ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIII, 6 SECTIO A 1959

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur certaines classes de fonctions univalentes dans le cercle-unité

O pewnych klasach funkcji jednolistnych w kole jednostkowym

О некоторих классах функций однолистных в единичном круге

1. Soit Σ_0 la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$. Nous désignerons par z_0 un nombre fixé tel que $0 < |z_0| < 1$, par S, S_0, S_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ les sous-classes de Σ_0 définies comme il suit: 1) $f(z) \in S$ si $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$; 2) $f(z) \in S_0$ si $f(0) = 0$, $f(z_0) = z_0$; 3) $f(z) \in S_p$ si $f(0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) = 1$. Désignons encore par $S^*, S_0^*, S_p^*, (p = 1, 2, \ldots)$ respectivement les sous-classes des classes S, S_0, S_p des fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur des domaines étoilés par rapport à l'origine. Dans de nombreuses études sur la classe S on a établi pour les fonctions de cette classe beaucoup d'intéressants résultats. P. Montel [**5**], p. 66 a proposé l'étude des classes des fonctions univalentes dans $|z| < 1$ et autrement normées que celles de la classe S, qui est un cas limite des classes S_0 et S_1 lorsque $z_0 \to 0$. Pour la classe S_0^*, W. Rogosinski [**6**], p. 204 a obtenu le résultat suivant:

Théorème R. *La transforme du cercle* $|z| < 1$ *par toute fonction* $f(z) \in S_0^*$ *couvre le cercle* $|w| < \frac{1}{4}(1-|z_0|)^2$.

Ce résultat est le meilleur possible. Par exemple, la fonction

$$f_{\text{extr}}(z) = (1-|z_0|)^2 \cdot \frac{z}{(1-e^{-i\Theta}z)^2} \in S_0^*, \quad \text{où } \Theta = \arg z_0,$$

est une fonction extrémale. Pour la classe S_1^*, M. Biernacki [**2**] a établi le théorème suivant:

Théorème B. *Si* $|z_0| < \frac{1}{10}$ et $f(z) \in S_1^*$, *la transformée du cercle-unité par la fonction* $f(z)$ *ceouvre le cercle*

$$|w| < \frac{1}{4}\frac{(1-|z_0|)^3}{1+|z_0|}.$$

La fonction

$$f_{\mathrm{extr}}(z) = \frac{(1-|z_0|)^3}{1+|z_0|}\cdot\frac{z}{(1-e^{-i\Theta}z)^2}, \quad \textit{où } \Theta = \arg z_0,$$

est une fonction extrémale.

Dans le cas limite où $z_0 \to 0$, les théorèmes **R** et **B** fournissent les limitations connues relatives à la classe S.

2. Dans cet article je vais établir des théorèmes qui généralisent les résultats de W. Rogosinski et M. Biernacki, et aussi quelques résultats relatifs à la classe S_0^*. En particulier, je généralise le résultat de A. Marx [4] concernant la classe S^*.

Théorème I. *La transformée du cercle* $|z| < 1$ *par toute fonction* $\varphi(z) \in S_0$ *couvre le cercle* $|w| < \frac{1}{4}(1-|z_0|)^2$. *Cette limite est atteinte pour la fonction*

$$f_{\mathrm{extr}}(z) = (1-|z_0|)^2\cdot\frac{z}{(1-e^{-i\Theta}z)^2}, \quad \textit{où } \Theta = \arg z_0.$$

Démonstration. Si $f(z) \in S$, on voit aisément que $z_0 f(z)/f(z_0) = \varphi(z) \in S_0$. Réciproquement, si $\varphi(z) \in S_0$, il existe une fonction $f(z) \in S$ telle que $\varphi(z) = z_0 f(z)/f(z_0)$. En effet, il suffit de poser $f(z) = \varphi(z)/\varphi'(0)$. Les limitations connues du module des fonctions de la classe S permettent de conclure que si $\varphi(z) \in S_0$, on a

$$(1-|z_0|)^2\cdot\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |\varphi(z)| \leqslant (1+|z_0|)^2\cdot\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Pour $|z| = 1$, le premier membre de cette inégalité prend la forme:

$$|\varphi(z)| \geqslant \tfrac{1}{4}(1-|z_0|)^2$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème II. *La transformée du cercle* $|z| < 1$ *par toute fonction de la classe* S_1 *couvre le cercle* $|w| < \frac{1}{4}\cdot(1-|z_0|)^3/(1+|z_0|)$. *Cette limite est atteinte pour la fonction*

$$\varphi_{\mathrm{extr}}(z) = \frac{(1-|z_0|)^3}{1+|z_0|}\cdot\frac{z}{(1-e^{-i\Theta}z)^2}, \quad \textit{où } \Theta = \arg z_0.$$

