

Z Zakładu Matematyki III, Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatariewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur les mouvements sous l'influence des forces élastiques généralisées

O ruchach pod wpływem uogólnionych sił sprężystych

О движении под действием обобщенных упругих сил

0.1. Introduction. Considérons l'équation

$$(0.1.1) \quad x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0$$

où $b(t) < 0$.

Elle peut être considérée comme l'équation du mouvement d'un point sur une droite sous l'influence d'une force attirante élastique (variable dans le temps) $F = b(t)x$. Le terme $2a(t)x'$ peut être considéré comme la présence d'une force de résistance.

Nous allons considérer dans ce travail au § 1 une généralisation de l'équation (0.1.1), à savoir

$$(0.1.2) \quad x'' = f(t, x, x')$$

où f vérifie l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$ de mon travail [9] (voir page 36) et où $b_1 < 0$. Dans ce travail [9] j'ai fait des suppositions supplémentaires qui garantissent que les solutions de (0.1.2) soient oscillantes. Dans le travail présent nous n'allons pas faire ces suppositions (et les solutions de (0.1.2) pourront ne pas être oscillantes) ou bien nous allons faire d'autres suppositions garantissant que les solutions ne sont pas oscillantes.

Dans la suite nous allons employer quelques définitions et quelques résultats de mon travail [9]. Leurs numéros seront suivis dans la suite par les lettres „RS“.

Le § 2 est consacré à quelques exemples montrant la portée et les relations mutuelles des résultats du § 1 et des résultats de mes travaux [9] et [6].

Enfin le § 3 sera consacré à un essai de classification des théorèmes concernant les propriétés asymptotiques d'équations différentielles.

1. Les équations non nécessairement oscillantes.

1.1. Un résultat provisoire. Supposons que l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$ (voir le n° 0.2 *RS*) soit vérifiée et que

$$(1.1.1) \quad a_1 < 0, \quad b_1 < 0.$$

Pour l'énoncé de nos théorèmes il ne nous faut rien supposer sur les signes des expressions $a_i^2 + b_j$. Mais, pour fixer les idées nous supposons dans nos calculs que

$$(1.1.2) \quad \sigma_{11}^2 \frac{d}{dt} - a_1^2 - b_1 > 0,$$

$$(1.1.3) \quad \sigma_{12}^2 \frac{d}{dt} - a_1^2 - b_2 > 0,$$

$$(1.1.4) \quad \sigma_{21}^2 \frac{d}{dt} a_2^2 + b_1 > 0$$

et que

$$\sigma_{ij} > 0.$$

Si ces conditions n'étaient pas vérifiées, il suffirait de prendre des constantes $a_1^* < a_2, a_1 < a_1^* < 0$ telles que $-a_1^{*2} - b_i > 0$ et $a_2^{*2} + b_1 > 0$. Alors, si l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$ est vérifiée, l'hypothèse $V(a_1^*, a_2^*, b_1, b_2)$ le serait aussi.

D'ailleurs si (1.1.4) n'était pas vérifiée (ou plutôt si $a_2^2 + b_1 < 0$) on pourrait appliquer le Théorème B1 *RS* (ou bien le Théorème B2 *RS*). Pour quelques résultats obtenus sans les hypothèses (1.1.2) et (1.1.3) voir les n°s 1.4 et 1.5.

Considérons les solutions de l'équation

$$(1.1.5) \quad x'' = f(t, x, x')$$

qui vérifient les conditions initiales

$$x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

1) Soit $\alpha \geq 0, \beta > 0$. Alors, pour des $t > 0$ assez petits, on aura $x \geq 0, x' > 0$, donc

$$(1.1.6) \quad f(t, x, z) \leq 2a_1 z + b_1 x.$$

Considérons les solutions de l'équation

$$(1.1.7) \quad y'' - 2a_1 y' - b_1 y = 0$$

qui vérifient les conditions initiales $y(0) = a$, $y'(0) = \beta$. Alors, pour tous les $t \geq 0$ tels que $x \geq 0$, $x' \geq 0$, $y \geq 0$ et $y' \geq 0$, vu le n° 1.1 RS, nous aurons

$$(1.1.8) \quad x'(t) \leq y'(t) \quad \text{et} \quad x(t) \leq y(t).$$

Vu (1.1.2), les solutions considérées de (1.1.7) ont la forme

$$y(t) = Ce^{\alpha_1 t} \sin(\delta + \sigma_{11} t),$$

où C et δ sont déterminées par a et β . Donc, il s'ensuit de (1.1.8) qu'il existe un $T < \pi/2\sigma_{11}$ tel que $x'(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, T \rangle$ et $x'(T) = 0$.

2) Soit maintenant $\alpha > 0$, $\beta \leq 0$. Si $\beta = 0$, alors $f(0, a, 0) \leq b_1 a$, donc $x''(0) < 0$. Il s'ensuit que, pour des $t > 0$ assez petits, aussi bien pour $\beta = 0$ que pour $\beta < 0$, nous aurons $x > 0$, $x' = z < 0$, donc vu l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$

$$(1.1.9) \quad 2a_1 z + b_2 x \leq f(t, x, z) \leq 2a_2 z + b_1 x.$$

Considérons les solutions de l'équation

$$(1.1.10) \quad v'' - 2a_2 v' - b_1 v = 0$$

qui vérifient les conditions initiales $v_1(0) = a$, $v_1'(0) = \beta$. Évidemment, pour des t tels que $x \geq 0$, $x' \leq 0$, $v_1' \geq 0$, $v_1 \leq 0$, nous aurons vu le n° 1.2 RS

$$(1.1.11) \quad x'(t) \leq v_1'(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq x(t) \leq v_1(t).$$

Vu (1.1.4) les solutions considérées de (1.1.10) ont la forme

$$(1.1.12) \quad v_1(t) = C_1 e^{(a_2 + \sigma_{21})t} + C_2 e^{(a_2 - \sigma_{21})t}.$$

Évidemment $a_2 + \sigma_{21} < 0$, donc ou bien $v_1 = v_1(t)$ converge exponentiellement (avec sa dérivée) vers zéro en restant positive, ou bien il existe un T^* tel que $v_1(T^*) = 0$. D'après (1.1.11), ou bien $x(t) > 0$ et $x(t)$ converge (exponentiellement) vers zéro (c'est-à-dire qu'elle est une fonction ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 < 0$), ou bien il existe un $T \leq T^*$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, T \rangle$ et $x(T) = 0$. Alors $x'(T) < 0$. D'après (1.1.11), la fonction $x = x(t)$ sera dans $\langle 0, +\infty \rangle$ ou bien dans $\langle 0, T \rangle$ monotone décroissante. En partant de la première inégalité (1.1.9), on peut montrer que la distance entre un maximum et le premier zéro à droite (s'il existe) doit dépasser $\pi/2\sigma_{12}$. Donc la distance entre deux zéros consécutifs (s'ils existent) doit dépasser

$$(1.1.13) \quad \pi/2\sigma_{12}.$$

Nous voyons que, si $x(0) \geq 0$, ou bien $x = x(t)$ dans $\langle 0, +\infty \rangle$ croîtra et plus tard décroîtra d'une façon monotone en tendant vers zéro et restant positive, ou bien elle croîtra et reviendra d'une façon monotone à zéro avec une dérivée négative (c'est-à-dire il existera un $T > 0$ tel que $x(T) = 0$ et $x'(T) < 0$).

On aura une situation analogue pour $x(0) \leq 0$.

