tous les deux cas, la constante $R(a)$ est bien la plus grande possible.

5. Deux exemples

Soit $0 \leqslant a < 1$ et $R(a) < R < 1$. En vertu de la définition du nombre $R(a)$ il existe trois nombres réels ϱ, λ et ε tels que

$$R(a) < \varrho < R,\ \varrho/R < \lambda < 1 \text{ et } \varepsilon > 0 \tag{7}$$

et

$$\Omega(\varrho, a) > \pi/2 + 2\varepsilon, \tag{8}$$

la fonction $\Omega(\varrho, \alpha)$ étant déjà définie par la formule (6). Il n'est pas difficile de prouver que, pour ϱ et α fixé, $\Omega(\varrho, \alpha)$ est égale au maximum de la fonction

$$(9) \qquad \omega(\theta, \tau) = \arg\left\{(1-\alpha)\frac{1+\varrho\exp i(\theta+\tau)}{1-\varrho\exp i(\theta+\tau)}+\alpha\right\}+\arg\frac{1+\varrho\exp i\theta}{1-\varrho\exp i\theta}$$

où les valeurs de l'argument sont assujetties à la condition d'être contenues dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi)$. Admettons que les angles θ et τ aient déjà réalisé ce maximum, c'est-à-dire que $\omega(\theta, \tau) = \Omega(\varrho, \alpha)$, et fixons ces angles.

Ceci posé, considérons la fonction

$$(10) \qquad f(z) = \lambda z(1-\lambda e^{i\tau}z)^{2\alpha-2} = \lambda z\exp[2(\alpha-1)\ln(1-\lambda e^{i\tau}z)],$$

où l'on doit prendre la branche principale du logarithme. Or, on a

$$(11) \qquad \gamma(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha+(1-\alpha)\frac{1+\lambda e^{i\tau}z}{1-\lambda e^{i\tau}z},$$

donc, évidemment, $\gamma(z/\lambda) \in \mathscr{R}_1^\alpha$, d'où, d'après (1)

$$(12) \qquad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| = |\arg\gamma(\lambda z/\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \arcsin\frac{2\lambda|z|}{1+\lambda^2|z|^2+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}(1-\lambda^2|z|^2)} < 2\operatorname{arctg}\lambda < \frac{\pi}{2},$$

D'autre part on constate facilement que, en vertu de (11), on a

$$(13) \qquad \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \geqslant \alpha+(1-\alpha)\frac{1-\lambda}{1+\lambda} > \alpha.$$

Il s'ensuit que $f'(z) \neq 0$, d'où il résulte, eu égard à (12), que $f(z)$ est une fonction univalente et étoilée dans C_1.

Admettons maintenant que

$$(14) \qquad \varphi(z, t) = (1+t)\frac{1+\lambda(1-t)z}{1+\lambda(1+t)z},$$

$$(15) \qquad \Phi(z, t) = f(z)\varphi(z, t),$$

por $t\in(-\eta, 0)$, $\eta > 0$. On constate sans peine que, pour η suffisamment voisin de zéro, on a dans $\bar{C}_1$

$$\begin{gathered}\varphi(z,t) \rightrightarrows 1, \qquad \varphi_t'(z,t) \rightrightarrows \frac{1-\lambda z}{1+\lambda z},\\ \frac{\varphi_t'(z,t)}{\varphi(z,t)} \rightrightarrows \frac{1-\lambda z}{1+\lambda z}, \qquad \frac{z\varphi_z'(z,t)}{t\varphi(z,t)} \rightrightarrows -\frac{2\lambda z}{(1+\lambda z)^2},\end{gathered} \tag{16}$$

lorsque $t \to 0-$. En outre

$$\left|\frac{1-\lambda z}{1+\lambda z}\right| \geqslant \mathrm{Re}\,\frac{1-\lambda z}{1+\lambda z} \geqslant \frac{1-\lambda}{1+\lambda} > 0. \tag{17}$$

Fixons donc le nombre $\eta > 0$ de façon que l'on ait, pour $-\eta < t < 0$ et $z\in C_1$,

$$\mathrm{Re}\,\frac{z\varphi_z'}{\varphi} > -(1-\alpha)\frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \tag{18}$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{\varphi_t'}{\varphi} > 0, \qquad \left|\arg\frac{\varphi_t'}{\varphi}\right| < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad |\varphi_t'| > 0. \tag{19}$$

