ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIV, 4 SECTIO A 1960

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr A. Bielecki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur les cordes qui partagent le périmètre d'un ovale dans un rapport donné

O cięciwach dzielących obwód owalu w danym stosunku

О хордах, делящих периметр овала в данном отношении

Dans le travail: „Sur les cordes qui partagent le périmètre d'un ovale en 2 parties égales" nous avons montré que le minimum de l'expression d/D, où d désigne la corde maxima qui partage le périmètre d'un ovale en deux parties égales et D son diamètre, est atteint pour le triangle isoscèle ABC, $[AC] = [BC]$, $[AB] > [AC]$ satisfaisant à la condition $2\sin^3\varphi + \sin\varphi = 1$, où $\sphericalangle ACB = 2\varphi$.

Dans le présent travail nous établissons des limitations inférieures du rapport d_k/D, où d_k désigne la corde maxima partageant le périmètre d'un ovale dans le rapport k et D son diamètre.

Les raisonnements que nous utiliserons dans la suite seront, en partie, analogues à ceux du travail [1], mais nous les exposerons en détail pour la commodité du lecteur.

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes:

$\langle AB\rangle$	segment de droite fermé, d'extrémités A et B;
$\langle A{*}B\rangle$	arc fermé d'extrémités A et B;
$\langle A{*}BCD{*}E{*}FG\rangle$	ligne formée des arcs $\langle A{*}B\rangle$, $\langle D{*}E\rangle$ et $\langle E{*}F\rangle$, et des segments de droite $\langle BC\rangle$, $\langle CD\rangle$ et $\langle FG\rangle$;
ABC	triangle de sommets A, B et C;
$[AB]$	longueur du segment $\langle AB\rangle$;
$[A{*}BC{*}DE]$	longueur de la ligne $\langle A{*}BC{*}DE\rangle$;

Avant d'établir les inégalités cherchées, nous allons prouver quelques lemmes.

Lemme 1. *Dans le triangle* ABC, *où* $[AC]=[BC]$, $[AB]>[AC]$, $[AB]/2[AC]<k$, *la corde maxima partageant le périmètre dans le rapport* k, *est* $\langle AF\rangle$, *où* $A\in\langle BC\rangle$ *et* $([AB]+[BF])/([FC]+[CA])=k$.

Démonstration. Soit $\langle A'F'\rangle$ une corde partageant le périmètre du triangle ABC dans le rapport k. Nous distinguerons deux cas:

a) Les extrémités de la corde $\langle A'F'\rangle$ appartiennent aux côtés $\langle AC\rangle$ et $\langle CB\rangle$, soit $A'\in\langle AC\rangle$, $F'\in\langle BC\rangle$.

Introduisons un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine O est le milieu du segment $\langle AB\rangle$, l'axe x ayant le sens de OB et l'axe y celui de OC et désignons par φ l'angle OCB. Soit $[AA']=b$, $[CF]=m$, $[AB]=2a$.

Considérons deux cas, suivant que $([A'A]+[AB]+[BF'])/([F'C]+[CA'])=k$ ou $([F'C]+[CA']/([A'A]+[AB]+[BF'])=k$.

Soit $([A'A]+[AB]+[BF'])/([F'C]+[CA'])=k<1$, alors

$$A':[b\cos(\pi/2-\varphi)-a,\ b\sin(\pi/2-\varphi)];$$

$$F':[(m+b)\sin\varphi,\ a\operatorname{ctg}\varphi-(m+b)\cos\varphi];$$

$$[A'F']^2=l(b)=[b\sin\varphi-(m+b)\sin\varphi-a]^2+(b\cos\varphi-a\operatorname{ctg}\varphi+m\cos\varphi+ \\ +b\cos\varphi)^2=(m\sin\varphi+a)^2+(2b\cos\varphi-a\operatorname{ctg}\varphi+m\cos\varphi)^2;$$