Considérons encore de plus près les solutions de (1.1.5) qui vérifient les conditions

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = \gamma.$$

(Dans le cas où $x(\tau) = 0$ on ramènera cette solution à notre cas à l'aide de la transformation $t^* = t - \tau$). Il existera alors un maximum pour un $T \in (0, \pi/2\sigma_{11})$. Si nous supposons qu'un minimum existe pour un $T_2 < 0$, alors $T_2 \leq -\pi/2\sigma_{12}$ en parlant des estimations (0.2.4) RS, nous verrons comme au n° 2.3 RS que si la condition

$$(1.1.14) \quad b_2 > B(a_1, b_1)$$

est vérifiée (où B est la même fonction que dans la condition (1.5.8) RS), la valeur absolue de ce minimum au point $t = T_2$ sera plus grande $1 + \eta$ fois que la valeur du maximum au point $t = T$, donc les oscillations — si elles existent — auront des amplitudes décroissantes exponentiellement, et par suite si $x = x(t)$ est oscillante, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Mais nous ne pouvons pas conclure — bien que ce soit très probable — que les solutions oscillantes tendent exponentiellement vers zéro (les distances des extrema consécutifs pouvant croître indéfiniment).

Nous avons ainsi démontré:

Théorème D1. *Si l'équation (1.1.5) vérifie l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (1.1.1), (1.1.14), toutes ses solutions tendent vers zéro. Ces solutions peuvent être oscillantes ou non.*

Si les hypothèses (1.1.2) et (1.1.3) sont vérifiées, alors pour les solutions non banales la distance de deux zéros consécutifs doit dépasser le nombre (1.1.13).

De même que du Théorème B1 RS résulte un théorème plus faible — le Théorème B1^{bin}, on déduit ici un théorème semblable, qu'il est superflu de formuler.

En pratique, en exécutant les calculs numériques, il faudra vérifier non pas l'inégalité (1.1.14) (car de la fonction B nous savons seulement qu'elle existe), mais l'inégalité équivalente.

$$b_2 > b_1 \Phi(a_1, b_1, b_2)$$

où la fonction Φ est effectivement donnée par la formule (1.4.1) RS.

Les remarques du n° 0.2 *RS* sur l'emploi des hypothèses locales $V_{loc}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ s'appliquent ici de même.

Des exemples banals ($x'' - 2a_1x' - b_1x = 0$ et $x'' - 2a_2x' - b_1x = 0$) où b_1 et a_i vérifient les conditions (1.1.2) et (1.1.3) montrent qu'effectivement les solutions peuvent être oscillantes ou non. Les exemples du n° 2.5 *RS* montrent que si la condition (1.1.14) n'est pas vérifiée, alors il existe des équations vérifiant les autres conditions et ayant des solutions qui ne tendent pas vers zéro.

Sous les conditions du Théorème D1 nous avons montré seulement que les solutions tendent vers zéro (quoique il est probable qu'ils tendent exponentiellement vers zéro). Au numéro 1.3 nous allons montrer que, sous des conditions un peu plus fortes, elles tendent *exponentiellement* vers zéro.

1.2. Des estimations préliminaires. Admettons toutes les hypothèses du n° 1.1, sauf (1.1.14). À sa place, admettons la condition plus forte (voir n° 1.5 *RS*)

$$(1.2.1) \quad b_1 - b_2 < a_1^2.$$

Sous ces hypothèses, nous allons montrer que toutes les solutions de l'équation (1.1.5) tendent exponentiellement vers zéro.

Si la solution $x = x(t)$ n'a qu'un nombre fini de zéros, alors — comme nous l'avons démontré au n° 1.1 — elle est, ainsi que sa dérivée, ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 < 0$. Il ne nous reste que le cas où $x = x(t)$ admet une infinité de zéros $0 < t_1 < t_2 < \dots$. Nous avons démontré que la différence $t_{k+1} - t_k$ est plus grande qu'un nombre fixe et qu'entre deux zéros consécutifs (qui sont simples) il n'y a qu'un extremum.

Nous pouvons toujours supposer qu'au point $t = 0$ il y a un maximum. Considérons donc une solution oscillante $x = x(t)$ telle que

$$(1.2.2) \quad x(0) = \alpha > 0, \quad x'(0) = 0.$$

Soit T un nombre tel que $x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, T \rangle$ et $x(T) = 0$. Comme nous le savons, $T > \pi/2\sigma_{12}$. Nous aurons alors $x'(t) < 0$ pour $t \in \langle 0, T \rangle$ et pour $t \in \langle 0, T \rangle$, l'estimation (1.1.9) sera vraie.

Considérons les solutions de l'équation

$$v_2'' - 2a_1v_2' - b_2v_2 = 0$$

qui vérifient des conditions

$$(1.2.3) \quad v_2(T) = 0, \quad v_2'(T) = \delta < 0.$$

Elles ont la forme

$$(1.2.4) \quad v_2(t) = Ce^{a_1 t} \sin \sigma_{12}(t - T)$$

où $C < 0$.

Soit τ le premier maximum à gauche de T de la fonction $v_2 = v_2(t)$. Nous aurons $\tau \in (T - \pi/\sigma_{12}, T - \pi/2\sigma_{12})$ et

$$(1.2.5) \quad T - \pi/2\sigma_{12} > 0.$$

Vu (1.1.9) et le n° 1.2 RS nous aurons pour $t \in \langle \tau, T \rangle$

$$(1.2.6) \quad 0 \geq v_2'(t) \geq x'(t), \quad 0 \leq v_2(t) \leq x(t).$$

Considérons la solution (1.1.12) de l'équation (1.1.10) qui vérifie les conditions

$$v_1(0) = a, \quad v_1'(0) = 0,$$

c'est-à-dire la fonction

$$(1.2.7) \quad v_1(t) = \frac{a}{2\sigma_{21}} [- (a_2 - \sigma_{21}) e^{(a_2 + \sigma_{21})t} + (a_2 + \sigma_{21}) e^{(a_2 - \sigma_{21})t}].$$

Nous aurons pour $t \in \langle 0, T \rangle$

$$(1.2.8) \quad x'(t) \leq v_1'(t), \quad x(t) \leq v_1(t),$$

donc, vu (1.2.5), $v_2(T - \pi/2\sigma_{12}) \leq x(T - \pi/2\sigma_{12}) \leq v_1(T - \pi/2\sigma_{12})$. Il s'ensuit

$$(1.2.9) \quad v_2(T - \pi/2\sigma_{12}) \leq v_1(T - \pi/2\sigma_{12}).$$

C'est une condition concernant le nombre C (voir (1.2.4)), mais elle ne forme pas la meilleure estimation possible.

Par exemple, si τ_1 désigne la valeur de t pour laquelle v_2 atteint son maximum dans l'intervalle $\langle T - \pi/2\sigma_{12}, T \rangle$, nous aurons aussi

$$(1.2.10) \quad v_2(\tau_1) < v_1(\tau_1).$$

Comme $T - \pi/2\sigma_{12} < \tau_1$, nous aurons $v_2(T - \pi/2\sigma_{12}) \geq v_2(\tau_1)$, $v_1(\tau_1) \geq v_1(T - \pi/2\sigma_{12})$. Donc l'inégalité (1.2.10) fournit une estimation plus forte que l'inégalité (1.2.9). On pourrait obtenir des estimations encore plus fortes en considérant l'inégalité $v_2(t) \geq v_1(t)$ pour tous les $t \in \langle T - \pi/2\sigma_{12}, T \rangle$, ou bien en employant des inégalités où interviennent les dérivées v_1' et v_2' .

