

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

WITOLD TYM

Cas singulier du problème de Goursat pour l'équation hyperbolique

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

Osobliwy przypadek problemu Goursata dla równania hiperbolicznego

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

Особый случай проблемы Гурса для гиперболического уравнения

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

Le problème de Goursat pour l'équation hyperbolique

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

consiste à déterminer une fonction $z(x, y)$ satisfaisant à l'équation (1) et admettant des valeurs données à l'avance le long de deux courbes $\Gamma_x: y = g(x)$ et $\Gamma_y: x = h(y)$, issues d'un point du plan xy et n'ayant aucun autre point commun. A. Bielecki et J. Kiszyński [1] ont étudié le problème de Goursat pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y)$, dans le cas où ces courbes ont au point commun une tangente commune. La plupart des résultats qu'ils ont obtenus ont été étendus par J. Kiszyński [2] à l'équation générale (1). Dans ce travail, nous étudions les cas particulièrement pénible, laissé de côté dans le travail [2], où les courbes Γ_x et Γ_y sont tangentes en leur point commun à la même caractéristique de l'équation (1); dans nos raisonnements nous suivrons les méthodes appliquées dans les travaux [1] et [2].

1. Énoncés des théorèmes.

Admettons les hypothèses suivantes:

(H₁) Les fonctions $y = g(x)$ et $x = h(y)$ sont continues et non décroissantes dans les intervalles $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$ respectivement et elles

y vérifient les inégalités $0 \leq g(x) \leq b$ et $0 \leq h(y) \leq a$. Les courbes Γ_x et Γ_y , graphiques des fonctions $y = g(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle 0, b \rangle$, n'ont, à l'exception du point $(0, 0)$, aucun point commun.

(H_2) La fonction $y = g(x)$, définie dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$, admet une dérivée $g'(x)$ continue, tandis que $x = h(y)$, définie dans l'intervalle $\langle 0, b \rangle$, admet une dérivée $h'(y)$ continue dans l'intervalle $(0, b)$, et $\lim_{y \rightarrow 0^+} y h'(y) = 0$.

Des hypothèses (H_1) il s'ensuit que si $y \in (0, b)$ et $x = h(y)$, on a $y > g(x)$, et d'une façon analogue, si $x \in (0, a)$ et $y = g(x)$, on a $x > h(y)$.

Définissons par récurrence, pour $x \in \langle 0, a \rangle$ et $y \in \langle 0, b \rangle$ respectivement, deux suites de fonctions

$$\begin{aligned} \lambda^0(x) &= x, & \lambda^i(x) &= h(g(\lambda^{i-1}(x))), & i &= 1, 2, \dots, \\ \mu^0(y) &= y, & \mu^i(y) &= g(h(\mu^{i-1}(y))), & i &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si les fonctions $y = g(x)$ et $x = h(y)$ vérifient les hypothèses (H_1), toutes les fonctions $\lambda^i(x)$ et $\mu^i(y)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ sont continues dans leurs intervalles de définition, forment des suites décroissantes de fonctions pour $x \neq 0 \neq y$ et satisfont aux égalités $\lambda^i(0) = 0 = \mu^i(0)$, $i = 0, 1, \dots$ (cf. [1], § 2). Si, en plus, les hypothèses (H_2) sont vérifiées on montre aisément que les dérivées $d\lambda^i(x)/dx$ et $d\mu^i(y)/dy$, $i = 0, 1, 2, \dots$ sont définies et continues dans les intervalles demi-ouverts $(0, a)$ et $(0, b)$.

Comme le montrent les exemples donnés dans le travail [1], p. 108, les hypothèses (H_1) et (H_2) ne sont pas encore suffisantes pour assurer l'existence de solutions du problème G_0 (que nous allons formuler dans un instant), même pour les équations (1) du type le plus simple. C'est pourquoi nous admettrons encore les hypothèses suivantes.

(H_3) Les fonctions $d\lambda^i(x)/dx$ et $d\mu^i(y)/dy$, $i = 0, 1, \dots$ sont bornées dans leur ensemble pour $x \in (0, a)$ et $y \in (0, b)$ respectivement.

(H_4) La fonction $\chi(x, y)$ est continue dans l'ensemble

$$A = \{(x, y) : g(x) \leq y \leq b, h(y) \leq x \leq a\}$$

et elle y a les dérivées partielles du premier ordre uniformément continues satisfaisant aux conditions de Lipschitz

$$|\chi_x(x, y) - \chi_x(x, y')| \leq A|y - y'|, \quad |\chi_y(x, y) - \chi_y(x', y)| \leq A|x - x'|,$$

où A est une constante positive arbitraire.

La fonction $z(x, y)$ sera dite de classe C^* dans l'ensemble A , si elle est continue dans cet ensemble et si elle possède les dérivées partielles $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$ uniformément continues dans l'intérieur de A .

Problème G_0 . Soient les fonctions $y = g(x)$, $x = h(y)$ et $\chi(x, y)$ vérifiant les hypothèses $(H_1) - (H_4)$, et la fonction $f(x, y, z, p, q)$ continue dans l'ensemble

$$\Pi = \{(x, y, z, p, q) : (x, y) \in \Delta, -\infty < z, p, q < +\infty\}.$$

On demande s'il existe une fonction $z(x, y)$ (dite la solution du problème G_0) de classe C^* dans Δ , unique ou non, qui vérifie dans l'intérieur de Δ l'équation (1) et qui satisfait aux conditions

$$(2) \quad \begin{aligned} z(x, g(x)) &= \chi(x, g(x)) && \text{pour } x \in \langle 0, a \rangle, \\ z(h(y), y) &= \chi(h(y), y) && \text{pour } y \in \langle 0, b \rangle. \end{aligned}$$

La solution du problème est donnée par les deux théorèmes suivantes.