$$l'(b)=2(2b\cos\varphi-a\operatorname{ctg}\varphi+m\cos\varphi)2\cos\varphi;$$

$$m=[CF]=a(1-k+2\sin\varphi)/(1+k)\sin\varphi;$$

$$l'(0)=8a\cos^2\varphi(\sin\varphi-k)/(1+k)\sin\varphi.$$

Mais $[AB]/2[AC]=a/[AC]<k$, donc $\sin\varphi<k$ et $l'(0)<0$. Comme $l(0)=l([FB])$, il en résulte que la fonction $l(b)$ n'admet qu'un seul extremum, notamment un minimum, lorsque la corde $\langle A'F'\rangle$ est parallèle à la base $\langle AB\rangle$. Alors $[A'F']\leqslant[AF]$.

Soit maintenant $([A'C]+[CF'])/([A'A]+[AB]+[BF'])=k$. Alors les formules précédentes subsistent, à condition d'y remplacer m par $\overline{m}=[C\overline{F}]$, où $\overline{F}$ est un point satisfaisant à la condition $\overline{F}\in\langle CB\rangle$, $([AC]+[C\overline{F}])/([AB]+[B\overline{F}])=k$. Nous aurons donc:

$$l'(b)=2(2b\cos\varphi-a\operatorname{ctg}\varphi+\overline{m}\cos\varphi)2\cos\varphi$$

où

$$\overline{m}=[C\overline{F}]=a(2k\sin\varphi-1+k)/(1+k)\sin\varphi$$

$$l'(0)=4(\overline{m}-a/\sin\varphi)\cos^2\varphi=4a\cos^2\varphi(2k\sin\varphi-2)/\sin\varphi(1+k)<0.$$

Comme $l(0) = l([B\overline{F}])$, cette fonction admet un seul minimum, donc $[A'F'] \leqslant [A\overline{F}]$.

Si l'on désigne par P un point satisfaisant à la condition $[AB]+[BP] = [PC]+[CB]$, on constate aisément que $[PF] = [P\overline{F}]$. Comme $[BC] < [AB]$, il s'ensuit que $[AF] > [A\overline{F}]$.

Nous avons ainsi démontré que la corde maxima, partageant le périmètres du triangle ABC dans le rapport k et dont les extrémités appartiennent aux côtés $\langle AC\rangle$ et $\langle BC\rangle$, est la corde $\langle AF\rangle$ telle que $([AB]+[BF])/([FC]+[CA]) = k < 1$.

Passons au second cas:

b) Les extrémités de la corde $\langle A'F'\rangle$, qui partage le périmètre du triangle dans le rapport k, appartiennent aux côtés $\langle AB\rangle$ et $\langle BC\rangle$, soit $A' \in \langle AB\rangle$, $F' \in \langle BC\rangle$.

Dans le même système de coordonnées et avec les notations adoptées dans a) nous aurons, dans le cas où

$$([A'B]+[BF'])/([F'C]+[CA]+[AA']) = k < 1:$$

$$A':(b-a,\, 0);\quad F':[(m-b)\sin\varphi,\, a\operatorname{ctg}\varphi-(m-b)\cos\varphi];$$

$$[A'F']^2 = l(b) = [b-a-(m-b)\sin\varphi]^2+[a\operatorname{ctg}\varphi-(m-b)\cos\varphi]^2;$$

$$l'(b) = 2(b-a-m\sin\varphi+b\sin\varphi)(1+\sin\varphi)+ \\ +2(a\operatorname{ctg}\varphi-m\cos\varphi+b\cos\varphi)\cos\varphi;$$

$$l'(0) = 2a[-\sin\varphi+\cos 2\varphi-(1-k+2\sin\varphi)(1+\sin\varphi)/(1+k)]/\sin\varphi.$$

Mais, comme $\pi/6 < \varphi < \pi/2$, on a $\sin\varphi > \cos 2\varphi$ et $l'(0) < 0$. En outre on a $l(0)-l(m) = 2am(\sin\varphi-\cos 2\varphi)/\sin\varphi > 0$, donc $l(0) > l(m)$. Par conséquent la fonction $l(b)$ admet un seul minimum et $l(b) \leqslant l(0) = [AF]$.