D'après (1.2.4) et (1.2.7), la condition (1.2.9) donne

$$\begin{aligned} -C \exp a_1 \left(T - \frac{\pi}{2\sigma_{12}} \right) &\leq \frac{a}{2\sigma_{21}} \exp a_2 \left(T - \frac{\pi}{2\sigma_{12}} \right) \times \\ &\times \left\{ - (a_2 - \sigma_{21}) \exp \sigma_{21} \left(T - \frac{\pi}{2\sigma_{12}} \right) + (a_2 + \sigma_{21}) \exp \left[-\sigma_{21} \left(T - \frac{\pi}{2\sigma_{12}} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Comme

$$\gamma \overline{\overline{d}} |x'(T)| \leq |v_2'(T)| = -\delta = |C| \sigma_{12} \exp a_1 T,$$

en profitant du fait que $a_2 + \sigma_{21} < 0$ (ce sera la seconde raison pour laquelle nous n'obtenons pas l'estimation la meilleure possible) nous aurons

$$(1.2.11) \quad \gamma \leq |C| \sigma_{12} e^{a_1 T} \leq \alpha \Lambda(T),$$

où

$$\Lambda(T) = \frac{\sigma_{12}}{2\sigma_{21}} (\sigma_{21} - a_2) \exp \frac{a_1 \pi}{2\sigma_{12}} \cdot \exp \left[(a_2 + \sigma_{21}) \left(T - \frac{\pi}{2\sigma_{12}} \right) \right].$$

Λ est une fonction de a_1, a_2, b_1, b_2 .

Il s'ensuit des relations (1.3.12) RS (en posant $\sigma_1 = \sigma_{12}$ et $a_1 = a$) et (2.3.6) RS , indépendantes de la valeur de a_2 , que si $x(0) = 0$ et $x'(0) = \gamma$, on aura en désignant par M la valeur de l'extrémum le plus proche:

$$M \leq \gamma \Theta, \quad \text{où} \quad \Theta = \frac{1}{\sqrt{-b_1}} \exp \left[\frac{a_1}{\sigma_{11}} \operatorname{arctg} \frac{-\sigma_{11}}{a_1} \right].$$

Revenons à notre solution oscillante vérifiant les conditions (1.2.1). Nous avons supposé que la suite de ses zéros est formée, pour $t > 0$, par des nombres t_1, t_2, \dots . Posons $T_1 = t_1 > \pi/2\sigma_{12}$ et $\gamma_i \overline{\overline{d}} |x'(t_i)|$.

Évidemment, vu (1.2.11), nous aurons

$$\gamma_1 < \alpha \Lambda(T_1).$$

Désignons par \bar{t}_k l'extrémum de $x = x(t)$ dans l'intervalle (t_k, t_{k+1}) . Il s'ensuit de (1.2.6) qu'il est unique. Évidemment $\bar{t}_k - t_k < \pi/2\sigma_{11}$. Posons

$$M_k \overline{\overline{d}} |x(\bar{t}_k)|.$$

Nous aurons $M_1 \leq \gamma_1 \Theta < \alpha \Theta \Lambda(T_1)$. Posons $T_k = t_{k+1} - \bar{t}_k$. Il est $T_k > \pi/2\sigma_{12}$. Nous aurons $\gamma_2 < M_1 \Lambda(T_2) \leq \alpha \Theta \Lambda(T_1) \Lambda(T_2)$ et $M_2 < \gamma_2 \Theta \leq \alpha \Theta^2 \Lambda(T_1) \Lambda(T_2)$.

Par induction on obtient:

$$M_n < \alpha \Theta^n \Lambda(T_1) \dots \Lambda(T_n).$$

1.3. Un résultat plus fort. Vu (1.2.8) nous aurons

$$(1.3.1) \quad x(t) e^{ct} \leq v_1(t) e^{ct},$$

pour $t \in \langle 0, T \rangle$ et $\varepsilon > 0$. Désignons par T_ε la valeur de t pour laquelle la fonction $v_1(t)e^{t\varepsilon}$ atteint son premier maximum à droite de zéro. En partant de la formule (1.2.7) il est facile de calculer que

$$T_\varepsilon = \frac{1}{2\sigma_{21}} \ln \frac{-b_1 + (a_2 + \sigma_{21})\varepsilon}{-b_1 + (a_2 - \sigma_{21})\varepsilon}.$$

Donc pour chaque $\varepsilon_0 > 0$ assez petit il existe un $T(\varepsilon_0)$ tel que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ alors

$$(1.3.2) \quad 0 < T_\varepsilon < T(\varepsilon_0),$$

indépendamment de la valeur de la constante a . Evidemment — comme dans les autres raisonnements de ce paragraphe — la valeur $t = 0$ du maximum de $x = x(t)$ est sans importance.

Considérons la fonction $\psi(t) = x(t)\exp \varepsilon t$. La fonction $x = x(t)$ n'a dans $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$ qu'un extremum \bar{t}_n . Désignons par T_ε^n le maximum de $\psi(t)$ dans $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$ — on peut facilement montrer qu'il est unique pour des $\varepsilon > 0$ assez petits. Étant donné que $\exp \varepsilon t$ est, pour $\varepsilon > 0$, une fonction croissante, $T_\varepsilon^n > t_n$. Vu (1.3.2) et (1.2.8) nous avons

$$\frac{d}{dt}[x(t)e^{t\varepsilon}] = x'e^{t\varepsilon} + x\varepsilon e^{t\varepsilon} \leq v_1'e^{t\varepsilon} + v_1\varepsilon e^{t\varepsilon} = \frac{d}{dt}[v_1(t)e^{t\varepsilon}],$$

$$\text{done} \quad T_\varepsilon^n < \bar{t}_n + T_\varepsilon.$$

Vu (1.3.2), nous aurons pour chaque $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, où $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit, $T_\varepsilon^n \in \langle \bar{t}_n, \bar{t}_n + T(\varepsilon_0) \rangle$ c'est-à-dire $T_\varepsilon^n - \bar{t}_n < T(\varepsilon_0)$.

Évidemment, si nous posons $\bar{t}_0 = 0$, alors

$$\bar{t}_n = \sum_{k=1}^n (t_k - \bar{t}_{k-1}) + \sum_{k=1}^n (\bar{t}_k - t_k) \leq \sum_{k=1}^n T_k + \frac{\pi n}{2\sigma_{11}}$$

et

$$T_\varepsilon^n \leq \sum_{k=1}^n T_k + \frac{\pi n}{2\sigma_{11}} + T(\varepsilon_0).$$