Démonstration. Si $f(z)\in S$, on voit aisément que $f(z)/f'(z_0) = \varphi(z)\in S_1$. Réciproquement, si $\varphi(z)\in S_1$, il existe une fonction $f(z)\in S$ telle que $\varphi(z) = f(z)/f'(z_0)$. En effet, il suffit de mettre: $f(z) = \varphi(z)/\varphi'(0)\in S$. Les théorèmes connus sur la déformation pour la classe S permettent de conclure que l'on a:

$$\frac{(1-|z_0|)^3}{1+|z_0|}\cdot\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |\varphi(z)| \leqslant \frac{(1+|z_0|)^3}{1-|z_0|}\cdot\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Pour $|z| = 1$, le premier membre de cette inégalité prend la forme: $|\varphi(z)| \geqslant \frac{1}{4}(1-|z_0|)^3/(1+|z_0|)$ et le théorème II se trouve ainsi démontré.

Pour les fonctions $f(z)\in S$ qui représentent le cercle $|z|<1$ sur des domaines convexes, on a les limitations connues (P. Montel [5], p. 62):

$$(1)\qquad \frac{|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|};\quad \frac{1}{(1+|z|)^2} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2}.$$

Si $\varphi(z)\in S_0$ et si $\varphi(z)$ représente le cercle $|z|<1$ sur un domaine convexe, il existe une fonction convexe $f(z)\in S$ telle que $\varphi(z) = z_0 f(z)/f(z_0)$. Nous avons donc:

$$(1-|z_0|)\cdot\frac{|z|}{1+|z|} \leqslant |\varphi(z)| \leqslant (1+|z_0|)\cdot\frac{|z|}{1-|z|}.$$

En mettant $|z| = 1$ dans le premier membre de cette inégalité nous obtenons:

Théorème I'. *La transformée du cercle $|z|<1$ par toute fonction $\varphi(z)\in S_0$, qui représente ce cercle sur un domaine convexe, couvre le cercle $|w| < \frac{1}{2}(1-|z_0|)$.* Cette limite est atteinte pour la fonction

$$\varphi_{\text{extr}}(z) = (1-|z_0|)\frac{z}{1-e^{-i\Theta}z},\ \textit{où}\ \Theta = \arg z_0.$$

Si $\varphi(z)\in S_1$ et si $\varphi(z)$ est une fonction convexe, on a $\varphi(z) = f(z)/f'(z_0)$, où $f(z)$ est une fonction convexe appartenant à la classe S. En tenant compte de (1) nous obtenons:

$$\frac{|z|}{1+|z|}\cdot(1-|z_0|)^2 \leqslant |\varphi(z)| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}\cdot(1+|z_0|)^2.$$

Pour $|z| = 1$ on a $|\varphi(z)| \geqslant \frac{1}{2}(1-|z_0|)^2$, donc:

Théorème II'. *La transformée du cercle $|z|<1$ par toute fonction $\varphi(z)\epsilon S_1$, qui représente ce cercle sur un domaine convexe, couvre le cercle $|w|<\frac{1}{2}(1-|z_0|)^2$. Cette limite est atteinte pour la fonction*

$$\varphi_{\text{extr}}(z) = (1-|z_0|)^2 \frac{z}{1-e^{-i\Theta}z}, \text{ où } \Theta = \arg z_0.$$

Je démontrerai encore la proposition suivante:

Théorème III. *Si l'hypothèse de Bieberbach: $|a_n|\leqslant n$, pour $n=2,3,\ldots,p$, est vérifiée pour toute fonction $f(z)\epsilon S$, $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ la transformée du cercle $|z|<1$ par une fonction quelconque de la classe S_p couvre le cercle*

$$|w| < \frac{1}{4}\frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}.$$

Cette limite est atteinte pour la fonction

$$\varphi_{\text{extr}}(z) = \frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}\cdot\frac{ze^{(p-1)i\Theta}}{(1-e^{-i\Theta}z)^2}, \text{ où } \Theta = \arg z_0.$$