Dans le cas où $([AA']+[AC]+[CF'])/([A'B]+[BF']) = k$ il n'y a qu'à remplacer dans les formules précédentes m par $\overline{m} = [A\overline{F}]$ et on obtient, d'une façon analogue $l(b) \leqslant [A\overline{F}] < [AF]$.

On a donc dans tous les cas $[A'F'] \leqslant [AF]$.

Lemme 2. *Parmi les triangles ABC, $[AC] = [BC]$, $[AB] = 2a > [BC]$, $a/[BC] < k$, de diamètre $[AB] = 2a$, a étant un nombre positif donné, il existe un et un seul triangle pour lequel la corde maxima* $\langle AF\rangle$ (lemme 1) *est la plus petite.*

D é m o n s t r a t i o n. Le système de coordonnées étant le même que dans le lemme 1, on a

$$A:(-a,\, 0);$$

$F:[a(2\sin\varphi+1-k)/(1+k),\ a\cos\varphi/\sin\varphi-a(2\sin\varphi+1-k)\cos\varphi/(1+k)\sin\varphi]$

$$[AF]^2 = l(\varphi) = a^2\{[(2\sin\varphi+2)/(1+k)]^2+$$
$$+[(2k\cos\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi)/(1+k)\sin\varphi]^2\};$$

$$l'(\varphi) = 4a^2\cos\varphi[(1+k)\sin^3\varphi+k\sin\varphi-k^2]/(1+k)^2\sin^3\varphi.$$

Le polynôme $y=(1+k)z^3+kz-k^2$ possède exactement une racine dans l'intervalle $[0,k]$. La fonction $l(\varphi)$ admet dans l'intervalle $[0,\arcsin k]$ exactement un minimum pour $\varphi=\varphi_0$, où φ_0 vérifie la condition

1) $$(1+k)\sin^3\varphi_0+k\sin\varphi_0-k^2=0.$$

Dans la suite de ce travail nous désignerons par $A_kB_kC_k$ le triangle isoscèle ABC, $[AC]=[BC]$, dont la base est $[AB]=2a$, et l'angle $\sphericalangle ACB/2$ satisfait à l'équation 1), par $\langle A_kF_k\rangle$ la corde maxima qui partage le périmètre dans le rapport k et enfin nous noterons β_k le nombre

$$\beta_k=[A_kF_k]/[A_kB_k]$$

$\langle A_kF_k\rangle$ est la plus petite des cordes maxima qui partagent les périmètres des triangles isoscèles ABC, $[AB]=2a$, $[AC]=[BC]$, dans le rapport k. Observons que $\langle A_kF_k\rangle$ est la plus petite des cordes satisfaisant à la condition $([AB]+[BF])/([FC]+[CB])=k$ pour tous les triangles ABC, $[AB]=[A_kB_k]$, $[AC]=[BC]$, tels que φ vérifie la condition $\sin\varphi<k$. En profitant de cette remarque nous établirons:

Lemme 3. *Soit un triangle ABC, $[AC]=[BC]$. Si une circonférence de centre A et de rayon $r=\beta_k[AB]$, coupe $\langle BC\rangle$ au point F', on a*

$$([AB]+[BF'])/([AC]+[CF']\geqslant k.$$

Démonstration. Considérons le triangle $A_kB_kC_k$. Traçons deux circonférences K_1 et K_2 de rayon $[A_kF_k]$ et de centres A_k et B_k respectivement. Soit $\langle C_kD_k\rangle$ la hauteur du triangle $A_kB_kC_k$. Sur la droite C_kD_k prenons un point C et supposons qu'il s'éloigne de A_kB_k à partir du point C_k. Les triangles A_kCB_k ainsi formés varieront d'une manière continue avec C. Soit F' le point d'intersection, le plus proche de la droite A_kB_k, de $\langle B_kC\rangle$ avec l'arc de la circonférence K_1, et désignons par F un point satisfaisant aux conditions $F\in\langle B_kC\rangle$, $([A_kB_k]+[B_kF])/([FC]+[CA_k])=$ $=k$. Evidemment $[A_kF]>[A_kF_k]$, donc le point F, se déplaçant d'une manière continue, se trouvera en dehors de l'arc de la circonférence K_1. L'inégalité $([A_kB_k]+[B_kF'])/([F'C]+[CA_k])>k$ a donc nécessairement lieu pour tous les triangles dont le côté $\langle A_kC\rangle$ coupe l'arc de la circonférence K_1 contenu entre les demi-droites D_kC_k et D_kB_k. La même inégalité a lieu lorsque le point C se rapproche de la base $\langle A_kB_k\rangle$.