Pour $t \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle$ nous aurons donc

$$(1.3.3) \quad \begin{aligned} 0 &\leq |x(t)| \exp \varepsilon t \leq |x(T_\varepsilon^n)| \exp \varepsilon T_\varepsilon^n \leq |x(\bar{t}_n)| \exp \varepsilon T_\varepsilon^n \leq \\ &\leq a \Theta^n \Lambda(T_1) \dots \Lambda(T_n) \exp \left\{ \varepsilon \left[\sum_{k=1}^n T_k + \frac{\pi n}{2\sigma_{11}} + T(\varepsilon_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\omega = \frac{\sigma_{12}(\sigma_{21} - a_2)}{2\sigma_{21}\sqrt{-b_1}},$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{a_1}{\sigma_{11}} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_{11}}{-a_1} + \frac{\pi a_1}{2\sigma_{12}} + \frac{\varepsilon\pi}{2\sigma_{11}} + \frac{\varepsilon\pi}{2\sigma_{12}},$$

$$\Omega(\varepsilon, T) = \exp \left[(a_2 + \sigma_{21} + \varepsilon) \left(T - \frac{\pi}{2\sigma_{12}} \right) \right]$$

et

$$A = a \exp[\varepsilon_0 T(\varepsilon_0)],$$

alors de (1.3.3) il s'ensuit pour $t \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle$:

$$(1.3.4) \quad |x(t)|e^{et} \leq A [\omega \exp \varphi(\varepsilon)]^n \Omega(\varepsilon, T_1) \dots \Omega(\varepsilon, T_n).$$

Nous avons $\sigma_{21}^2 = a_2^2 + b_1 \leq a_2^2$ donc $-a_2 > \sigma_{21}$ et $\sigma_{21} + a_2 < 0$. Il existe donc un $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ tel que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ alors $a_2 + \sigma_{21} + \varepsilon < 0$. Puisque $T_k > \pi/2\sigma_{12}$, nous avons $\Omega(\varepsilon, T_k) \leq 1$.

Nous avons

$$\frac{1}{\sigma_{11}} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_{11}}{-a_1} + \frac{\pi}{2\sigma_{12}} > 0,$$

il existe donc un $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ tel que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ alors $\varphi(\varepsilon) \leq \varphi(\varepsilon_2) < 0$. Vu (1.3.4) nous avons donc pour $t \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle$ $|x(t)|e^{et} \leq [\omega \exp \varphi(\varepsilon)]^n \leq [\omega \exp \varphi(\varepsilon_2)]^n$.

Donc si

$$(1.3.5) \quad \omega \leq 1,$$

alors

$$(1.3.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{et} = 0.$$

(Pour obtenir (1.3.6) il suffit que la condition $\omega \exp \varphi(\varepsilon) < 1$ soit vérifiée, mais cela conduirait à des calculs pénibles).

La condition (1.3.5) signifie que

$$(1.3.7) \quad \frac{\sigma_{12}(\sigma_{21} - a_2)}{2\sigma_{21}\sqrt{-b_1}} \leq 1.$$

En faisant disparaître les irrationalités dans (1.3.7) on obtient une inégalité dont le premier membre est un polynôme bicarré en a_2

$$(1.3.8) \quad 16(b_1 - b_2 - a_1^2)a_2^4 + 8b_1(4b_1 - 3b_2 - 3a_1^2)a_2^2 + b_1(4b_1 - b_2 - a_1^2)^2 \leq 0.$$

Nous avons supposé que

$$(1.3.9) \quad b_1 - b_2 < a_1^2,$$

donc, pourvu que $|a_2|$ soit assez grand — ce qu'on peut toujours supposer — la condition (1.3.8) est vérifiée, donc aussi (1.3.5), ce qui implique (1.3.6) pour ε assez petit. La solution $x = x(t)$ tend exponentiellement vers zéro.

Les calculs semblables peuvent donner des estimations des valeurs de $x'(t)\exp \varepsilon t$ pour des solutions oscillantes. On peut démontrer que les dérivées $x' = x'(t)$ tendent aussi exponentiellement vers zéro.

Remarquons que nous n'avons fait aucune supposition concernant le signe de $a_2^2 + b_2$. On peut avoir ou bien $a_2^2 + b_2 > 0$ ou bien $a_2^2 + b_2 \leq 0$. Mais pour des $|a_2|$ suffisamment grands on aura $a_2^2 + b_2 > 0$. De même, le signe de $a_2^2 + b_1$, n'a été pris constant que pour fixer les idées.

En résumant tous ces résultats nous obtenons:

Théorème E1. *Si l'équation (1.1.5) vérifie les hypothèses $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (1.1.1) et (1.3.9), toutes ses solutions avec leurs dérivées premières tendent exponentiellement vers zéro.*

Les remarques du n° 2.6 RS sur l'emploi des hypothèses locales V_{loc} s'appliquent aussi ici.

Nous avons démontré au n° 1.5 RS que (1.1.4) est une suite de (1.3.9). Donc le Théorème E1 a des hypothèses et la conclusion plus fortes que le Théorème D1. Il est probable que les hypothèses du Théorème D1 suffisent pour que la conclusion du Théorème E1 soit vraie, c'est-à-dire que, dans les hypothèses du Théorème E1 on pourrait prendre (1.1.14) à la place de (1.3.9). Nous avons d'ailleurs attiré l'attention du lecteur (à trois reprises) sur le fait que nos estimations des n° 1.2 et 1.3 ne sont pas les meilleures possibles (contrairement à celles du n° 1.1 et du § 2 RS).

L'hypothèse V étant assez compliquée nous énoncerons un théorème un peu moins général, mais plus élégant. En tenant compte des raisonnements du n° 0,3 RS, il s'ensuit immédiatement du Théorème E1.

Théorème E1^{bis}. *Supposons que la fonction $f = f(t, x, z)$, définie pour $t \geq 0$ et pour tous les x, z , ait des dérivées continues et que*

$$f(t, 0, 0) \equiv 0,$$

$$a_2 \leq \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}(t, x, z) \leq a_1 < 0, \quad b_2 \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, z) \leq b_1 < 0,$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes telles que

$$b_2 - b_1 < a_1^2;$$

alors toutes les solutions non banales de l'équation

$$x'' = f(t, x, x'),$$

avec leurs dérivées premières tendent exponentiellement vers zéro.

Le lecteur voudra bien formuler ce théorème pour l'équation linéaire (1.5.5) (d'une manière analogue au Théorème B1^{ter}RS).

1.4. Une autre condition. Supposons vérifiée l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Si nous avons

$$(1.4.1) \quad \sigma_{11} = a_1^2 + b_1 > 0,$$

alors, pour pouvoir appliquer le Théorème D1 ou E1 il faut introduire une nouvelle constante $a_1^* \epsilon(a_1, 0)$, telle que $a_1^* + b_1 < 0$. Mais quand a_1 croît absolument nous voyons que $B(a_1, b_1)$ croît absolument. Il est donc plausible qu'une condition semblable à (1.1.4) et n'exigeant que la condition (1.4.1) à la place de (1.1.2) et de (1.1.3) nous donnera des estimations numériquement préférables pour b_2 .

Supposons donc vérifiées les hypothèses $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (1.4.1) et (1.1.3). Alors, évidemment, (1.1.4) l'est aussi. Considérons une solution $x = x(t)$ de (1.1.5). Si elle n'est pas oscillante, nous montrerons comme au n° 1.1, qu'elle tend exponentiellement vers zéro. Supposons donc qu'elle soit oscillante. Pour fixer les idées soit $x(0) = 0, x'(0) = \gamma > 0$ et cherchons, comme aux n°s 1.2 RS et 2.3 RS, les conditions suffisantes pour que la valeur absolue du premier minimum à gauche de zéro (elle sera désignée par M_2) soit plus grande que la valeur du premier maximum à droite de zéro (elle sera désignée par M_1).

Nous aurons, pour des $t > 0$ assez petits, $x > 0$ et $x' = z > 0$, donc (1.1.6) et si $y_1 = y_1(t)$ est la solution de (1.1.7) vérifiant les conditions $y_1(0) = 0, y_1'(0) = \gamma$, les estimations (1.1.8) seront valables pour $t \geq 0$ assez petit.