Théorème 1. Supposons les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ vérifiées et admettons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait aux inégalités

$$(3) \quad |f(x, y, z, 0, 0)| \leq A + B|z| \quad \text{pour } (x, y) \in \Delta \text{ et } -\infty < z < +\infty$$

et

$$(4) \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, p', q')| \leq \omega(|p - p'|) + N|q - q'|$$

pour $(x, y, z, p, q) \in \Pi$ et $(x, y, z, p', q') \in \Pi$, où A, B et N sont des constantes positives arbitraires et $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, \infty \rangle$ telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et que

$$(5) \quad \int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{pour tout } \delta > 0.$$

Dans ces conditions il existe une solution du problème G_0 .

Théorème 2. Si les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont vérifiées et si la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à l'inégalité

$$(6) \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z', p', q')| \leq \omega(|z - z'| + |p - p'|) + N|q - q'|$$

pour $(x, y, z, p, q) \in \Pi$ et $(x, y, z', p', q') \in \Pi$, où N est une constante positive arbitraire, et la fonction $\omega(\delta)$ a les mêmes propriétés que précédemment, il existe exactement une solution du problème G_0 .

Effectivement intéressant est ce cas du problème G_0 où la fonction $y = g(x)$ ne s'annule que pour $x = 0$. Dans le cas où il existe un $x^* > 0$ tel que pour $x \in \langle 0, x^* \rangle$ on a $g(x) = 0$, le problème de Goursat se ramène au problème de Picard, qui a été considéré dans le travail [4]. C'est pourquoi nous admettrons dans la suite une hypothèse supplémentaire: (H_5) La fonction $y = g(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$ ne s'annule que pour $x = 0$.

2. Réduction du problème G_0 .

Soit $s(x, y)$ une fonction arbitraire continue dans l'ensemble Δ . Posons

$$(7) \quad \Theta_s(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int_{x_{i+1}}^{x_i} \int_{y_{i+1}}^{y_i} s(u, v) dv du,$$

où $x_{2i} = \lambda^i(x)$, $y_{2i} = \mu^i(y)$, $x_{2i+1} = h(\mu^i(y))$, $y_{2i+1} = g(\lambda^i(x))$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Comme il résulte de la seconde partie du théorème 4 du travail [1], la fonction $z(x, y) = \Theta_s(x, y)$ est la solution du problème de Goursat relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = s(x, y)$ satisfaisant à la condition $z(x, g(x)) = 0 = z(h(y), y)$ et, par conséquent, les dérivées partielles $\partial \Theta_s / \partial x$ pour $(x, y) \in \Delta$ et $\partial \Theta_s / \partial y$ pour $(x, y) \in \Delta$, $y > 0$, peuvent être obtenues en dérivant terme à terme la série (7).

De même que le cas plus régulier du problème de Goursat, étudié dans le travail [2], le problème G_0 est ramené, au moyen du théorème 4 du travail [1], au problème de l'existence et de l'unicité des solutions, en termes de fonctions $s(x, y)$ continues dans l'ensemble Δ , de l'équation

$$s(x, y) = f^*(x, y, \Theta_s(x, y), \partial \Theta_s(x, y) / \partial x, \partial \Theta_s(x, y) / \partial y),$$

où $f^*(x, y, z, p, q)$ est une fonction continue dans l'ensemble Π et vérifiant les hypothèses qui ont été faites sur la fonction $f(x, y, z, p, q)$ dans les énoncés des théorèmes 1 et 2. C'est pourquoi nous omettrons, dans la suite, l'astérisque du symbole f^* et nous étudierons l'équation

$$(8) \quad s(x, y) = f(x, y, \Theta_s(x, y), \partial \Theta_s(x, y) / \partial x, \partial \Theta_s(x, y) / \partial y).$$

Pour établir le théorème 1 il suffit donc de prouver que dans les hypothèses $(H_1) - (H_5)$, (3) et (4) l'équation (8) admet une solution $s(x, y)$ continue dans Δ . Le théorème 2 sera démontré si l'on prouve que l'équation (8) admet exactement une telle solution si la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait dans l'ensemble Π à la condition (6).

3. Propriétés des fonctions $\Theta_s(x, y)$.

Soit L un nombre positif, dont l'existence est assurée par les hypothèses (H_2) et (H_3) , limitant supérieurement les fonctions $d\lambda^i(x)/dx$, $d\mu^i(y)/dy$, $dy(\lambda^i(x))/dx$, $i = 0, 1, 2, \dots$, pour $x \in (0, a)$ ou $y \in (0, b)$.

Lemme 1. Si $s_1(x, y)$ et $s_2(x, y)$ sont des fonctions continues dans l'ensemble Δ et $\varrho(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\},$$

définié par la formule

$$\varrho(x, y) = \max |s_1(u, v) - s_2(u, v)| \text{ pour } (x, v) \in \Delta_{xy},$$

où

$$\Delta_{xy} = \{(u, v) : h(v) \leq u \leq x, g(u) \leq v \leq y\},$$

on a

$$|\Theta_{s_1}(x, y) - \Theta_{s_2}(x, y)| \leq \frac{x}{2} \int_0^y \varrho(x, v) dv + \frac{y}{2} \int_0^x \varrho(u, y) du,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_1}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_2}(x, y) \right| \leq L \int_0^y \varrho(x, v) dv + L \int_0^x \varrho(u, y) du,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_1}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_2}(x, y) \right| \leq L \int_0^x \varrho(u, y) du + L \cdot h'(y) \int_0^y \varrho(x, v) dv.$$