D'après (15), (13) et (18)

$$\mathrm{Re}\,\frac{z\Phi_z'}{\Phi} = \mathrm{Re}\,\frac{zf'}{f} + \mathrm{Re}\,\frac{z\varphi_z'}{\varphi} > \alpha,$$

pour $-\eta < t < 0$ et $z\in C_1$, et, d'après (10), (14) et (15), $\Phi_z'(0,t) = \lambda(1+t)$. Il s'ensuit que la fonction $\Phi(z,t)$ est étoilée et univalente dans C_1 pour toute valeur particulière de $t\in(-\eta, 0)$, donc $\Phi(z,t)\in\mathfrak{S}^\alpha$. Pareillement $f(z)\in\mathscr{S}_\lambda^\alpha$, puisque f satisfait à l'inégalité (13) et $f'(0) = \lambda > 0$. En vertu de (19) la fonction $\varphi(z,t)$ et, de même, la fonction $\Phi(z,t)$ sont croissantes en module dans C_1. Néanmoins, nous allons voir que la fonction $\Phi(z,t)$ n'est pas croissante dans le cercle C_R pour les valeurs de t assez voisines de zéro.

En effet, posons $z = \varrho e^{i\theta}/\lambda$. Nous constatons, en utilisant les relations (15), (16), (11), (7), (8) et (9), que

$$\arg\frac{z\Phi_z'}{\Phi_t'} \rightrightarrows \omega(\theta,\tau) > \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon, \qquad \text{lorsque } t \to 0.$$

Il s'ensuit qu'il suffit de réduire encore une fois la constante $\eta > 0$ pour obtenir l'inégalité

$$\arg\frac{z\Phi_z'(z,t)}{\Phi_t'(z,t)} \geqslant \frac{\pi}{2}+\varepsilon \quad \text{pour} \quad -\eta < t < 0 \text{ et } z = \frac{\varrho}{\lambda}e^{i\theta}.$$

Il en résulte, en vertu du lemme 1, que la fonction $\Phi(z,t)$ n'est pas croissante dans le cercle C_R tout entier pour $t\epsilon(-\eta, 0)$. Ainsi nous avons démontré que la constante $R(a)$ ne peut pas être remplacée, dans l'énoncé du théorème 1, par une constante plus grande.

Passant au théorème 2, considérons encore deux autres fonctions

$$(20) \qquad \psi(z,t) = \lambda z\exp\left\{t+2\lambda z\ln\left[1+\frac{t}{1-\lambda z}\right]\right\}, \qquad \Psi = f(\psi(z,t)),$$

où $z\epsilon C_1$ et $t\epsilon(-\eta, 0)$, et où l'on doit prendre toujours la branche principale du logarithme. Comme dans l'exemple précédent nous constatons que, pour η suffisamment voisin de zéro, on a

$$(21) \qquad \begin{gathered} \psi \rightrightarrows \lambda z, \qquad \psi_z' \rightrightarrows \lambda, \qquad \psi_t' \rightrightarrows \lambda z\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}, \\ \frac{z\psi_z'}{\psi} \rightrightarrows 1, \qquad \frac{z\psi_z'}{\psi_t'} \rightrightarrows \frac{1-\lambda z}{1+\lambda z}, \qquad \frac{\psi_t'}{\psi} \rightrightarrows \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}, \end{gathered}$$

pour $t\to 0$. Donc, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, $|\psi(z,t)| < 1$ et, en vertu de (13), (20) et (21).

$$\operatorname{Re}\frac{z\Psi_z'}{\Psi'} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\psi f'(\psi)}{f(\psi)}\cdot\frac{z\psi_z'}{\psi}\right\} > a,$$

$$\left|\arg\frac{z\Psi_z'}{\Psi_t'}\right| = \left|\arg\frac{z\psi_z'}{\psi_t'}\right| < \frac{\pi}{2},$$

d'où il s'ensuit que $\Psi(z,t)\epsilon\mathfrak{S}^a$ et $\Psi(z,t)\nearrow^1$ (lemme 2), pour $t\epsilon(-\eta, 0)$.