Pour $t < 0$ assez petit nous aurons $x < 0, x' = z < 0$ et nous aurons l'estimation

$$f(t, x, z) \leq 2a_1z + b_2x.$$

Considérons les solutions $y = y_2(t)$ de l'équation

$$y'' - 2a_1y_2' - b_2y_2 = 0$$

qui vérifient les conditions $y_2(0) = 0, y_2'(0) = \gamma$. Vu le n° 1.1 RS nous aurons $x'(t) \geq y_2'(t), x(t) \leq y_2(t)$, pour $t \leq 0$. Évidemment

$$y_1(t) = \frac{\gamma}{\sigma_{11}} e^{a_1 t} \operatorname{sh} \sigma_{11} t, \quad y_2(t) = \frac{\gamma}{\sigma_{12}} e^{a_1 t} \sin \sigma_{12} t.$$

Nous aurons

$$y_1'(t) = \frac{\gamma}{\sigma_{11}} e^{a_1 t} [a_1 \operatorname{sh} \sigma_{11} t + \sigma_{11} \operatorname{ch} \sigma_{11} t],$$

$$y_2'(t) = \frac{\gamma}{\sigma_{12}} e^{a_1 t} [a_1 \sin \sigma_{12} t + \sigma_{12} \cos \sigma_{12} t],$$

donc, si nous supposons que les extremas qui nous intéressent sont au points $t = T_1$ et $t = T_2$, alors on doit avoir

$$a_1 \operatorname{sh} \sigma_{11} T_1 + \sigma_{11} \operatorname{ch} \sigma_{11} T_1 = 0, \quad a_1 \sin \sigma_{12} T_2 + \sigma_{12} \cos \sigma_{12} T_2 = 0,$$

donc

$$\sigma_{11} T_1 = \operatorname{Arth} \frac{\sigma_{11}}{-a_1}, \quad \sigma_{12} T_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sigma_{12}}{-a_1} - \pi.$$

Comme au n° 1.2, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M_1 &= y_1(T_1) = \frac{\gamma}{\sigma_{11}} \exp \left[\frac{a_1}{\sigma_{11}} \operatorname{Arth} \frac{a_{11}}{-a_1} \right] \cdot \operatorname{sh} \left(\operatorname{Arth} \frac{a_{11}}{-a_1} \right) \\ &= \frac{\gamma}{a_1 + \sigma_{11}} \left[\frac{a_1 - \sigma_{11}}{a_1 + \sigma_{11}} \right]^{2\sigma_{11}}, \end{aligned}$$

$$M_2 = -y_2(T_2) = \frac{\gamma}{\sqrt{-b_2}} \exp \left[\frac{a_1}{\sigma_{12}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sigma_{12}}{-a_1} \right) - \frac{\pi}{\sigma_{12}} \right].$$

Pour que $M_2 > M_1$, donc pour que les amplitudes des oscillations de $x = x(t)$ décroissent, il suffit que

$$(1.4.2) \quad \frac{1}{-b_2} \exp 2 \left[\frac{a_1}{\sigma_{12}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sigma_{12}}{-a_1} \right) - \frac{\pi}{\sigma_{12}} \right] > \frac{1}{(a_1 + \sigma_{11})^2} \left[\frac{a_1 - \sigma_{11}}{a_1 + \sigma_{11}} \right]^{\frac{a_1 - \sigma_{11}}{\sigma_{11}}}.$$

Comme au n° 2.3 *RS*, nous pouvons montrer que si la condition (1.4.2) (qui est une condition implicite sur b_2) est vérifiée, non seulement les amplitudes des oscillations successives décroissent, mais elles sont majorées par une suite géométrique de quotient < 1 , donc elles tendent vers zéro.

On peut faire des calculs semblables pour les dérivées des solutions $x = x(t)$ et on obtient le théorème suivant:

Théorème F1. *Si l'équation (1.1.5) vérifie l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (1.4.1), (1.1.3) et (1.4.2) toutes ses solutions, avec leurs dérivées premières tendent vers zéro.*

La condition (1.4.2), qui est une condition implicite (elle est analogue non pas à la condition (1.1.14), mais à (1.4.3) *RS*), est plus avantageuse au point de vue de l'estimation que (1.4.3) *RS*, mais beaucoup moins maniable qu'elle.

1.5. Les équations non oscillantes. Il nous reste encore à étudier le cas où $\sigma_{ij}^2 = a_i^2 + b_j > 0$. Il suffit donc de supposer que

$$(1.5.1) \quad \sigma_{12}^2 = a_1^2 + b_2 > 0,$$

car alors $\sigma_{ij} > 0$.

Puisque toutes les équations $w'' - 2a_i w' - b_j w = 0$ auront comme solutions

$$(1.5.2) \quad w(t) = \exp a_i t \cdot [c_1 \operatorname{sh} \sigma_{ij} t + c_2 \operatorname{ch} \sigma_{ij} t],$$

en admettant l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$ et en employant nos méthodes de majoration des solutions $x = x(t)$ de (1.1.5) par les fonctions $w = w(t)$, nous verrons que ces solutions ont les mêmes propriétés asymptotiques que les fonctions (1.5.2), c'est-à-dire nous avons :

Théorème G1. *Si l'équation (1.1.5) vérifie l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (1.1.1) et (1.5.1) toutes ses solutions (avec leurs dérivées premières) tendent exponentiellement vers zéro (pour $t \rightarrow +\infty$).*

En plus, les solutions non banales et leurs dérivées pour $t \rightarrow -\infty$ ne sont pas ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

Chaque solution non banale est pour $(-\infty, +\infty)$ ou bien monotone et ne change pas de signe, ou bien elle a un extremum et change une fois de signe.

Il serait superflu de formuler ici un théorème analogue au Théorème E1^{bis} mais nous allons le formuler pour les équations linéaires :

Théorème G1^{ter}. *Si $a = a(t)$, $b = b(t)$ sont deux fonctions continues*

$$(1.5.3) \quad a_2 \leq a(t) \leq a_1 < 0, \quad b_2 \leq b(t) \leq b_1 < 0,$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes telles que

$$(1.5.4) \quad a_1^2 + b_1 > 0,$$

toutes les solutions de l'équation

$$(1.5.5) \quad x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0$$

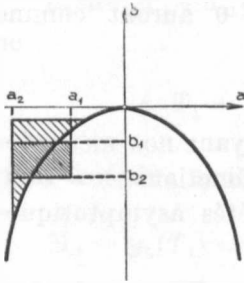
tendent (pour $t \rightarrow +\infty$) exponentiellement premières avec leurs dérivées, vers zéro et sont monotones pour des t assez grands (dépendant de la solution).

Il est probable qu'au lieu des hypothèses (1.5.3) et (1.5.4) il suffirait de supposer l'existence de deux constantes a_2 et $\varepsilon > 0$ telles que

$$(1.5.6) \quad a_2 \leq a(t), \quad b(t) \leq -\varepsilon, \quad a^2(t) + b(t) > \varepsilon,$$

(alors évidemment $a(t) \leq -\sqrt{2\varepsilon} < 0$ et $-a_2^2 + \varepsilon \leq b(t)$) et la conclusion du théorème G1^{er} resterait vraie, (on peut facilement formuler un problème analogue pour l'équation non linéaire (1.1.5)). S'il en était ainsi, alors dans le Théorème III de mon travail [6] (p. 62), dans le cas W2, 2, l'hypothèse B2 serait *superflue*.