Démonstration. Tenant compte de la seconde partie du théorème 4 du travail [1], p. 116, on peut démontrer les deux premières inégalités de même que celles du lemme 1 du travail [2], p. 85. Conformément au théorème 4 du travail [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y) &= \int_{h(y)}^x s(u, y) du + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \mu^{i+1}(y) \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} s(u, \mu^{i+1}(y)) du + \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} h(\mu_i(y)) \right) \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} s(h(\mu_i(y)), v) dv, \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in \Delta$, $y > 0$. Etant donné que les suites de fonctions $\{\mu^i(y)\}$ et $\{h(\mu^i(y))\}$ sont décroissantes, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_1}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_2}(x, y) \right| &\leq \int_{h(y)}^x \varrho(u, y) du + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \mu^{i+1}(y) \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} \varrho(u, \mu^{i+1}(y)) du + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} h(\mu^i(y)) \right) \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} \varrho(h(\mu^i(y)), v) dv \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{h(y)}^x \varrho(u, y) du + L \sum_{i=0}^{\infty} \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} \varrho(u, y) du + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \lambda^i(h(y)) \right) \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} \varrho(x, v) dv \leq \\
&\leq L \int_0^x \varrho(u, y) du + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d\lambda^i}{dx}(h(y)) \right) \cdot h'(y) \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} \varrho(x, v) dv \leq \\
&\leq L \int_0^x \varrho(u, y) du + L \cdot h'(y) \int_0^y \varrho(x, v) dv,
\end{aligned}$$

et la troisième inégalité est vérifiée pour $(x, y) \in \Delta$, $y > 0$. Pour $y = 0$ nous le obtenons en considération de la continuité.

Ce lemme entraîne comme simples conséquences les deux premières inégalités du lemme 2:

Lemme 2. Soit $\eta > 0$. Supposons que l'on ait $yh'(y) \leq a$ pour $0 \leq y \leq \eta$ et $h'(y) \leq K$ pour $\eta \leq y \leq b$, où a et K sont des nombres positifs.

Si $|s(x, y)| \leq \lambda e^{\lambda(x+y)}$, $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}
|\Theta_s(x, y)| &\leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(x+y)}, & \left| \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y) \right| &\leq 2Le^{\lambda(x+y)}, \\
\left| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y) \right| &\leq L(1 + K + \lambda a) e^{\lambda(x+y)}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité se démontre (en utilisant aussi le lemme 1) de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y) \right| &\leq L \int_0^x \lambda e^{\lambda(u+y)} du + Lh'(y) \int_0^y \lambda e^{\lambda(x+v)} dv \leq \\
&\leq Le^{\lambda(x+y)} + L(\max_{\eta < y < b} h'(y)) e^{\lambda(x+y)} + L(\max_{0 < y < \eta} yh'(y)) \lambda e^{\lambda(x+y)} \leq \\
&\leq L(1 + K + a\lambda) e^{\lambda(x+y)}.
\end{aligned}$$

Lemme 3. Pour tout nombre positif M il existe une fonction continue $\varepsilon_M(\delta)$ définie pour $\delta \geq 0$, vérifiant les conditions

$$\varepsilon_M(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_M(\delta_1 + \delta_2) \leq \varepsilon_M(\delta_1) + \varepsilon_M(\delta_2)$$

telle que si $s(x, y)$ est une fonction continue dans l'ensemble Δ et y satisfait à l'inégalité $|s(x, y)| \leq M$, on a

$$|\Theta_s(x, y) - \Theta_s(x', y')| \leq \varepsilon_M(\delta) \quad \text{pour } |x - x'| + |y - y'| \leq \delta.$$

L'énoncé et preuve de ce lemme sont identiques à ceux du lemme 4 du travail [2].

Lemme 4. Soit $\varkappa(\delta)$ le maximum de $|h(y) - h(y')|$ pour $|y - y'| \leq \delta$ et soit $\varepsilon(x, y, \delta)$ une fonction définie pour $(x, y) \in D$ et $\delta \geq 0$, continue par rapport à $(x, y) \in D$, non décroissante par rapport à chacun des arguments. Pour tout nombre positif M il existe des fonctions $\varepsilon_M^i(\delta)$, $i = 1, 2$, continues pour $\delta \geq 0$ et satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_M^i(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_M^i(\delta_1 + \delta_2) \leq \varepsilon_M^i(\delta_1) + \varepsilon_M^i(\delta_2), \quad i = 1, 2,$$

telles que si $s(x, y)$ est une fonction continue dans l'ensemble Δ et vérifiant les inégalités

$$|s(x, y)| \leq M \quad \text{et} \quad |s(x, y) - s(x', y')| \leq \varepsilon(x, y, |x - x'| + |y - y'|),$$

on a les inégalités

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Theta_s}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \Theta_s}{\partial y}(x', y') \right| &\leq \varepsilon_M^1(\delta) + L \int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + \\ &\quad + Lh'(y) \int_0^y \varepsilon(x, v, \varkappa(L\delta)) dv, \\ \left| \frac{\partial \Theta_s}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \Theta_s}{\partial x}(x', y') \right| &\leq \varepsilon_M^2(\delta) + L \int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + \\ &\quad + L \int_0^y \varepsilon(x, v, L\delta) dv, \end{aligned}$$

pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$, $(x, y) \in \Delta$ et $(x', y') \in \Delta$.

Démonstration. Nous nous bornerons à démontrer l'existence de la fonction $\varepsilon_M^1(\delta)$. Pour la fonction $\varepsilon_M^2(\delta)$ la preuve est analogue et plus facile.

Introduisons les notations:

$$\begin{aligned} \Sigma_s^1(y, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \mu^{i+1}(y) \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} s(u, \mu^{i+1}(t)) du, \\ \Sigma_s^2(y, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} h(\mu^i(y)) \right) \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} s(h(\mu^i(t)), v) dv. \end{aligned}$$

Nous prouverons d'abord que pour les fonctions $s(x, y)$ bornées dans leur ensemble les fonctions $\Sigma_s^1(y, t)$ et $\Sigma_s^2(y, t)$ sont équi-continues par rapport à y uniformément par rapport à $t \in \langle 0, b \rangle$.