D'autre part on prouve, comme auparavant, que $\arg(\Psi_t'/\Psi) = \omega(\theta,\tau)$ pour $z=\varrho e^{i\theta}/\lambda$, ce qui montre que la fonction $\Psi(z,t)$, satisfaisant aux hypothèses du théorème 2, n'est pas croissante en module dans le cercle C_R tout entier. Donc la constante $R(\alpha)$ dans l'énoncé du théorème 2 ne peut plus être augmentée.

6. Famille de fonctions engendrée par deux fonctions α-étoilées

Supposons que $f(z) = az + a_2z^2 + \ldots \in \mathscr{S}_a^\alpha$ et $F(z) = Az + A_2z^2 + \ldots \in \mathscr{S}_A^\alpha$ et soit

$$(22) \qquad \Phi(z, t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } z = 0 \\ z\left[\dfrac{f(z)}{z}\right]^{1-t}\left[\dfrac{F(z)}{z}\right]^t = [f(z)]^{1-t}[F(z)]^t & \text{pour } z \neq 0, \end{cases}$$

où $t \in \langle 0, 1 \rangle$ et les branches des puissances u^{1-t} et v^t sont celles qui sont réelles pour $u = 1$, resp. $v = 1$. Comme $\Phi(0, t) \equiv 0$, $\Phi_z'(0, t) = a^{1-t}A^t > 0$ et $\mathrm{Re}[z\Phi_z'(z, t)/\Phi(z, t)] > \alpha$, ce qui est facile à vérifier, on a $\Phi(z, t) \in \mathfrak{S}^\alpha$. En outre, $\Phi(z, 0) = f(z)$ et $\Phi(z, 1) = F(z)$. Enfin, si $|f(z)| \prec_1 |F(z)|$, alors $|\Phi(z, t)| \nearrow^1$, car, pour $z \neq 0$, $\mathrm{Re}(\Phi_t'/\Phi) = \mathrm{Re}\ln(F(z)/f(z)) \geqslant 0$, comme $|F(z)/f(z)| \geqslant 1$.

En appliquant le théorème 1 et en tenant compte du premier exemple du N° 5, nous en obtenons immédiatement la théorème que voici:

Théorème 3. *Si $f(z) \in \mathscr{S}_a^\alpha$, $F(z) \in \mathscr{S}_A^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$ et $|f| \prec_1 |F|$, alors $f \prec_{R(\alpha)} F$ où $R(\alpha)$ désigne la plus petite racine positive de l'équation* (6). *La constante $R(\alpha)$ ne peut être remplacée par aucun nombre supérieur.*

On peut aussi démontrer le théorème suivant:

Théorème 4. *Si $f(z) \in \mathscr{S}_a^\alpha$, $F(z) \in \mathscr{S}_A^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$ et $f \prec_1 F$, alors $|f| \prec_{R(\alpha)} |F|$ et la constante $R(\alpha)$ définie comme auparavant ne peut plus être augmentée.*

Une démonstration sera donnée dans une autre note.

Si $\alpha = 0$, on obtient du théorème 4, comme cas particulier, un théorème de M. Biernacki sur les fonctions étoilées [1, 2] et du théorème 3 le résultat réciproque. Dans les deux cas on a $R(0) = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41\ldots$

En admettant dans le théorème 4 que $\alpha = 1/2$ nous obtenons une généralisation d'un autre théorème de M. Biernacki, concernant les fonctions convexes convenablement normées [1, 2]. Dans ce cas la constante $R(1/2) = 0{,}543\ldots$ (qui a déjà été trouvée par M. Biernacki) est la plus petite solution positive de l'équation $\arcsin r + 2\,\mathrm{arctg}\, r = \pi/2$.

M. Biernacki a donné dans [1,2] un théorème analogue à notre théorème 4, concernant les fonctions de classe $\mathscr{S}$ (univalentes dans C_1). La méthode utilisée dans cette note permet d'obtenir le résultat réciproque, ce que nous nous proposons de montrer dans un autre travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki, M., *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, C. R., **201** (1935), p. 256.

[2] — Sur les fonctions univalentes, Mathematica, Cluj, **12** (1936), p. 49-64.

[3] Lewandowski, Z., *Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z| < 1$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **15**, (1961), p. 5-11.

[4] Schaeffers, A. C., Spencer, D. C., *The coefficients of schlicht functions*, II, Duke Math. Journ., **12**, 9 (1945), p. 107-125.

[5] Strohhäcker, E., *Beitrag zur Theorie der schlichten Funktionen*, Math. Zeitschr. **37** (1933), p. 356-380.