Démonstration. Si $\varphi(z)\epsilon S_p$, il existe une fonction $f(z)\epsilon S$ telle que $\varphi(z)=f(z)/f^{(p)}(z_0)$. En effet, il suffit d'admettre $f(z)=\varphi(z)/\varphi'(0)$. Réciproquement, pour toute fonction $f(z)\epsilon S$ la fonction $\varphi(z)=f(z)/f^{(p)}(z_0)$ appartient à la classe S_p. Marty [3] a démontré que si l'hypothèse de Bieberbach: $|a_n|\leqslant n$, $n=2,3,\ldots,p$, est vérifiée pour toutes les fonctions $f(z)\epsilon S$, $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, alors

$$|f^{(p)}(z)| \leqslant p!\frac{p+|z|}{(1-|z|)^{p+2}}. \tag{2}$$

Il en résulte, pour le module de $\varphi(z)$, la limitation inférieure suivante:

$$|\varphi(z)| \geqslant \frac{|z|}{(1+|z|)^2}\cdot\frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}$$

et, pour $|z|=1$, on obtient ainsi le théorème *III*.

La limitation (2) dans la classe S peut être obtenue moyennant des hypothèses différentes de celles qui interviennent dans le résultat de Marty. On a, en effet:

Lemme. *Si l'hypothèse de Bieberbach:* $|a_n| \leqslant n$, $n = 2, 3, \ldots$, *est vérifiée pour une fonction donnée* $f(z) \epsilon S$, $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, *on à, pour tout nombre naturel p, la limitation:*

$$|f^{(p)}(z)| \leqslant p!\,\frac{p+|z|}{(1-|z|)^{p+2}}.$$

L'égalité est atteinte pour la fonction $f_0(z) = z(1-z)^{-2}$.

Démonstration. Supposons que $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ vérifie les hypothèses du lemme. On a donc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad f^{(p)}(z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\,a_n z^{n-p}, \quad \text{où } a_1 = 1.$$

De là on obtient:

$$|f(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|z|^n = \frac{|z|}{(1-|z|)^2} = f_0(|z|),$$

$$|f^{(p)}(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\,|a_n|\,|z|^{n-p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\cdot n\cdot|z|^{n-p} = \frac{d^p}{d|z|^p} f_0(|z|).$$

On établit aisément par récurrence l'égalité:

$$\frac{d^p}{d|z|^p} f_0(|z|) = p!\,\frac{p+|z|}{(1-|z|)^{p+2}} \tag{3}$$

qui, rapprochée de l'inégalité précédente, achève la démonstration de notre lemme.

Nous établirons maintenant le théorème suivant:

Théorème III'. *Si l'hypothèse de Bieberbach:* $|b_n| \leqslant |b_1|\,n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ *est vérifiée pour une fonction donnée* $\varphi(z) \epsilon S_p$, $\varphi(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, $\varphi(z)$ *représente le cercle* $|z| < 1$ *sur un domaine qui couvre entièrement le cercle*

$$|w| < \frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{4\,p!\,(p+|z_0|)}.$$

Cette limite est atteinte pour la fonction

$$\varphi_{\text{extr}}(z) = \frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}\cdot\frac{ze^{(p-1)i\Theta}}{(1-e^{-i\Theta}z)^2}, \text{ où } \Theta = \arg z_0.$$

Démonstration. De même que dans la démonstration du théorème III, il existe une fonction $f(z)\in S$ telle que $\varphi(z) = f(z)/f^{(p)}(z_0)$; en effet, il suffit de poser $f(z) = \varphi(z)/\varphi'(0)$. La fonction $f(z)$ vérifie l'hypothèse de Bieberbach. En vertu du lemme on a:

$$|\varphi(z)| \geqslant \frac{|z|}{(1+|z|)^2}\Big/ p!\frac{p+|z_0|}{(1-|z_0|)^{p+2}} = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}\cdot\frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}$$

d'où l'on obtient, pour $|z| = 1$:

$$|\varphi(z)| \geqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}$$

ce qui démontre le théorème III'.