Théorème 1. *Si un diamètre partage le périmètre d'un ovale plan quelconque dans un rapport qui ne surpasse pas k, on a $d_k/D \geqslant \beta_k$ où d_k est la corde maxima partageant le périmètre de l'ovale dans le rapport k, D est son diamètre et β_k est le nombre défini plus haut.*

Démonstration. Soit W un ovale de diamètre $[AB]$, dont le périmètre vérifie les hypothèses du théorème. Traçons deux circonférences K_A et K_B de centres A et B et de rayon $r = \beta_k[AB]$. Désignons par F' le point d'intersection de la circonférence K_A avec le contour de l'ovale, situé le plus près de la droite AB et du même côté de cette droite que la plus grande partie du contour de l'ovale. Soit, d'une façon analogue, F'' le point d'intersection de K_B avec le contour de l'ovale. Enfin désignons par C le point d'intersection des droites AF'' et BF' et supposons d'abord que ce point soit extérieur à l'ovale.

Pour établir notre théorème il suffit de prouver qu'un au moins des points U, V tels que $[A*B*U] = k[U*F''*A]$, $[B*A*V] = k[V*F'*B]$ appartient à l'arc $\langle F'*B\rangle$ ou bien à l'arc $\langle A*F''\rangle$ de l'ovale. Supposons donc que l'on ait simultanément

$$[A*B*F']/[A*F''*F'] < k \quad \text{et} \quad [B*A*F'']/[B*F'*F''] < k$$

c'est-à-dire

$$[A*B]+[B*F'] < k([A*F'']+[F''*F'])$$

$$[A*B]+[A*F''] < k([B*F']+[F''*F'])$$

En ajoutant membre à membre il vient

$$2[A*B]+[B*F']+[A*F''] < k([A*F'']+[B*F']+2[F''*F'])$$

ou encore

$$2[A*B]+[BF']+[B*F']-[BF']+[AF'']+[A*F'']-[AF''] <$$

$$< k([AF'']+[A*F'']-[AF'']+[BF']+[B*F']-[BF']+2[F''*F']).$$

Comme $k < 1$, on obtient

$$2[AB]+[BF']+[AF''] < k([AF'']+[BF']+2[F'C]+2[CF''])$$

et enfin

$$[ABF']+[BAF''] < k([ACF']+[BCF'']). \tag{2}$$

Par le milieu D du segment $\langle AB\rangle$ menons une droite l perpendiculaire à celui-ci et désignons par C' resp. C'' le point d'intersection de la droite BC resp. AC avec la droite l. Nous admettons que le point C est situé du même côté de la droite DC' que le point A.

Considérons les triangles isoscèles $AC'B$ et $AC''B$; moyennant le lemme 3 on obtient

$$[ABF''] \geqslant k[F''C''B]$$

$$[ABF'] \geqslant k[F'C'A]$$

et, en mettant ces expressions dans (2), on a

$$[AC'F'] + [BC''F''] < [ACF'] + [BCF'']$$

c'est-à-dire

$$[AC'] + [C'F'] + [BC''] + [C''F''] < [AC] + [CF'] + [BC] + [CF'']$$

d'où

$$[CC''] < [CC']$$

Mais dans le triangle $CC'C''$, on a $\sphericalangle C''C'C \geqslant \sphericalangle C'C''C$, et il y a contradiction.