Les conditions (1.5.6) déterminent un ensemble du plan (a, b) dans lequel la courbe $a = a(t)$, $b = b(t)$ doit être immergée. Il est probable que l'on pourrait ajouter à cet ensemble un rectangle $\langle a_2, a_1 \rangle \times \langle b_2, b_1 \rangle$, où $b_2 > B(a_1, b_1)$, $a_1 < 0$, $b_1 < 0$ et on peut avoir $a_1^2 + b_1 < 0$ (voir la figure).



1.6. Le cas $a_2 > 0$. Dans le cas

$$(1.6.1) \quad 0 < a_2 \leq a_1, \quad b_2 \leq b_1 < 0$$

les résultats obtenus pour les équations qui admettent des solutions non oscillantes sont analogues à ceux qu'on obtient pour des équations n'admettant que des solutions oscillantes (voir § 3 RS). On a:

Théorème D2. *Si l'équation (1.1.5) vérifie l'hypothèse V(a, a_2, b_1, b_2) et les conditions (1.6.1) et (1.1.14), alors toutes ses solutions non banales avec leurs dérivées premières ne sont pas bornées.*

On peut aussi trouver une estimation de la distance des zéros consécutifs (s'ils existent).

Il est probable que, sous les hypothèses de ce théorème, les solutions non banales soient non seulement non bornées, mais aussi non ε -bornées pour $\varepsilon > 0$. À ce sujet nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème E2. *Si l'équation (1.1.5) vérifie l'hypothèse V(a_1, a_2, b_1, b_2) et les conditions (1.6.1) et (1.3.9), toutes ses solutions non banales, avec leurs dérivées premières ne sont pas ε -bornée pour $\varepsilon > 0$.*

Si $a_2^2 + b_2 < 0$, $a_1^2 + b_1 > 0$ et si une condition semblable à (1.4.2) est vérifiée, il n'y aura pas de contre-résonance et un théorème analogue au Théorème F sera vrai.

Enfin on a:

Théorème G2. *Si l'équation (1.1.5) vérifie l'hypothèse V(a_1, a_2, b_1, b_2) et les conditions (1.6.1) et*

$$a_2^2 + b_2 > 0,$$

les valeurs absolues de toutes les solutions non banales avec leurs dérivées premières croissent exponentiellement pour $t \rightarrow +\infty$.

En plus, pour $t \rightarrow -\infty$, toutes ses solutions, avec leurs dérivées premières tendent exponentiellement vers zéro.

Chaque solution non banale est, pour $(-\infty, +\infty)$, ou bien monotone et ne change pas de signe, ou bien elle a un extremum et change une fois de signe.

Il est superflu de formuler ici des théorèmes locaux et des théorèmes plus simples, mais plus faibles, analogues aux Théorèmes B1^{bis} RS et B1^{ter} RS. Remarquons seulement qu'on peut poser un problème analogue à celui du n° 1.5: si l'équation (1.5.5) vérifie les hypothèses (1.6.1) et (1.5.6) la conclusion du Théorème G2 reste-t-elle vraie?

1.7. Une transformation. Soit l'équation

$$(1.7.1) \quad x'' = f(t, x, x').$$

Faisons un changement de variables

$$(1.7.2) \quad \tau = -t, \quad y(\tau) = x(-t)$$

De (1.7.1) nous obtenons l'équation

$$(1.7.3) \quad y'' = \varphi(\tau, y, y')$$

où

$$(1.7.4) \quad \varphi(\tau, x, z) = f(-\tau, x, -z).$$

La formule (1.7.4) montre que si l'équation (1.7.1) vérifie l'hypothèse $V(a_1, a_2, b_1, b_2)$, avec $a_2 \leq a_1 < 0$, alors (1.7.3) vérifie l'hypothèse $V(-a_2, -a_1, b_1, b_2)$, avec $0 < -a_1 \leq -a_2$. En tenant compte de (1.7.2) nous voyons que, sous les hypothèses du n° 1.6, les résultats des numéros 1.1 – 1.5 obtenus pour $t \rightarrow +\infty$ s'appliquent pour $t \rightarrow -\infty$, et inversement, les résultats du n° 1.6 obtenus pour $t \rightarrow +\infty$ s'appliquent, sous les hypothèses des numéros 1.1. – 1.5, pour $t \rightarrow -\infty$ (comparez, par exemple, les Théorèmes G1 et G2).

De même nous voyons que sous les hypothèses du § 3 RS les résultats du § 2 RS s'appliquent pour $t \rightarrow -\infty$ et inversement, sous les hypothèses du § 2 RS, les résultats du § 3 RS s'appliquent pour $t \rightarrow -\infty$.

2. Exemples et applications

2.1. Le but de ce paragraphe. Dans ce paragraphe nous allons montrer par quelques exemples que si l'on omet certaines hypothèses dans les théorèmes de ce travail et ceux de mes travaux [6] et [9], ces théorèmes deviendront *faux*. Nous avons eu soin de donner comme exemples des équations solubles par *quadratures*, donc ayant des solutions relativement simples et pouvant servir aussi à d'autres buts.

Le numéro 2.7 est consacré à une *application physique*.

2.2. Exemples avec $a = a(t)$ non bornée. Considérons l'équation

$$(2.2.1) \quad x'' + \left[t^2 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \right] x' + x = 0.$$

Il est facile à voir qu'elle a comme système fondamental

$$x_1(t) = \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right), \quad x_2(t) = \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \cdot \int_2^t \tau^2 \exp\left[\frac{\tau^3}{3} + \frac{1}{\tau}\right] d\tau.$$

Nous avons $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 1$, $x_1 = x_1(t)$ est même ε -bornée pour tous les $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$.

Les coefficients de l'équation linéaire (2.2.1), écrite sous la forme (1.5.5), c'est-à-dire

$$(2.2.2) \quad x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0$$

sont $a(t) = -1/2(t^2 + t^{-2} - 2t^{-1})$, $b(t) = -1$. Nous avons $b(t) = -1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = -\infty$. Ou bien si l'équation (2.2.1) est considérée sous la forme (1.1.5), alors $\partial f/\partial x = -1$, $\partial f/\partial z = -(t^2 + t^{-2} - 2t^{-1})$, et nous pouvons poser $b_1 = -1 = b_2$, $a_1 = -1$ (par exemple pour $t \geq 2$), mais il n'existe pas un a_2 pour lequel l'hypothèse $\mathbf{V}(-1, a_2, -1, -1)$ serait vérifiée.

Pour que les Théorèmes D1, E1, F1 et G1 restent vrais, on ne peut pas omettre dans leurs hypothèses la condition qu'il existe une constante a_2 telle que $a_2 \leq \partial f(t, x, z)/\partial z$ et pour que les Théorèmes F1^{lor} etc. restent vrais la fonction $a = a(t)$ doit être bornée. Ce résultat est connu — mais jusqu'ici il était une conséquence des théorèmes non élémentaires de M. Opial [3] (voir aussi Bellman [1], p. 137).

Un exemple semblable, celui de l'équation $x'' - (t^2 + t^{-2} + 2t^{-1})x' + x = 0$ où $a(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t^{-2} + 2t^{-1}) \rightarrow +\infty$, $b(t) = -1 < 0$ et dont le système

fondamental est

$$x_1(t) = \exp \frac{1}{3} t^3 \rightarrow +\infty,$$

$$x_2(t) = \exp \frac{1}{3} t^3 \cdot \int_1^{\infty} \tau^2 \exp -[\tau^3/3 + 1/\tau] d\tau \rightarrow 1,$$

montre que les Théorèmes D2, E2, G2 cessent d'être vrais si l'on omet dans leurs hypothèses la condition qu'il existe une constante a_1 telle que $\partial f(t, x, z)/\partial z \leq a_1$.