3. Je vais maintenant établir quelques théorèmes relatifs à la classe S_0^*.

Soit $E = E\{G(z,t); a, b\}$ la classe des fonctions $f(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$, qui peuvent être représentées sous forme de l'intégrale de Stieltjes:

$$f(z) = \int_a^b G(z,t)d\mu(t), \tag{4}$$

où $G(z,t)$ est une fonction (fixée pour la classe donnée) régulière par rapport à z dans le cercle $|z| < 1$ et continue dans l'intervalle fermé $a \leqslant t \leqslant b$ et $\mu(t)$ est une fonction monotone non décroissante dans cet intervalle, telle que

$$\int_a^b d\mu(t) = 1. \tag{5}$$

Pour un z fixé, $|z| < 1$, désignons par D l'ensemble des valeurs de $f(z)$ dans la classe E. Ashnievits et Ulina [1] ont démontré le théorème:

Théorème $A-U$. *L'ensemble D des valeurs de $f(z)$ dans la classe E est l'enveloppe convexe*(1) *de la courbe L:*

$$w = G(z,t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

(1) Nous appelons ici enveloppe convexe de la courbe L le plus petit ensemble fermé et convexe qui contient la courbe.

Remarque 1. Les hypothèses sur lesquelles Ashnievits et Ulina ont basé leur théorème sont trop fortes en ce qui concerne la fonction $G(z,t)$. Par exemple, l'hypothèse que la fonction $G(z,t)$ est holomorphe par rapport à z n'intervient pas dans la démonstration de leurs théorèmes fondamentaux et on peut voir qu'elle est tout à fait superflue. On peut, en effet, énoncer le théorème $A-U$ sous une forme plus générale.

Soit $G(z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$ une fonction continue de la variable t dans l'intervalle $[a,b]$ et admettant des valeurs complexes. Les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ désignent des paramètres fixées. Désignons par $E^* = E^*\{G(z_1, \ldots, z_n, t); a, b\}$ l'ensemble des nombres de la forme:

$$\int_a^b G(z_1, z_2, \ldots, z_n, t)\,d\mu(t)$$

où $G(z_1, z_2, \ldots, z_n, t)$ est une fonction fixée pour l'ensemble E^* et $\mu(t)$ parcourt l'ensemble des fonctions non décroissantes dans l'intervalle $[a,b]$, soumises à la condition:

$$\int_a^b d\mu(t) = 1.$$

Dans ces conditions, on a le théorème suivant:

Théorème $A-U^*$. *L'ensemble E^* est l'enveloppe convexe de la courbe:*

$$w = G(z_1, z_2, \ldots, z_n, t), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

La démonstration est la même que celle du théorème $A-U$.

En m'appuyant sur le résultat de Ashnievits et Ulina, j'établirai maintenant le théorème suivant:

Théorème IV. *L'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $\sqrt{\dfrac{z}{\varphi(z)}}$, où z est un point fixe du cercle $|z|<1$, dans la classe S_0^* est le cercle fermé:*

$$\left|\sqrt{\frac{z}{\varphi(z)}} - \frac{1-z\bar{z}_0}{1-|z_0|^2}\right| \leqslant \frac{|z-z_0|}{1-|z_0|^2} \quad (^2)$$

Démonstration. Soit $\varphi(z) \in S_0^*$. Pour un z fixé, l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $z/\varphi(z)$ dans la classe S_0^* est identique à celui des valeurs de la fonctionnelle $zf(z_0)/z_0 f(z)$ dans la classe S^*. Si $f(z) \in S^*$, on sait que

(2) Il s'agit de la branche de $\sqrt{z/\varphi(z)}$ qui est égale à 1 pour $z = z_0$.

$f(z)$ peut être mise sous la forme:

$$(6) \qquad z\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-ze^{-it})\,d\mu(t)\right], \quad \int_{-\pi}^{\pi}d\mu(t)=1,$$

où $\mu(t)$ est une fonction non décroissante dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Réciproquement, toute fonction de la forme (6) appartient à S^*. De là nous tirons:

$$\frac{z}{\varphi(z)}=\frac{zf(z_0)}{z_0f(z)}=\exp\left[2\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1-ze^{-it}}{1-z_0e^{-it}}\,d\mu(t)\right].$$

La fonction $z/\varphi(z)$ est différente de zéro dans le cercle $|z|<1$ et $z_0/\varphi(z_0)=1$. Désignons par $\sqrt{z/\varphi(z)}$ la branche uniforme de la fonction multiforme $\sqrt{z/\varphi(z)}$ qui tend vers 1 lorsque $z\to z_0$. Nous obtenons ensuite:

$$(7) \qquad F(z)=\ln\sqrt{z/\varphi(z)}=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1-ze^{-it}}{1-z_0e^{-it}}\,d\mu(t)$$

où $\ln\sqrt{z/\varphi(z)}$ est la branche uniforme de la fonction multiforme $\ln\sqrt{z/\varphi(z)}$ qui tend vers zéro lorsque $z\to z_0$. En tenant compte du résultat de Ashnievits et Ulina [1], que nous venons d'énoncer sous la forme un peu plus générale du théorème $A-U^*$, nous voyons que l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $F(z)=\ln\sqrt{z/\varphi(z)}$ dans la classe S_0^* est l'enveloppe convexe de la courbe L:

$$w=\ln\frac{1-ze^{-it}}{1-z_0e^{-it}}, \qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi.$$

