ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XV, 3 SECTIO A 1961

Z Zakładu Matematyki III Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Deux théorèmes sur la convergence exponentielle des solutions de l'équation du second ordre

Dwa twierdzenia o zbieżności wykładniczej rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu

Две теоремы об экспоненциальной сходимости решений дифференциального уравнения второго порядка

1. Soit l'équation

$$x'' = f(t, x, x') \tag{1}$$

qui vérifie l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ (voir le n° 0.2, p. 36 de mon travail [1](¹)) et les conditions

$$a_2 \leqslant a_1 < 0, \tag{2}$$

$$a_1^2 + b_1 < 0, \tag{3}$$

$$B(a_1, b_1) < b_2 \tag{4}$$

(pour la définition de la fonction B voir le n° 1.5, p. 51 de mon travail [1]). Remarquons qu'on a alors

$$b_2 \leqslant b_1 < 0.$$

J'ai démontré dans mon travail [2] (p. 90, Théorème D1) que dans ces conditions toutes les solutions de (1) tendent vers zéro. Nous allons démontrer ici qu'elles tendent exponentiellement vers zéro. Ce résultat généralise les Théorèmes D1 et G1 de mon travail [2] et fournit une solu-

(¹) Page 35, lignes 7 et 8 d'en bas au lieu de 8. III. 1959 il faut lire 8. III. 1958. Page 51, ligne 3 d'en bas au lieu de (b_1, a^2) lire $b_1 - a^2$.

tion positive du problème posé dans ce travail, p. 96. Au n° 4 nous allons considérer le cas $0 < a_1$ et donner un théorème généralisant les Théorèmes D2 et G2 de mon travail [2].

2. Soit ε une constante telle que

$$\varepsilon > 0. \tag{5}$$

Posons

$$\varphi(t, y, u) = 2\varepsilon u - \varepsilon^2 y + e^{\varepsilon t} f(t, ye^{-\varepsilon t}, ue^{-\varepsilon t} - \varepsilon ye^{-\varepsilon t}).$$

Faisons dans (1) la substitution

$$x = ye^{-\varepsilon t}. \tag{6}$$

Nous obtenons ainsi l'équation

$$y'' = \varphi(t, y, y'). \tag{7}$$

Posons

$$\bar{a}_j = a_j + \varepsilon, \quad \bar{b}_1 = b_1 - 2\varepsilon a_2 - \varepsilon^2, \quad \bar{b}_2 = b_2 - 2\varepsilon a_1 - \varepsilon^2.$$

Nous avons supposé que l'équation (1) vérifie l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Il s'ensuit que l'équation (7) vérifie l'hypothèse $\mathbf{V}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$. En effet, s'il y a unicité des solutions des (1) il en est de même pour les solutions de (7). En plus, il résulte de nos suppositions que si $x > 0$, $z > 0$, on a

$$f(t, x, z) \leqslant 2a_1 z + b_1 x$$

(voir les inégalités (0.2.4) p. 36 de mon travail [1]), donc nous aurons

$$\varphi(t, y, u) \leqslant 2\varepsilon u - \varepsilon^2 y^2 + e^{\varepsilon t}[2a_i(u - \varepsilon y)e^{-\varepsilon t} + b_1 ye^{-\varepsilon t}] =$$

$$= 2[a_i + \varepsilon]u + [b_1 - 2a_i\varepsilon - \varepsilon^2]y \leqslant 2\bar{a}_1 u + \bar{b}_1 y$$

(où il faut poser $i = 1$ si $u - \varepsilon y \geqslant 0$ et $i = 2$ si $u - \varepsilon y < 0$).

De même, on peut montrer que les autres inégalités (0.2.4) de mon travail [1], qui figurent dans la définition de l'hypothèse $\mathbf{V}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$, sont vérifiées.

Il est facile de voir que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on a $\bar{a}_1 < 0$ et $\bar{a}_1^2 + \bar{b}_1 < 0$ (et évidemment $\bar{a}_2 \leqslant \bar{a}_1$). De même, de la formule (1.4.3) de mon travail [1] (où Φ est donné par (1.4.1)) et qui est équivalente à (4) on voit que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors

$$\bar{b}_2 > B(\bar{a}_1, \bar{b}_1).$$

Du Théorème D1 déjà cité de mon travail [2] nous concluons que toutes les solutions de l'équation (7) tendent vers zéro. Vu (5) et (6) toutes les solutions de (1) tendent exponentiellement vers zéro.

3. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème R1. *Si l'équation* (1) *vérifie l'hypothèse* $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *et les conditions* (2), (3), (4), *il existe une constante* $\varepsilon_0 < 0$ *telle que toutes ses solutions sont* ε*-bornées pour* $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Remarquons que si la condition (3) n'était pas vérifiée, il suffirait de prendre un $a_1 < A < 0$ tel que $A^2 + b_1 < 0$. Si la condition $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ est vérifiée, la condition $\mathbf{V}(A, a_2, b_1, b_2)$ le sera aussi, mais (4) pourrait alors cesser d'être vraie.

4. De même, en partant du Théorème D2 (voir mon travail [2], p. 100) on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème R2. *Si l'équation* (1) *vérifie l'hypothèse* $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *et les conditions* $0 < a_2 \leqslant a_1$, (3), (4) *il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que ses solutions ne sont pas* ε*-bornées pour* $\varepsilon < \varepsilon_0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Tatarkiewicz, K., *Sur la résonance de seconde espèce*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, 3 (1959), p. 33-74.

[2] — *Sur les mouvements sous l'influence des forces élastiques généralisées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, 5 (1959), p. 87-114.

Streszczenie

W mej pracy *Sur la résonance de seconde espèce* (Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, 3 (1959), p. 33-74) zdefiniowałem funkcję B (patrz n° 1.5 str 51) oraz warunek $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ (patrz n° 0.2 str 36).

Opierając się na twierdzeniu D1 z mej pracy *Sur les mouvements sous l'influence des forces élastiques généralisées* (Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, 5 (1959), p. 87-114) udowadniam następujące — mocniejsze od niego — twierdzenie:

Twierdzenie R1. *Jeżeli równanie*

$$x'' = f(t, x, x')$$

spełnia warunek $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *oraz jeżeli jest*

$$a_2 \leqslant a_1 < 0, \qquad a_1^2 + b_1 < 0, \qquad B(a_1, b_1) < b_2,$$

to wtedy wszystkie jego rozwiązania zmierzają wykładniczo do zera.

Analogicznie twierdzenie (Twierdzenie R2) można udowodnić i dla wypadku $0 < a_2 \leqslant a_1$.

Резюме

В моей работе „*Sur la résonance de seconde espèce*" (Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, 5 (1959), p. 33-74) я определил функцию B (см. n° 1.5 стр. 51) и условие $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ (см. n° 0.2 стр. 36).

Опираясь на теорему D1 из моей работы „*Sur les mouvements sous l'influence des forces élastiques généralisées*" (Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, 5 (1959), p. 87-114) я доказываю следующую более сильную теорему, чем та:

Теорема P1. *Если уравнение*

$$x'' = f(t, x, x')$$

удовлетворяет условию $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *и если*

$$a_2 < a_1 < 0, \quad a_1^2 + b_1 < 0, \quad B(a_1, b_1) < b_2,$$

то все его решения стремятся экспоненциально к нулю.

Аналогичную теорему (Теорема P2) можно доказать и для случая $0 < a_2 \leqslant a_1$.