Fixons un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Soit n_0 un nombre naturel dont l'existence est assurée par les hypothèses (H_1) , tel que $h(\mu^{n_0}(y)) \leq \varepsilon/4ML$ pour $y \in \langle 0, b \rangle$. Pour $|s(x, y)| \leq M$ nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y) \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} s(u, \mu^{i+1}(t)) du - \left(\frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y') \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y'))}^{h(\mu^i(y'))} s(u, \mu^{i+1}(t)) du \right| \leq \\ & \leq \left(\frac{d}{dy} \mu^{i+1}(y) \right) \left| \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} s(u, \mu^{i+1}(t)) du - \int_{h(\mu^{i+1}(y'))}^{h(\mu^i(y'))} s(u, \mu^{i+1}(t)) du \right| + \\ & + \left| \frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y) - \frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y') \right| \cdot \int_{h(\mu^{i+1}(y'))}^{h(\mu^i(y'))} |s(u, \mu^{i+1}(t))| du \leq \\ & \leq LM \{ |h(\mu^i(y)) - h(\mu^i(y'))| + |h(\mu^{i+1}(y')) - h(\mu^{i+1}(y))| \} + \\ & + M \left| \frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y) - \frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y') \right| \cdot |h(\mu^i(y')) - h(\mu^{i+1}(y'))| = \\ & = LM \{ |\lambda^i(h(y)) - \lambda^i(h(y'))| + |\lambda^{i+1}(h(y')) - \lambda^{i+1}(h(y))| \} + \\ & + M \left(\left| \frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y) \right| + \left| \frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y') \right| \right) \cdot |h(\mu^i(y')) - h(\mu^{i+1}(y'))| \leq \\ & \leq 2L^2M |h(y) - h(y')| + 4MLh(y'). \end{aligned}$$

A cause de la continuité des fonctions $\alpha(\delta)$, $\delta \geq 0$ et $h(y)$ pour $0 \leq y \leq b$, on peut trouver un $\delta_0 > 0$ tel que l'on ait $2L^2Mn_0\alpha(2\delta_0) \leq \varepsilon/4$, $4MLn_0h(2\delta_0) \leq \varepsilon/4$. Pour $y, y' \leq 2\delta_0$ nous aurons donc

$$\begin{aligned} |\Sigma_s^1(y, t) - \Sigma_s^1(y', t)| & \leq 2L^2Mn_0\alpha(|y - y'|) + 4MLn_0h(y') + \\ & + \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y) \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} |s(u, \mu^{i+1}(t))| du + \\ & + \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y') \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y'))}^{h(\mu^i(y'))} |s(u, \mu^{i+1}(t))| du \leq \\ & \leq \frac{1}{2}\varepsilon + LMh(\mu^{n_0}(y)) + LMh(\mu^{n_0}(y')) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part, si y et y' sont contenus dans l'intervalle $\langle \delta_0, b \rangle$, il existe, à cause de la continuité de la fonction $d\mu^{i+1}(y)/dy$ dans cet intervalle, un $\delta_1 > 0$ tel que l'on aura pour $|y - y'| \leq \delta_1$

$$2L^2 M n_0 \kappa(\delta_1) \leq \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n_0-1} 2Ma\mathfrak{M}_{i+1} \leq \varepsilon/4,$$

où \mathfrak{M}_i désigne le maximum de la fonction $|d\mu^i(y)/dy - d\mu^i(y')/dy'|$ pour $\delta_0 \leq y, y' \leq b$. Il s'ensuit donc que l'on a, pour $y, y' \geq \delta_0$ et $|y - y'| \leq \delta_1$,

$$\begin{aligned} |\Sigma_s^1(y, t) - \Sigma_s^1(y', t)| &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \mu^{i+1}(y) \right)_{h(\mu^{i+1}(y))} \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} |s(u, \mu^{i+1}(t))| du + \\ &+ \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\frac{d\mu^{i+1}}{dy}(y') \right)_{h(\mu^{i+1}(y'))} \int_{h(\mu^{i+1}(y'))}^{h(\mu^i(y'))} |s(u, \mu^{i+1}(t))| du \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Mais si $|y - y'| \leq \delta = \min(\delta_0, \delta_1)$, on a toujours ou bien $y, y' \geq \delta$, ou bien $y, y' \leq 2\delta$, donc $|\Sigma_s^1(y, t) - \Sigma_s^1(y', t)| \leq \varepsilon$ pour $|y - y'| \leq \delta$ et $t \in \langle 0, b \rangle$, ce qui prouve que les fonctions $\Sigma_s^1(y, t)$ sont équicontinues par rapport à y si les fonctions $s(x, y)$ sont bornées dans leur ensemble.

Nous montrerons maintenant que les fonctions $\Sigma_s^2(y, t)$ jouissent de la même propriété. Observons que

$$\Sigma_s^2(y, t) = h'(y) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d\lambda^i}{dx}(h(y)) \right)_{\mu^{i+1}(y)} \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} s(h(\mu^i(t)), v) dv.$$

Les fonctions

$$\Sigma_s^3(y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d\lambda^i}{dx}(h(y)) \right)_{\mu^{i+1}(y)} \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} s(h(\mu^i(t)), v) dv$$

satisfont à l'inégalité $|\Sigma_s^3(y, t)| \leq LM y$ et sont équicontinues par rapport à y si les fonctions $s(x, y)$ sont bornées dans leur ensemble (on le démontre de la façon analogue que dans le cas des fonctions $\Sigma_s^1(y, t)$).

En vertu de l'hypothèse (H_2) il existe un nombre $\eta_0 > 0$ tel que $y h'(y) \leq \varepsilon/2ML$ pour $y \leq 2\eta_0$. On a donc, pour $y, y' \leq 2\eta_0$,

$$|\Sigma_s^2(y, t) - \Sigma_s^2(y', t)| \leq MLy h'(y) + MLy' h'(y') \leq \varepsilon.$$

Comme la fonction $h'(y)$ est continue dans l'intervalle $\langle \eta_0, b \rangle$ et les fonctions $\Sigma_s^3(y, t)$ sont équicontinues par rapport à y , il existe un nombre $\eta_1 > 0$ tel que l'on a, pour $|y - y'| \leq \eta_1$ et $t \in \langle 0, b \rangle$,

$$\left(\max_{\eta_0 < y < b} h'(y) \right) |\Sigma_s^3(y, t) - \Sigma_s^3(y', t)| \leq \varepsilon/2, \quad LMa |h'(y) - h'(y')| \leq \varepsilon/2.$$