Si $z=z_0$, il résulte de la définition de la classe S_0^* que l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $\sqrt{z/\varphi(z)}$ est le point $w=1$. Supposons dans la suite que $z\neq z_0$.

Remarque 2. *On démontre aisément que si la fonction $\Phi(\xi)$, $\Phi'(\xi)\neq 0$, est holomorphe dans le cercle $|\xi|<1$, alors $\ln\Phi(\xi)$ représente ce cercle sur un domaine convexe si et seulement si l'on a:*

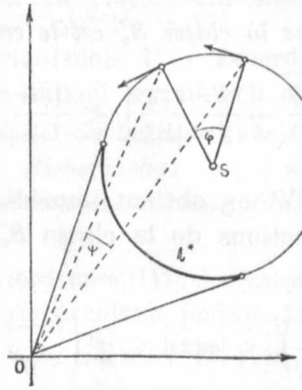
$$(8) \qquad \mathrm{R}'\left(1+\frac{\xi\Phi''(\xi)}{\Phi'(\xi)}\right)>\mathrm{R}'\left(\frac{\xi\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)}\right), \qquad |\xi|<1.$$

La courbe L peut être représentée par l'équation:

$$w=\ln\frac{1-z\xi}{1-z_0\xi}, \qquad |\xi|=1.$$

La fonction $w(\xi)=(1-z\xi)/(1-z_0\xi)$ transforme la circonférence $|\xi|=1$

en le circonférence K. L'origine des coordonnées est à l'extérieur de la circonférence K. Menons par l'origine les tangentes à la circonférence K. Les points de contact partageront celle-ci en deux arcs: L^* et l^* (fig.). Lorsque le paramètre Θ, $\xi = e^{i\Theta}$, augmente, le point $w(\xi)$ parcourt la



circonférence K dans le sens positif. A l'aide de simples considérations géométriques on constate que sur l'arc L^* on a l'inégalité: $\psi \leqslant \varphi$, où, comme le montre la figure, les angles φ et ψ sont respectivement égaux aux accroissements de l'argument du vecteur tangent et du rayon vecteur en un point arbitraire fixé de l'arc L^*. Il en résulte que l'inégalité (8) est vérifiée par la fonction $w(\xi)$ sur L^*. Sur l'arc l^*, le second membre de l'inégalité (8) est négatif, le premier est positif. L'inégalité (8) est donc vérifiée pour la fonction $w(\xi)$ sur la circonférence $|\xi| = 1$. Il en résulte, en vertu de la remarque 2, que la courbe L est convexe. L'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $\sqrt{z/\varphi(z)}$ dans la classe S_0^* est le cercle limité par la circonférence:

$$w = \frac{1 - ze^{-it}}{1 - z_0 e^{-it}}, \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

On trouve aisément que le centre de cette circonférence est $(1 - z\bar{z}_0)/(1 - |z_0|^2)$ et que son rayon est $|z - z_0|/(1 - |z_0|^2)$, ce qui prouve le théorème IV.

Si l'on fait, dans le théorème IV, $z_0 \to 0$, alors $S_0^* \to S^*$ et on obtient pour la classe S^* le résultat de A. Marx [4]. De la démonstration du théorème I il résulte que si $f(z) \epsilon S^*$, on a $\varphi(z) = z_0 f(z)/f(z_0) \epsilon S_0^*$, et que toute fonction $\varphi(z) \epsilon S_0^*$ peut être représentée sous la forme $\varphi(z) = z_0 f(z)/f(z_0)$, où $f(z)$ est une fonction de la classe S^*. Le théorème IV concerne le domaine de variation de l'expression $z/\varphi(z)$ dans la classe S_0^*, c'est-à-dire le domaine de variation de la fonctionnelle $zf(z_0)/z_0 f(z)$, où z et z_0 sont fixés, dans la classe S^*. En échangeant les rôles des variables z et z_0, on déduit immédiatement du théorème IV:

Théorème IV'. *L'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $\sqrt{\varphi(z)/z}$, où z est fixé et $|z| < 1$, dans la classe S_0^* est le cercle fermé*:

$$\left|\sqrt{\frac{\varphi(z)}{z}} - \frac{1-\bar{z}z_0}{1-|z|^2}\right| < \frac{|z-z_0|}{1-|z|^2}.$$

Des théorèmes IV et IV' on obtient immédiatement les limitations exactes du module des fonctions de la classe S_0^*:

Si $\varphi(z)\epsilon S_0^*$, on a:

$$|z|\left(\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|+|1-z\bar{z}_0|}\right)^2 \leqslant |\varphi(z)| \leqslant |z|\left(\frac{|z-z_0|+|1-z_0\bar{z}|}{1-|z|^2}\right)^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ашневиц, И. Я. и Улина, Г. В., *Об областях значений аналитических функций, представимых интегралом Стильтеса*, Вестник Ленинградского Университета, **11** (1955), p. 31–42.

[2] Biernacki, M., *Sur la représentation conforme des domaines étoilés*, Mathematica, Cluj, **16** (1940), p. 44–49.

[3] Marty, F., *Sur les dérivées d'une fonction univalente*, C. R. Acad. Sci. Paris, **194** (1932), p. 1308.

[4] Marx, A., *Untersuchungen über schlichte Abbildungen*, Math. Ann., *1*, **7** (1932), p. 000.

[5] Montel, P., *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1933.

[6] Rogosinski, W., *Über Wertevorrat einer analytischen Funktion, von der zwei Werte vorgegeben sind*, Compositio Math. 00 (1936), p. 199–226.

Streszczenie

Niech $S, S_0, S_p (p = 1, 2, \ldots)$, oznaczają klasy funkcji, holomorficznych i jednolistnych w kole $|z| < 1$, unormowane następująco: 1) jeśli $f(z)\epsilon S$, to $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$; 2) jeśli $f(z)\epsilon S_0$, to $f(0) = 0$, $f(z_0) = z_0$; 3) jeśli $f(z)\epsilon S_p$, to $f(0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) = 1$, gdzie z_0 oznacza ustaloną dla danej klasy liczbę, taką że $0 < |z_0| < 1$. Przez S^*, S_0^*, S_p^* $(p = 1, 2, \ldots)$, oznaczmy odpowiednio podklasy klas S, S_0, S_p, funkcji

odwzorowujących koło $|z|<1$ na obszary gwiaździste względem początku układu. W pracy tej podaję następujące twierdzenia:

Twierdzenie I. *Obraz koła* $|z|<1$ *poprzez każdą funkcję* $f(z)\epsilon S_0$ *pokrywa koło* $|w|<\frac{1}{4}(1-|z_0|)^2$.

Twierdzenie II. *Obraz koła* $|z|<1$ *poprzez każdą funkcję* $f(z)\epsilon S_1$ *pokrywa koło*: $|w|<\frac{1}{4}(1-|z_0|)^3(1+|z_0|)^{-1}$.

Podaję też jako Twierdzenie I'. i Twierdzenie II' analogiczne rezultaty dotyczące podklas funkcji wypukłych dla klas S_0 i S_1.

Twierdzenie III. *Jeśli dla każdej funkcji* $f(z)\epsilon S$, $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *spełniona jest hipoteza Bieberbacha*: $|a_n|\leqslant n$, $n=2,3,\ldots p$, *to obraz koła* $|z|<1$ *przy odwzorowaniu dowolną funkcją klasy* S_p *pokrywa koło* $|w|<\frac{1}{4}(1-|z_0|)^{p+2}/p!(p+|z_0|)$.

Wykazuję także twierdzenie III' krzyżujące się z twierdzeniem III. We wszystkich tych twierdzeniach podaję funkcje ekstremalne.