2.3. Le signe de $a = a(t)$. Des exemples banals ($x'' + x = 0$) montrent que les Théorèmes B1 et B2 RS ne sont plus vrais si l'on omet l'hypothèse que $a_1 < 0$ ou $0 < a_2$ respectivement. Ce qui correspond pour l'équation linéaire (2.2.2) à la supposition que $|a(t)| \geq A > 0$. Des exemples un peu plus compliqués montrent que la condition $|a(t)| > 0$ (dans le cas d'une équation linéaire (2.2.2)) ne suffit pas.

2.4. Exemples avec $b = b(t)$ non bornée. Considérons l'équation

$$x'' - (1 - 2a)x' - (a - a^2 - e^{2t})x = 0,$$

où a est une constante. Elle a comme solution générale

$$(2.4.1) \quad x(t) = e^{-at} [c_1 \sin e^t + c_2 \cos e^t],$$

dont la dérivée est

$$x'(t) = -ae^{-at} [c_1 \sin e^t + c_2 \cos e^t] + e^{(1-a)t} [c_1 \cos e^t - c_2 \sin e^t].$$

Posons $a(t) = 1/2 - a$ (c'est une fonction constante, donc bornée), $b(t) = a - a^2 - e^{2t}$ et $\sigma^2(t) = -a^2(t) - b(t) = -1/4 + e^{2t}$, où $\sigma(t) > 0$. Nous avons $\sigma^2(t) \geq \frac{3}{4} > 0$ pour $t \geq 0$ et

$$(2.4.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = -\infty$$

pour chaque a , donc $b(t) \leq b_1 < 0$ pour t assez grand.

Remarquons que pour chaque constante $\kappa_1 > 0$

$$(2.4.3) \quad |[\ln |a(t)|]'| = 0 \leq \kappa_1 \sigma(t),$$

Nous avons aussi (pour $a \neq 1/2$)

$$(2.4.4) \quad \Gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a(t)} [\ln \sigma^2(t)]' = 2(1/2 - a)^{-1} (1 - 1/4 e^{-2t}).$$

Nous voyons que pour $a \in (0, 1/2)$, nous avons $a(t) > 0$ et les solutions tendent vers zéro (même exponentiellement). Il faut pourtant remarquer que leurs dérivées ne sont même pas ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

Si $a = 0$, les solutions sont bornées.

Enfin, si $a \in (1/2, 1)$ et par suite $a(t) < 0$, les solutions tendent exponentiellement vers zéro, mais leurs dérivées ne sont même pas ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

Si $a(t) > 0$, donc si $a < 1/2$, on a $\Gamma(t) > 0$ pour $t \geq 0$.

D'après (2.4.2), les hypothèses des Théorèmes B1 et B2 *RS* ne sont pas vérifiées. Mais il résulte de (2.4.3) et de (2.4.4) que les conditions B3 de mon travail [6] sont remplies. Nous voyons donc que si l'on rejette dans les cas W3,1 et W3,2 du Théorème III du travail cité l'hypothèse que $b = b(t)$ soit bornée, ce théorème (dans ces cas) cesse d'être vrai.

Enfin, remarquons qu'on peut mettre chaque solution (2.4.1) sous la forme

$$x(t) = Ae^{-at} \sin(\delta + e^t),$$

où A, δ sont des constantes ($\delta \in (0, \pi)$). Si nous désignons par t_k le k -ième zéro d'une solution non banale ($A \neq 0$), alors

$$t_k = \ln(k\pi - \delta),$$

donc

$$t_{k+1} - t_k \rightarrow 0.$$

Dans le Théorème A *RS* nous avons donné une limite supérieure pour l'expression $t_{k+1} - t_k$. Cet exemple montre que, sous les conditions du Théorème A *RS* (elles sont — comme on peut le voir facilement — vérifiées par notre exemple), il n'existe pas de constante $h > 0$ indépendante de k et telle que $h \leq t_{k+1} - t_k$.

2.5. Exemples relatifs aux hypothèses B3. Considérons l'équation

$$(2.5.1) \quad x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0,$$

où

$$a(t) = \frac{1}{2} [b + B(1 + \sin \omega t)] \left\{ \frac{b^2 \cos \omega t}{2[b + B(1 + \sin \omega t)]^2} - 1 \right\},$$

$$b(t) = -[b + B(1 + \sin \omega t)]^2,$$

les nombres $b > 0, B > 0$ étant des constantes et $\omega = b^2/2B$.

Soit

$$(2.5.2) \quad \xi(t) = \int \sqrt{|b(t)|} dt = c + (b + B)t - 2B^2 b^{-1} \cos \omega t$$

où c est une constante. Soit $t = \xi_{-1}(\xi)$ la fonction inverse de $\xi = \xi(t)$. Posons $y(\xi) = x(\xi_{-1}(\xi))$. Nous aurons alors

$$(2.5.3) \quad x(t) = y(\xi(t))$$

et la fonction $y = y(\xi)$ vérifiera l'équation

$$(2.5.4) \quad y'' + y' + y = 0.$$

D'après (2.5.3) et (2.5.4), la solution générale de (2.5.1) sera

$$x(t) = A \exp \frac{1}{2} [-(b+B)t + 2B^2 b^{-1} \cos \omega t] \cdot \sin \left([\delta + (b+B)t - 2B^2 b^{-1} \cos \omega t] \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

où A, δ sont deux constantes (la constante c de (2.5.2) est amalgamée avec elles). Donc, toutes les solutions de (2.5.1) (et leurs dérivées) sont des fonctions ε -bornées pour $\varepsilon > -(b+B)/2$, donc elles tendent exponentiellement vers zéro.

Observons que

$$\sigma^2(t) = -a^2(t) - b(t) = -\frac{1}{4} [b + B(1 + \sin \omega t)]^2 (\varrho - 3)(\varrho + 1),$$

où

$$\varrho = \frac{b^2 \cos \omega t}{2[b + B(1 + \sin \omega t)]^2},$$

donc $\varrho \in \langle 0, 1/2 \rangle$ et nous voyons que $\sigma^2(t) > 5b^2/16 > 0$.

De plus

$$b_2 \overline{\frac{d}{dt}} - (b + 2B)^2 \leq b(t) \leq -b^2 \overline{\frac{d}{dt}} b_1 < 0$$

et

$$-A_2 \overline{\frac{d}{dt}} - \frac{3}{4}(b + 2B) \leq a(t) \leq -\frac{b}{4} \overline{\frac{d}{dt}} - A_1 < 0.$$

Les amplitudes des oscillations de $b(t)$ peuvent être aussi grandes qu'on veut, donc l'hypothèse

$$(2.5.5) \quad b_2 > B(a_1, b_1)$$

peut ne pas être vérifiée, et pourtant les solutions tendent exponentiellement vers zéro. Il était d'ailleurs presque évident qu'une telle situation peut se présenter effectivement.

Il est plus intéressant qu'à l'aide de pénibles calculs on peut montrer que pour certaines valeurs de B les conditions **B3** de mon travail [6] ne sont pas vérifiées. Donc dans les cas où $-A_2 \leq a(t) \leq -A_1 < 0$ et

$\Delta = a^2(t) + b(t) < 0$ les conditions **B3** ne sont pas nécessaires pour que les solutions de (2.5.1) tendent exponentiellement vers zéro.