Il s'ensuit donc que l'on a, pour $y, y' \geq \eta_0$ et $|y - y'| \leq \eta_1$,

$$|\Sigma_s^2(y, t) - \Sigma_s^2(y', t)| \leq \left(\max_{\eta_0 < y < b} h'(y) \right) |\Sigma_s^3(y, t) - \Sigma_s^3(y', t)| + \\ + LMa|h'(y) - h'(y')| \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne, pour $|y - y'| \leq \eta = \min(\eta_0, \eta_1)$ et $t \in \langle 0, b \rangle$, l'inégalité $|\Sigma_s^2(y, t) - \Sigma_s^2(y', t)| \leq \varepsilon$, donc, si les fonctions $s(x, y)$ sont bornées dans leur ensemble, les fonctions $\Sigma_s^2(y, t)$ sont équicontinues par rapport à y dans l'intervalle $\langle 0, b \rangle$.

En s'appuyant sur la formule $\frac{d}{dy} h(\mu^i(y)) = \frac{d\lambda^i}{dx}(h(y)) \cdot h'(y)$ et sur l'égalité

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \Theta_s}{\partial y}(x', y') = \int_{h(y)}^x [s(u, y) - s(u, y')] du + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \mu^{i+1}(y) \right) \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} [s(u, \mu^{i+1}(y)) - s(u, \mu^{i+1}(y'))] du + \\ - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} h(\mu^i(y)) \right) \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} [s(h(\mu^i(y)), v) - s(h(\mu^i(y')), v)] dv + \\ + \int_{h(y)}^{h(y')} s(u, y') du + \int_{x'}^x s(u, y') du + \\ + \Sigma_s^1(y, y') - \Sigma_s^1(y', y') + \Sigma_s^2(y', y') - \Sigma_s^2(y, y'),$$

et en tenant compte du fait que la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ et la suite $\{\mu^i(y)\}$, $i = 0, 1, \dots$, sont monotones, on obtient l'inégalité

$$\left| \frac{\partial \Theta_s}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \Theta_s}{\partial y}(x', y') \right| \leq L \int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + Lh'(y) \int_0^y \varepsilon(x, v, \kappa(L\delta)) dv + \\ + M|h(y) - h(y')| + M|x - x'| + |\Sigma_s^1(y, y') - \Sigma_s^1(y', y')| + |\Sigma_s^2(y, y') - \Sigma_s^2(y', y')|,$$

d'où l'on voit que la fonction

$$\varepsilon_M^1(\delta) = M(\kappa(\delta) + \delta) + \sum_{i=1}^2 \sup |\Sigma_s^i(y, y') - \Sigma_s^i(y', y')|$$

où on prend le supremum pour $y, y' \in \langle 0, b \rangle$, $|y - y'| \leq \delta$ et pour toutes les fonctions $s(x, y)$ continues dans Δ et satisfaisant dans cet ensemble à l'inégalité $|s(x, y)| \leq M$, vérifie bien la conclusion du lemme.

4. Une équation fonctionnelle⁽¹⁾.

Lemme 5. *Supposons que*

- 1° la fonction $\omega^*(\delta)$ définie, continue, non décroissante et bornée pour $\delta \geq 0$, vérifie les conditions suivantes: $\omega^*(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$, $\omega^*(0) = 0$, $\omega^*(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega^*(\delta_1) + \omega^*(\delta_2)$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega^*(u)} = +\infty \quad \text{pour } \delta > 0,$$

- 2° la fonction $\Omega(\delta)$ est définie, continue, non décroissante et bornée pour $\delta \geq 0$ et $\Omega(0) = 0$,

- 3° la fonction $\nu(\delta)$ est définie, non décroissante et continue pour $\delta \geq 0$ et l'on a $\nu(0) = 0$ et $\nu(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$.

Dans ces conditions il existe une fonction non négative $\varepsilon(x, y, \delta)$, définie pour $(x, y) \in D = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ et $\delta \geq 0$ telle que

- (i) pour tout $\delta \geq 0$ fixé, la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ est continue du point $(x, y) \in \Delta$, non décroissante par rapport à chacun des arguments x et y ,
(ii) la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ est non décroissante par rapport à $\delta \geq 0$,
(iii) si $\varepsilon^*(\delta) = \max \varepsilon(x, y, \delta)$ pour $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$, on a $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \varepsilon^*(\delta) = 0$,
(iv) la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ vérifie dans le rectangle D l'équation

$$(9) \quad \varepsilon(x, y, \delta) = \frac{1}{2} \varepsilon(x, y, \nu(\delta)) + \\ + \omega^* \left(\int_0^x \varepsilon(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon(x, v, \nu(\delta)) dv \right) + \Omega(\delta).$$

Démonstration. Posons

$$m = \max(\sup \omega^*(\delta), \sup \Omega(\delta))$$

et formons par récurrence la suite de fonctions $\{\varepsilon_n(x, y, \delta)\}$, en admettant

$$(10) \quad \varepsilon_0(x, y, \delta) = 4m, \\ \varepsilon_n(x, y, \delta) = \frac{1}{2} \varepsilon_{n-1}(x, y, \nu(\delta)) + \\ + \omega^* \left(\int_0^x \varepsilon_{n-1}(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon_{n-1}(x, v, \nu(\delta)) dv \right) + \Omega(\delta)$$

⁽¹⁾ Cf. [3], lemme 1.

pour $n = 1, 2, \dots$, $(x, y) \in D$, $\delta \geq 0$. En s'appuyant sur la fait que les fonctions $\Omega(\delta)$, $\omega^*(\delta)$ et $\nu(\delta)$ sont monotones, on peut établir par induction les inégalités suivantes, pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$(11) \quad 0 \leq \varepsilon_n(x, y, \delta) \leq \varepsilon_{n-1}(x, y, \delta) \leq 4m,$$

$$(12) \quad \varepsilon_n(x, y, \delta'') \geq \varepsilon_n(x, y, \delta') \quad \text{pour} \quad \delta'' \geq \delta' \geq 0,$$

$$(13) \quad \varepsilon_n(x'', y, \delta) \geq \varepsilon_n(x', y, \delta) \quad \text{pour} \quad a \geq x'' \geq x' \geq 0,$$

$$\varepsilon_n(x, y'', \delta) \geq \varepsilon_n(x, y', \delta) \quad \text{pour} \quad b \geq y'' \geq y' \geq 0.$$