Twierdzenie IV. *Zbiór wartości funkcjonału* $\sqrt{z/\varphi(z)}$ *przy ustalonym* z, $|z|<1$, *w klasie* S_0^* *jest kołem domkniętym*:

$$\left|\sqrt{\frac{z}{\varphi(z)}}-\frac{1-z\bar{z}_0}{1-|z_0|^2}\right|\leqslant\frac{|z-z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

Twierdzenie IV'. *Zbiór wartości funkcjonału* $\sqrt{\varphi(z)/z}$ *przy ustalonym* z, $|z|<1$, *w klasie* S_0^* *jest kołem domkniętym*:

$$\left|\sqrt{\frac{\varphi(z)}{z}}-\frac{1-\bar{z}z_0}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{|z-z_0|}{1-|z|^2}.$$

Stąd: *Jeśli* $\varphi(z)\epsilon S_0^*$, *to*

$$|z|\left(\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|+|1-z\bar{z}_0|}\right)^2\leqslant|\varphi(z)|\leqslant|z|\left(\frac{|z-z_0|+|1-z_0\bar{z}|}{1-|z|^2}\right)^2.$$

Jeśli chodzi o twierdzenie I, to jest ono uogólnieniem analogicznego twierdzenia W. Rogosinskiego [**6**]. W. Rogosinski wykazał twierdzenie I jedynie dla klasy $S_0^*\subset S_0$. Twierdzenie II dla klasy S_1^*, przy dodatkowym założeniu $|z_0|<\frac{1}{10}$, otrzymał wcześniej M. Biernacki [**2**].

Резюме

Пусть S, S_0, S_p $(p=1,2,\ldots)$ обозначают классы функций голоморфных и однолистных в круге $|z|<1$ нормированных следующим образом:

1) если $f(z)\epsilon S$, то $f(0)=0, f'(0)=1$; 2) если $f(z)\epsilon S_0$ то $f(0)=0, f(z_0)=z_0$; 3) если $f(z)\epsilon S_p$, то $f(0)=0$, $f^{(p)}(z_0)=1$, причём z_0 обозначает установленное для этого класса число, такое, что $0<|z_0|<1$.

Через S^*, S_0^*, S_p^* $(p=1,2,\ldots)$ обозначаем соответственно подклассы классов S, S_0, S_p функций, отображающих круг $|z|<1$ на области звездообразные относительно начала координат.

В предлагаемой работе я привожу следующие теоремы:

Теорема I. Образ круга $|z|<1$, создаваемый всякой функцией $f(z)\epsilon S_0$, покрывает круг $|w|<\frac{1}{4}(1-|z_0|)^2$.

Теорема II. Образ круга $|z|<1$, создаваемый всякой функцией $f(z)\epsilon S_1$ покрывает круг $|w|<\frac{1}{4}(1-|z_0|)^3(1+|z_0|)^{-1}$.

Я даю тоже аналогичные выводы, относящихся к подклассам выпуклых функций в классах S_0 и S_1, это теорема I′ и теорема II′.

Теорема III. Если для каждой функции $f(z)\epsilon S, f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ исполнена гипотеза Бибербаха: $|a_n|\leqslant n$, $n=2,3,\ldots,p$, то образ круга $|z|<1$ при отображении любой функцией из класса S_p покрывает круг $|w|<\frac{1}{4}(1-|z_0|)^{p+2}/p!(p+|z_0|)$.

Я привожу тоже теорему III', которая пересекается с теоремой III. Во всех этих теоремах я даю экстремальные функции.

Теорема IV. Множество значений функционала $\sqrt{z/\varphi(z)}$ при фиксированном значении z, $|z|<1$, является в классе S_0^* домкнутым кругом:

$$\left|\sqrt{\frac{z}{\varphi(z)}}-\frac{1-z\bar{z}_0}{1-|z_0|^2}\right|\leqslant\frac{|z-z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

Теорема IV′. Множество значений функционала $\sqrt{\varphi(z)/z}$ при фиксированном z, $|z|<1$, в классе S_0^*, есть домкнутый круг

$$\left|\sqrt{\frac{\varphi(z)}{z}}-\frac{1-z\bar{z}_0}{1-|z_0|^2}\right|\leqslant\frac{|z-z_0|}{1-|z|^2}.$$

Следовательно: Если $\varphi(z)\epsilon S_0^*$, то

$$|z|\left(\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|+|1-z\bar{z}_0|}\right)^2\leqslant|\varphi(z)|\leqslant|z|\left(\frac{|z-z_0|+|1-z_0\bar{z}|}{1-|z|^2}\right)^2.$$

Что касается теоремы I, то она является обобщением аналогичной теоремы В. Рогозинского [**6**]. В. Рогозинский доказал теорему I только для класса $S_0^*\subset S_0$. Теорему II для класса S_1^* при добавочном условии $|z_0|<\frac{1}{10}$ получил раньше М. Бернацкий [**2**].