Par conséquent, on doit avoir, par exemple $[A*B*F'']/[A*F''*F'] \geqslant k$ et le point U se trouvera sur l'arc $\langle F'*B\rangle$, donc en dehors de la circonférence K_A ou bien sur K_A. Par conséquent il existe une corde $\langle AU\rangle$ partageant le périmètre dans le rapport k et telle que $[AU] \geqslant \beta_k[AB]$; pour la corde maxima on aura donc aussi

$$d_k/D = d_k/[AB] \geqslant \beta_k.$$

Si le point C était situé à l'intérieur de l'ovale et si l'on avait $[A*B*F''*F'] < k[A*F']$ et $[B*A*F'*F''] < k[B*F'']$ alors, en ajoutant membre à membre, il en résulterait $2[A*B] + 2[F''*F'] < 0$ et il y aurait aussi contradiction. On devrait donc avoir, par exemple, $[A*B*F''*F']/[A*F''] \geqslant k$, par conséquent, il existe une corde AU telle que $[A*B*U]/[A*U] = k$ et que le point U est situé sur K_A ou bien en dehors de K_A, et par suite $[AU] \geqslant \beta_k[AB]$.

Afin de trouver une limitation de l'expression d_k/D pour tout ovale plan, nous partagerons l'ensemble de tous les ovales en classes. Dans ce but, nous introduisons la fonction

$$f_n(D, L, L_1) = (1/2)^{n+1}\{D[1-(2\beta_1)^{n+1}]/L(1-2\beta_1) + L_1/L\};$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

où D est le diamètre de l'ovale, L son périmètre, L_1 la longueur de $\langle L_1 \rangle$ la plus petite des parties du périmètre interceptées par le diamètre, enfin $\beta_1 = 0,8\ldots$ désigne la longueur de la corde maxima partageant le périmètre du triangle ABC, $[AB] = 1$, $[AC] = [BC]$, $\sphericalangle ACB = 2\varphi$, $2\sin^3\varphi + \sin\varphi = 1$ en deux parties égales.

Nous dirons qu'un ovale appartient à la classe $F_{n,k}$ si l'on a $f_n < k/(k+1)$, k étant fixé.

Cette définition montre que, si k est fixé, on peut trouver pour tout ovale déterminé un n tel que la condition $f_n < k/(k+1)$ soit remplie. Il en résulte que, k étant donné, tout ovale appartient à une classe. Ces classes ne sont pas disjointes.

Ceci admis, nous allons démontrer:

Théorème 2. *Si un ovale plan appartient à la classe $F_{n,k}$, on a $d_k/D > \beta_1^{n+1}$.*

Démonstration. Nous établirons d'abord le théorème pour $n = 1$. Soit W un ovale appartenant à la classe $F_{1,k}$ et $\langle AB \rangle$ son diamètre. Du côté du plus petit des arcs de l'ovale, interceptés sur le contour de l'ovale par le diamètre, menons une corde $\langle AP_1 \rangle$, $[AP_1] = \beta_1 D$, $P_1 \epsilon \langle L_1 \rangle$. Alors

$$(D + [B*P_1])/[P_1*A] \geqslant 1 \tag{3}$$

car, si l'on avait $(D + [B*P_1])/[P_1*A] = k_1 < 1$, la corde $\langle AP_1 \rangle$ partagerait le contour $\langle L_1 \rangle + \langle AB \rangle$ dans le rapport $k_1 < 1$, la démonstration du théorème 1 montre que l'on aurait alors $[AP_1]/D \geqslant \beta_{k_1} > \beta_1$ en contradiction avec l'hypothèse (l'inégalité $\beta_{k_1} > \beta_1$ résulte du fait que dans le triangle $A_{k_1}B_{k_1}C_{k_1}$, $[A_{k_1}B_{k_1}] = 2a$, dans lequel d_{k_1} est la corde maxima partageant le périmètre dans le rapport k_1, la corde maxima d_1' partageant le périmètre en deux parties égales est inférieure à d_{k_1}, et, puisque $d_1'/[A_{k_1}B_{k_1}] \geqslant \beta_1$, on a $\beta_{k_1} = d_{k_1}/[A_{k_1}B_{k_1}] > d_1'/[A_{k_1}B_{k_1}] \geqslant \beta_1$).