Nous prouverons maintenant que les fonctions de la suite $\{\varepsilon_n(x, y, \delta)\}$ sont équicontinues par rapport à $(x, y) \in A$ (il suffit, pour cela, démontrer qu'elles ont le même module de continuité). Supposons que la fonction $e(u, \eta)$, définie pour $u \geq 0$ et $\eta \geq 0$, soit une solution de l'équation

$$e(u, \eta) = 2\omega^* \left(\int_0^u e(t, \eta) dt \right) + 2\omega^*(4m\eta).$$

Cette fonction, comme il résulte de l'hypothèse 1°, est univoquement définie et continue par rapport à u et η et on a $e(u, 0) \equiv 0$. Nous prouverons par récurrence que l'on a, pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(14) \quad |\varepsilon_n(x, y, \delta) - \varepsilon_n(x', y', \delta)| \leq e(y, |x - x'|) + e(x', |y - y'|).$$

Pour $n = 0$ cette inégalité est évidente. En admettant qu'elle a lieu pour $n = k$ et en s'appuyant sur l'inégalité

$$|\omega^*(\delta_1) - \omega^*(\delta_2)| \leq \omega^*(|\delta_1 - \delta_2|),$$

qui est bien vraie dans nos hypothèses, nous aurons

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}(x, y, \delta) - \varepsilon_{k+1}(x', y, \delta)| &\leq \frac{1}{2} |\varepsilon_k(x, y, \nu(\delta)) - \varepsilon_k(x', y, \nu(\delta))| + \\ &+ \left| \omega^* \left(\int_0^x \varepsilon_k(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon_k(x, v, \nu(\delta)) dv \right) + \right. \\ &\left. - \omega^* \left(\int_0^{x'} \varepsilon_k(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon_k(x', v, \nu(\delta)) dv \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} e(y, |x - x'|) + \omega^* \left(\int_0^y e(v, |x - x'|) dv \right) + \omega^*(4m|x - x'|) = e(y, |x - x'|) \end{aligned}$$

et de même $|\varepsilon_{k+1}(x', y, \delta) - \varepsilon_{k+1}(x', y', \delta)| \leq e(x', |y - y'|)$, l'inégalité (14) se trouve donc aussi vérifiée pour $n = k + 1$, d'où il résulte que les fonctions $\varepsilon_n(x, y, \delta)$ sont équicontinues par rapport à $(x, y) \in D$.

A cause de l'inégalité (11) la suite $\{\varepsilon_n(x, y, \delta)\}$ converge vers une fonction non négative. Soit

$$\varepsilon(x, y, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x, y, \delta).$$

On aura évidemment

$$(15) \quad |\varepsilon(x, y, \delta) - \varepsilon(x', y', \delta)| \leq e(y, |x - x'|) + e(x', |y - y'|).$$

Nous allons montrer que la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ vérifie toutes les conditions (i) — (iv). La partie (i) du lemme résulte immédiatement des inégalités (13) et (15), de même que (ii) est une conséquence de l'inégalité (12). Pour tout $\delta \geq 0$ fixé la suite des fonctions $\varepsilon_n(x, y, \delta)$ des deux variables (x, y) , étant une suite monotone et bornée de fonctions équicontinues, converge uniformément dans le rectangle D vers la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$, d'où il résulte, à cause de (10), que l'équation (9) est vérifiée. La fonction $\varepsilon(x, y, 0)$ satisfait donc à l'équation

$$\varepsilon(x, y, 0) = 2\omega^* \left(\int_0^x \varepsilon(u, y, 0) du + \int_0^y \varepsilon(x, v, 0) dv \right),$$

d'où il résulte ([2], théorème 3) que

$$(16) \quad \varepsilon(x, y, 0) \equiv 0.$$

La fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ est semi-continue supérieurement comme limite d'une suite non croissante de fonctions continues $\varepsilon_n(x, y, \delta)$, donc

$$(17) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \varepsilon(x, y, \delta) = \varepsilon(x, y, 0) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in D.$$

Pour établir la partie (iii) du lemme il suffit de remarquer que la fonction $\varepsilon(x, y, \delta)$ est, en raison de l'inégalité (15), uniformément continue par rapport à $(x, y) \in D$, et $\delta \in (0, +\infty)$, donc la convergence (17) est uniforme dans le rectangle D .

5. Preuve de l'existence de solutions de l'équation (8).

Lemme 6. *Si la fonction $\omega(\delta)$ est définie, continue et non décroissante pour $\delta \geq 0$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$, $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ et si*

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{pour } \delta > 0,$$

on a

$$\int_0^{\delta} \frac{du}{\omega(u)+u} = +\infty \quad \text{pour} \quad \delta > 0.$$

Démonstration. Le lemme est évident s'il existe un nombre $\delta_0 > 0$ tel que $\omega(\delta) > \delta$ pour $\delta \in (0, \delta_0)$. Sinon il existe, pour tout $n = 1, 2, \dots$, un nombre $\delta_n \in (0, 1/n)$ tel que $\omega(\delta_n) \leq \delta_n$. La fonction $\omega(\delta)$ étant subadditive, on aura $\omega(\delta) \leq \delta$ pour tout δ appartenant à l'ensemble dense dans $(0, +\infty)$ de nombres de la forme $\delta = \delta_{n_1} + \delta_{n_2} + \dots + \delta_{n_m}$. Il en résulte par continuité que $\omega(\delta) \leq \delta$ pour tout $\delta \in (0, +\infty)$ et le lemme est visiblement établi.