[6] Wu Żwao-Jen, *Some classes of functions of star-likeness*, *Acta Math.* Sinica, 7, 2 (1957), p. 179-182.

Streszczenie

Funkcję $\Phi(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \ldots$ holomorficzną w kole $C_1 = \{z: |z| < 1\}$ dla każdego ustalonego $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ i ciągłą wraz z pierwszą pochodną w tym przedziale dla każdego ustalonego $z \in C_1$, oraz spełniającą warunek, by współczynnik $a_1(t)$ był stale rzeczywisty i dodatni, zaliczamy do klasy $\mathfrak{S}^a$, jeśli ponadto stale $\mathrm{Re}(z\Phi'_z/\Phi) > a$. Funkcję taką nazywamy rosnącą w kole $C_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$, i piszemy: $\Phi \nearrow^{\varrho}$, jeśli $\Phi(C_\varrho, t) \subset \Phi(C_\varrho, s)$ dla $t_1 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_2$, a rosnącą modułowo w kole C_ϱ, symbol $|\Phi| \nearrow^{\varrho}$, jeśli $|\Phi(z,t)| \leqslant |\Phi(z,s)|$ dla $z \in C_\varrho$ i $t \leqslant s$.

Zakładając, że $\Phi(z,t) \in \mathfrak{S}^a$, dowodzimy, że jeśli $|\Phi| \nearrow^{1}$, to $\Phi \nearrow^{R(a)}$ (tw. 1.), a jeśli $\Phi \nearrow^{1}$, to $|\Phi| \nearrow^{R(a)}$ (tw. 2.), gdzie $R(a)$ jest najmniejszym pierwiastkiem nieujemnym równania (6). Wykazujemy prócz tego, że stała $R(a)$ jest już w obu przypadkach możliwie największa, konstruując odpowiednie przykłady.

Mając dane dwie funkcje $f(z)$ i $F(z)$ holomorficzne i jednolistne w kole C_1 oraz spełniające warunki: $f(0) = F(0)$, $f'(0)$ i $F'(0)$ są rzeczywiste i dodatnie, $\mathrm{Re}(zf'/f) > a \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(zF'/F) > a$ i $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ dla $z \in C_1$, dowodzimy, że $f(C_{R(a)}) \subset F(C_{R(a)})$ (tw. 3).

Резюме

Функцию $\Phi(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \ldots$, голоморфную в круге $C_1 = \{z: |z| < 1\}$ для всякого установленного $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ и непрерывную с первой производной в этом сегменте для всякого установленного $z \in C_1$, притом исполняющую условие, чтобы коэффициент $a_1(t)$ был постоянно действителен и положителен, причисляем к классу $\mathfrak{S}^a$, если сверх того всегда $\mathrm{Re}(z\Phi'_z/\Phi) > a$. Такую функцию называем

растущей в круге $C_\varrho = \{z : |z| < \varrho\}$ и пишем: $\Phi \nearrow^{\varrho}$, если $\Phi(C_\varrho, t) \subset \subset \Phi(C_\varrho, s)$ для $t_1 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_2$; а растущей по модулю в круге C_ϱ, с символом $|\Phi| \nearrow^{\varrho}$, если $|\Phi(z, t)| \leqslant |\Phi(z, s)|$, когда $z \in C_\varrho$ и $t \leqslant s$.

Полагая, что $\Phi(z, t) \in \mathfrak{S}^\alpha$, доказываем, что если $|\Phi| \nearrow^1$, то $\Phi \nearrow^{R(\alpha)}$ (теорема 1), а если $\Phi \nearrow^1$, то $|\Phi| \nearrow^{R(\alpha)}$ (теорема 2), где $R(\alpha)$ есть наименьший не отрицательный корень уравнения (6). Кроме того показываем, что постоянная $R(\alpha)$ в обоих случаях возможно большая, конструируя подходящие примеры.

Имея, данные две функции $f(z)$ и $F(z)$ голоморфные и однолистные в круге C_1 и исполняющие условия: $f(0) = F(0)$, $f'(0)$ и $F'(0)$ действительны и положительны, $\mathrm{Re}(zf'/f) > \alpha \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(zF'/F) > \alpha$ и $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ для $z \in C_1$, мы доказываем, что $f(C_{R(\alpha)}) \subset F(C_{R(\alpha)})$ (теор. 3).