L'hypothèse $W \epsilon F_{1,k}$ peut s'écrire sous la forme $f_1 < k/(k+1)$ ou bien $\beta_1 D + (D + L_1)/2 < 2kL/(1+k)$.

Soit $[AP] = \max([AP], [P_1P'])$, où $\langle AP \rangle$ et $\langle P_1P' \rangle$ sont les cordes partageant le périmètre L dans le rapport k et situées, par rapport au point B, de l'autre côté de la droite AP_1. On a

$$[A*P]/(L - [A*P]) = k, \quad [A*P] = kL/(1+k)$$

(Si $P \epsilon \langle P_1*B \rangle$, on a $([AP_1] + [P_1*P])/[AB] + [B*P]) \leqslant 1$ ou bien $([AB] + [B*P])/([P_1*P] + [AP_1]) \leqslant 1$, et alors il vient toujours $[AP]/[AB] \geqslant \beta_1^2$, car, en vertu du théorème 1, on a $[AP]/[AB] = ([AP]/[AP_1])([AP_1]/$

$/[AB]) \geqslant \beta_1^2$ dans le premier cas, $[AP]/[AB] \geqslant \beta_1$ dans le second. Si $P \epsilon \langle L\rangle - \langle L_1\rangle$, il vient $L_1/(L-L_1) < k$ et on retombe sur le théorème 1).

Supposons donc que $P \epsilon \langle A*P_1\rangle$, alors

$$([AP_1]+[P_1*P])/[A*P] = ([AP_1]+[A*P_1]-[A*P])/[A*P] \leqslant$$
$$\leqslant [\beta_1 D + (D+L_1)/2 - kL/(1+k)](1+k)/kL < 1$$

ce qui résulte immédiatement de $W \epsilon F_{1,k}$. D'autre part, la limitation de $[A*P_1]$ utilisée dans la formule précédente est une conséquence de 3), notamment on a

$$(D+[B*P_1])/[P_1*A] = (D+L_1-[P_1*A])/[P_1*A] \geqslant 1$$

ou

$$[P_1*A] \leqslant (D+L_1)/2$$

donc, en appliquant le théorème 1 à l'ovale $\langle AP_1*P*A\rangle$, on obtient $[AP]/[AP_1] \geqslant \beta_1$ et par conséquent

$$[AP]/[AB] = ([AP]/[AP_1])([AP_1]/[AB]) \geqslant \beta_1^2$$

Nous allons maintenant établir le théorème pour tout $n \geqslant 2$. Remarquons que la condition $f_n < k/(1+k)$, qui intervient dans l'hypothèse du théorème 2, peut s'écrire sous la forme

$$\beta_1^n D + \beta_1^{n-1} D/2 + \ldots + \beta_1 D/2^{n-1} + D/2^n + L_1/2^n < 2kL/(1+k)$$

(en mettant en évidence $D/2^n$, on obtient entre parenthèses la somme d'une progression géométrique).

Par le point A menons les cordes $\langle AP_1\rangle, \langle AP_2\rangle, \ldots, \langle AP_n\rangle$

$$[AP_i] = \beta_1^i D, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

De même que dans le cas où $n = 1$ on trouve:

$$[AB]+[B*P_1] \geqslant [A*P_1]$$
$$[AP_1]+[P_1*P_2] \geqslant [A*P_2]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[AP_{n-1}]+[P_{n-1}*P\ ] \geqslant [A*P_n]$$

donc

$$[A*P_1] \leqslant [AB]+L_1-[A*P_1]$$
$$[A*P_2] \leqslant [AP_1]+[A*P_1]-[A*P_2]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[A*P_n] \leqslant [AP_{n-2}]+[A*P_{n-1}]-[A*P_n]$$