Supposons les hypothèses de la théorème 1 et l'hypothèse (H_5) vérifiées, et considérons l'espace des fonctions $s(x, y)$ continues dans l'ensemble Δ , dont la norme est $\|s(x, y)\| = \max |s(x, y)|$ pour $(x, y) \in \Delta$. Soit $\eta > 0$ un nombre tel que pour $0 \leq y \leq \eta$ on a $yh'(y) \leq 1/2LN$ où L est la même nombre qu'auparavant, et soit K un nombre positif tel que pour $\eta \leq y \leq b$ on a $h'(y) \leq K$. Posons

$$\lambda = 2(A + B + \omega(1)(2L + 1) + N(K + 1)L + 1),$$

et désignons par Π_1 l'ensemble des points (x, y, z, p, q) tels que

$$(x, y) \in \Delta, |z| \leq e^{\lambda(a+b)}/\lambda, |p| \leq e^{\lambda(a+b)}, |q| \leq \frac{1}{2}L(1 + K + \lambda/2LN)e^{\lambda(a+b)}.$$

Soit $\Omega_0(\delta)$ le maximum de la fonction $|f(x, y, z, p, q) - f(x', y', z', p, q)|$ pour $(x, y, z, p, q) \in \Pi_1, (x', y', z', p, q) \in \Pi_1, |x - x'| + |y - y'| + |z - z'| \leq \delta$ et admettons

$$\Omega(\delta) = \Omega_0(\delta + \varepsilon_M(\delta)) + \omega(\varepsilon_M^2(\delta)) + N\varepsilon_M^1(\delta),$$

où $\varepsilon_M(\delta)$ est la fonction qui intervient dans le lemme 3 et $\varepsilon_M^i(\delta), i = 1, 2$, sont celles du lemme 4. La fonction $\Omega(\delta)$ est donc définie, continue, non décroissante et bornée pour $\delta \geq 0$ et on a $\Omega(0) = 0$. Posons $\omega^*(\delta) = \omega(L\delta) + NL(K + 1)\delta$. Il résulte du lemme 6 que la fonction $\omega^*(\delta)$ vérifie les hypothèses 1° du lemme 5. Soit $\nu(\delta) = L\delta + \varkappa(L\delta)$. Cette fonction est définie, continue et non décroissante pour $\delta \geq 0$ et on a $\nu(0) = 0, \nu(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$.

Désignons par $\varepsilon(x, y, \delta)$ la fonction — dont l'existence est assurée par le lemme 5 — satisfaisant aux conditions (i) — (iv).

Nous allons démontrer que dans l'espace considéré des fonctions continues $s(x, y)$ il existe un point fixe de la transformation

$$S(x, y) = Fs(x, y) = f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y)\right).$$

Dans ce but désignons par Z l'ensemble des fonctions $s(x, y)$ continues dans l'ensemble A et vérifiant dans celui-ci les inégalités $|s(x, y)| \leq \leq \lambda e^{\lambda(x+y)}$ et $|s(x, y) - s(x', y')| \leq \varepsilon(x, y, \delta)$ pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$. L'ensemble Z est non vide, fermé et convexe. Du théorème d'Arzela, en tenant compte de (iii), résulte qu'il est compact.

Si $s_1(x, y)$ et $s_2(x, y)$ appartiennent à l'ensemble Z , on a en vertu du lemme 1

$$\begin{aligned} \|\Theta_{s_1} - \Theta_{s_2}\| &\leq ab \|s_1 - s_2\|, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_1} - \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_2} \right\| &\leq L(a + b) \|s_1 - s_2\|, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_1} - \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_2} \right\| &\leq L(a + \max_{0 < y \leq b} y h'(y)) \|s_1 - s_2\|. \end{aligned}$$

De ces inégalités il résulte que

$$\begin{aligned} \|Fs_1 - Fs_2\| &\leq \Omega_0(ab \|s_1 - s_2\|) + \omega(L(a + b) \|s_1 - s_2\|) + \\ &\quad + NL(a + \max_{0 < y \leq b} y h'(y)) \|s_1 - s_2\|. \end{aligned}$$

Le second membre de cette inégalité tendant vers zéro avec $\|s_1 - s_2\|$ la transformation Fs est uniformément continue sur l'ensemble Z .

Soit $s(x, y)$ une fonction arbitraire appartenant à Z . En vertu du lemme 2 pour $\alpha = 1/2LN$ et de l'inégalité $\omega(\delta) \leq \omega(1)(1 + \delta)$, facile à établir, en profitant des inégalités (3) et (4) nous avons

$$\begin{aligned} |Fs(x, y)| &\leq A + \frac{B}{\lambda} e^{\lambda(x+y)} + \omega(2Le^{\lambda(x+y)}) + NL(K + 1)e^{\lambda(x+y)} + \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda(x+y)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda(x+y)} + \left(A + \frac{B}{\lambda} + \omega(1)(2L + 1) + NL(K + 1) \right) e^{\lambda(x+y)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda(x+y)} + \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda(x+y)} = \lambda e^{\lambda(x+y)}. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 4, pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned} |Fs(x, y) - Fs(x', y')| &\leq \\ &\leq \Omega_0(\delta + \varepsilon_M(\delta)) + \omega(\varepsilon_M^2(\delta)) + L \int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + L \int_0^y \varepsilon(x, v, L\delta) dv + \\ &\quad + N \left(\varepsilon_N(\delta) + L \int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + L h'(y) \int_0^y \varepsilon(x, v, \varkappa(L\delta)) dv \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \Omega(\delta) + \omega \left(L \left(\int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + \int_0^y \varepsilon(x, v, L\delta) dv \right) + \right. \\
 &\quad \left. + NL \int_0^x \varepsilon(u, y, L\delta) du + NKL \int_0^y \varepsilon(x, v, \kappa(L\delta)) dv + \frac{NL}{2NL} \varepsilon(x, y, \kappa(L\delta)) \right) \leq \\
 &\leq \Omega(\delta) + \omega \left(L \left(\int_0^x \varepsilon(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon(x, v, \nu(\delta)) dv \right) + \right. \\
 &\quad \left. + NL(K+1) \left(\int_0^x \varepsilon(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon(x, v, \nu(\delta)) dv \right) + \frac{1}{2} \varepsilon(x, y, \nu(\delta)) \right) = \\
 &= \Omega(\delta) + \omega^* \left(\int_0^x \varepsilon(u, y, \nu(\delta)) du + \int_0^y \varepsilon(x, v, \nu(\delta)) dv \right) + \frac{1}{2} \varepsilon(x, y, \nu(\delta)) = \\
 &= \varepsilon(x, y, \delta).
 \end{aligned}$$

Donc la transformation F fait correspondre à l'ensemble Z un sous-ensemble de celui-ci. En vertu du théorème du point fixe de Schauder [5], il existe une fonction $s(x, y)$ continue sur l'ensemble A , qui satisfait à l'équation (8) de la page 130 et par conséquent, en raison des remarques du chapitre 2, le théorème 1 se trouve démontré.

6. Unicité des solutions du problème G_0 .

Nous allons démontrer le théorème 2. L'existence de la solution dans ce cas est assurée par le théorème 1, il suffit donc de prouver l'unicité de cette solution. Supposons les hypothèses du théorème 2 vérifiées et soient $s_1(x, y)$ et $s_2(x, y)$ deux fonctions continues dans l'ensemble A , satisfaisant à l'équation (8). Soit $\varrho(x, y)$ la fonction définie au lemme 1 et $\eta > 0$ un nombre tel que l'on ait, pour $0 \leq y \leq \eta$, l'inégalité $yh'(y) \leq \leq 1/2LN$. Posons $L^* = (2L + \max(a, b))/2$, $N^* = NL \max(1, \max_{\eta < y < b} h'(y))$ et $\omega^{**}(\delta) = 2(\omega(L^*\delta) + N^*\delta)$ pour $\delta \geq 0$.

En vertu du lemme 1 et de (6) il vient

$$\begin{aligned}
 &|s_1(x, y) - s_2(x, y)| \leq \\
 &\leq \omega \left(|\Theta_{s_1}(x, y) - \Theta_{s_2}(x, y)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_1}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_2}(x, y) \right| \right) + \\
 &\quad + N \left| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_1}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_2}(x, y) \right| \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega \left(\frac{x}{2} \int_0^y \varrho(x, v) dv + \frac{y}{2} \int_0^x \varrho(u, y) du + L \int_0^y \varrho(u, y) du + L \int_0^y \varrho(x, v) dv \right) + \\ &\quad + N \left(L \int_0^x \varrho(u, y) du + Lh'(y) \int_0^y \varrho(x, v) dv \right) \leq \\ &\leq \omega \left(\left(L + \frac{a}{2} \right) \int_0^y \varrho(x, v) dv + \left(L + \frac{b}{2} \right) \int_0^x \varrho(u, y) du \right) + NL \int_0^x \varrho(u, y) du + \\ &\quad + NL (\max_{\eta < v < b} h'(y)) \int_0^y \varrho(x, v) dv + NL (\max_{0 < v < \eta} y h'(y)) \varrho(x, y) \leq \\ &\leq \omega \left(L^* \left(\int_0^x \varrho(u, y) du + \int_0^y \varrho(x, v) dv \right) \right) + N^* \left(\int_0^x \varrho(u, y) du + \int_0^y \varrho(x, v) dv \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varrho(x, y) \end{aligned}$$

donc la fonction $\varrho(x, y)$ vérifie l'inégalité

$$\varrho(x, y) \leq \omega^{**} \left(\int_0^x \varrho(u, y) du + \int_0^y \varrho(x, v) dv \right).$$

En raison de (5) et du lemme 6 la fonction $\omega^{**}(\delta)$ vérifie les hypothèses du théorème 3 établi dans le travail [2]; en vertu de ce théorème on doit donc avoir

$$\varrho(x, y) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad (x, y) \in D$$

ce qui équivaut à l'identité

$$s_1(x, y) \equiv s_2(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in A.$$

L'équation (8) a donc exactement une solution et le théorème 2 est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bielecki, A. et Kiszyński, J., *Sur le problème de Goursat relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y)$* , Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10** (1956), p. 99–126.
- [2] Kiszyński, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$* , Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **11** (1957), p. 73–112.

- [3] — — *Sur l'existence des solutions d'un problème de M. Z. Szmydt relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* , Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **12** (1958), p. 67–109.
- [4] — — *Sur le problème de Picard pour l'équation hyperbolique aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13** (1959), p. 4–24.
- [5] Schauder, J., *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., **2** (1930), p. 171–180.

Streszczenie

W oparciu o twierdzenie Schaudera o punkcie stałym i wyzyskując metody wyłożone w pracach [1] i [2], dowodzi się twierdzenia o istnieniu rozwiązania problemu Goursata dla równania (1) w przypadku, gdy krzywe, wzdłuż których dane są z góry wartości rozwiązania, mogą mieć w swym jedynym punkcie przecięcia wspólną styczną o kierunku charakterystycznym. O funkcji $f(x, y, z, p, q)$ zakłada się nieco więcej niż w pracy [2] nie obejmującej tego wysoce osobliwego przypadku.

Dowód twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania zadania Goursata oparty jest na pewnej nierówności całkowej udowodnionej w pracy [2].

Резюме

Основываясь на теореме Шаудера о постоянной точке и используя методы, изложенные в работах [1] и [2], доказана теорема о существовании решения проблемы Гурса для уравнения (1) в том случае, когда кривые, вдоль которых наперёд заданы значения решения, могут иметь в своей единственной точке пересечения общую касательную с характеристическим направлением. Относительно функции $f(x, y, z, p, q)$ предполагается несколько больше, чем в работе [2], не охватывающей этого весьма особого случая.

Доказательство теоремы об однозначности решения задачи Гурса основывается на некотором интегральном неравенстве, доказанном в работе [2].