Supposons que la corde $\langle AP \rangle$ partage le périmètre de l'ovale dans le rapport k et qu'elle soit plus grande que la corde $\langle P_n\overline{P} \rangle$, construite d'une façon analogue. On a

$$[A{*}P]/(L-[A{*}P]) = k$$

donc

$$[A{*}P] = kL/(1+k)$$

Pour $([AP_n]+[P_n{*}P])/[A{*}P]$ on obtient la limitation suivante:

$$([AP_n]+[P_n{*}P])/[A{*}P] = ([AP_n]+[A{*}P_n]-[A{*}P])/[A{*}P] \leqslant$$
$$\leqslant \{[AP_n]+([AP_{n-1}]+[A{*}P_{n-2}])/2-[A{*}P]\}/[A{*}P] \leqslant$$
$$\leqslant ([AP_n]+[AP_{n-1}]/2+\ldots+[AP_1]/2^{n-1}+[AB]/2^n+L_1/2^n-$$
$$-[A{*}P])/[A{*}P] = \{\beta_1^n D+\beta_1^{n-1}D/2+\ldots+\beta_1 D/2^{n-1}+D/2^n+L_1/2^n-$$
$$-kL/(1+k)\}(1+k)/kL < [2kL(1+k)-kL(1+k)]/[kL/(1+k)] = 1$$

L'ovale $\langle AP_n{*}P{*}A \rangle$ satisfait donc aux conditions du théorème 1, par conséquent $[AP] \geqslant \beta_1[AP_n] = \beta_1^{n+1}D$ et le théorème se trouve ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radziszewski, K., *Sur les cordes qui partagent le périmètre d'un ovale en 2 parties égales*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, vol. 8, 6 (1954-1956) p. 93-96.

Streszczenie

Niech w trójkącie ABC będzie $AB = 1$, $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 2\varphi$, gdzie $2\sin^3\varphi+\sin\varphi = 1$. Oznaczymy przez β_1 długość największej cięciwy połowiącej obwód tego trójkąta (jednym z jej końców musi być A lub B). Rozpatrujemy klasę wszystkich owali płaskich o następujących własnościach: obwód owalu wynosi L i istnieje średnica owalu o długości D i o końcach dzielących jego obwód na dwa łuki, z których krótszy ma długość L_1. Dla każdej liczby $k\in(0, 1\rangle$ można dobrać taką liczbę naturalną n, by było

$$(1/2)^{n+1}\{D[1-(2\beta_1)^{n+1}]/L(1-2\beta_1)+L_1/L\} < k/(k+1)$$

Dla tak ustalonej liczby n dowolny owal rozważanej klasy ma jakąś cięciwę o długości $d_k > \beta_1^{n+1}D$, dzielącą jego obwód w stosunku k.

Jednakże pozostaje jeszcze otwarty problem dokładnego wyznaczenia, w rozważanej klasie owali, kresu dolnego maksymalnych wartości stosunku d_k/D dla poszczególnych owali.

Резюме

Пусть в треугольнике ABC $AB = 1$, $AC = BC$ и $\sphericalangle ACB = 2\varphi$, причем $2\sin^3\varphi + \sin\varphi = 1$. Обозначим через β_1 длину наибольшей хорды, делящей пополам периметр этого треугольника (одним из ее концов должно быть A или B). Рассматриваем класс всех плоских овалов, имеющих следующее свойство: периметр овала равен L, и существует диаметр овала длиною D с концами, делящими его периметр на две дуги, из которых более короткая имеет длину L_1. Для всякого числа $k \in (0, 1\rangle$ можно подобрать такое натуральное число n, чтобы было

$$(1/2)^{n+1}\{D[1-(2\beta_1)^{n+1}]/L(1+2\beta_1)+L_1/L\} < k/(k+1).$$

Для установленного таким образом числа n произвольный овал рассматриваемого класса имеет хорду длиною $d_k > \beta_1^{n+1} \cdot D$, делящую его периметр в отношении k.

Однако остается ещё открытой проблема: определить точно в рассматриваемом классе овалов нижний предел максимальных значений отношения d_k/D для конкретных овалов.