2.6. Résumé. À l'aide d'exemples semblables on peut montrer que les conditions **B3** de mon travail [6] peuvent être vérifiées — par exemple pour $a(t) < 0$ — alors toutes les solutions tendent exponentiellement vers zéro, et pourtant la condition (2.5.5) n'est pas vérifiée.

Il existe donc des équations vérifiant les hypothèses du Théorème B1 *RS* (ou B2 *RS*), sauf la condition (2.5.5) (c'est-à-dire sauf (1.5.9) *RS*) et vérifiant toutes les hypothèses du Théorème III du travail cité; il en existe d'autres qui vérifient toutes les hypothèses du Théorème B1 *RS* (ou B2 *RS*) et ne vérifient pas celles du Théorème III (évidemment elles ne vérifient alors pas les conditions **B3**).

2.7. Une application. Considérons comme application la mise en mouvement d'une *balançoire*. Pour avoir un modèle idéalisé, supposons que ce soit une balançoire sans masse, le long de laquelle se meut un point matériel pesant de masse m et accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, passant par un anneau attaché à l'axe de révolution de la balançoire (ligne des gonds). Ce fil (sans masse) se meut dans un plan vertical de telle manière que pour chaque t la distance entre le point matériel et l'anneau soit égale à $l(t)$, où $l = l(t)$ est une fonction dérivable, donnée à l'avance. Supposons de plus que la balançoire soit sous l'action de la force de frottement des gonds lubrifiés, ayant le moment égal à $-2aq'$ (où $\alpha > 0$ est une constante et q' est la vitesse angulaire de la balançoire).

Introduisons un système de coordonnées, tel que l'anneau soit son origine, que les oscillations de la balançoire aient lieu dans le plan $x_3 = 0$ et que la force de la gravitation ait les coordonnées $0, -mg, 0$. Alors les liaisons (rhéonomes) de notre balançoire peuvent être données sous la forme

$$x_1 = l(t) \sin q, \quad x_2 = -l(t) \cos q, \quad x_3 = 0,$$

où q est l'angle entre la verticale et la direction de la balançoire (du fil auquel est suspendue la masse).

Posons

$$(2.7.1) \quad f(t, q, q') = -\frac{2l'}{l}q' - \frac{g}{l} \sin q - 2aq';$$

alors, après des calculs faciles nous obtiendrons comme équation de Lagrange du problème

$$(2.7.2) \quad q'' = f(t, q, q').$$

Nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{g}{l} \cos q, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial q'} = -(\ln l)' - a.$$

Nous voyons, que si q est suffisamment petit en valeur absolue, par exemple si $|q| < \frac{1}{4}\pi$, nous pouvons admettre $b_2 = -g/l_1$, $b_1 = -g/l_2\sqrt{2}$, où l_1 et l_2 sont les limites de $l = l(t)$, c'est-à-dire que

$$(2.7.3) \quad 0 < l_1 \leq l(t) \leq l_2.$$

Supposons en plus que

$$(2.7.4) \quad \beta \leq (\ln l)' \leq \frac{\alpha}{2},$$

où $\beta \in \langle -\alpha/2, \alpha/2 \rangle$ est une constante. Alors, si nous posons $a_1 = -\alpha - \beta$, $a_2 = -\frac{3}{2}\alpha$ l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ sera vérifiée. Donc, si $\alpha^2 < 4g/9l_2\sqrt{2}$, toutes les solutions de l'équation (2.7.2) (pour n'importe quelle fonction $l = l(t)$ vérifiant (2.7.3) et (2.7.4)) seront oscillantes et, en appliquant notre Théorème B1 *RS*, on peut donner une condition portant sur b_2 — donc aussi sur l_1 (lorsque b_1 — donc aussi l_2 est fixe) — telle que les amplitudes des oscillations doivent décroître (et la mise en mouvement de la balançoire ne soit pas possible).

En supposant que la balançoire est encore soumise à la force de la résistance de l'air, nous obtenons un résultat qualitativement semblable. Mais, si nous supposons que les gonds ne sont pas lubrifiés, et donnent une force de frottement sec, ayant le moment égal à $\mu q' / |q|$, nous obtenons comme équation du mouvement

$$(2.7.5) \quad q'' = \frac{2l'q'}{l} - \frac{g}{l} \sin q + \mu \frac{q'}{|q|}.$$

Cette équation ne vérifie pas aucune hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ mais elle (ou plus tôt une équation ayant le second membre continu et approximant convenablement le second membre de (2.7.5)) vérifie une hypothèse $\mathbf{W}(a_1, a_2, b_1, b_2, N)$ et on peut appliquer le Théorème C1 de mon travail [10].

3. Considerations méthodologiques

3.1. Les hypothèses des théorèmes. Considérons — pour fixer les idées — une équation linéaire du second ordre

$$(3.1.1) \quad x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0.$$

Des hypothèses des théorèmes concernant les propriétés asymptotiques de cette équation peuvent être de types les plus variés. Elles peuvent contenir des conditions qui s'expriment par les propriétés de l'équation (3.1.1) considérée comme une entité, et ne dépendant pas explicitement des fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ (par exemple „Si les solutions de (3.1.1) sont oscillantes, alors...”), ou des conditions s'exprimant par des propriétés des fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ seules, de leurs dérivées, intégrales, etc.. Les conditions que doivent vérifier $a = a(t)$, $b = b(t)$ peuvent être — elles aussi — de types variés. Elles peuvent concerner les ensembles du plan (a, b) dans lequel les courbes K données par les formules paramétriques

$$(3.1.2) \quad a = a(t), \quad b = b(t)$$

doivent être contenues, ou encore d'autres propriétés de ces fonctions (périodicité, croissance, etc.).

3.2. Les classes d'hypothèses. Voici quelques classes, les plus importantes, d'hypothèses concernant les ensembles du plan (a, b) dans lesquels les courbes K doivent être contenues.

Classe 0. Les conditions du type $a(t) \rightarrow \bar{a}$, $b(t) \rightarrow \bar{b}$ (où \bar{a} et \bar{b} sont deux constantes, pour $t \rightarrow +\infty$). On peut appeler *théorèmes microlocaux* les théorèmes qui les contiennent.

Classe 1. Les conditions relatives aux limites des fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ à part. Aux hypothèses de cette classe correspondent au point de vue géométrique des rectangles dans lesquels K doit être contenue.

La classe 1 peut être subdivisée en sous-classes. Les hypothèses appartenant aux diverses sous-classes auront des quantificateurs différents.

Sous-classe 1,1. Il existe des nombres fixes a_i , b_j (ou bien une famille à un paramètre de tels nombres) tels que

$$(3.2.1) \quad a_2 \leq a(t) \leq a_1 \quad b_2 \leq b(t) \leq b_1.$$

Sous-classe 1,2. Pour chaque couple a_1, b_1 (ou bien pour chaque couple a_1, b_1 contenu dans un ensemble du plan (a, b)) il existe un couple $a_2 = A(a_1, b_1)$, $b_2 = B(a_1, b_1)$ tels que (3.2.1) soit vérifiée, ou bien pour chaque triple a_1, a_2, b_1 il existe un nombre $b_2 = B(a_1, a_2, b_1)$ tel que (3.2.1) soit vérifiée. On peut appeler *théorèmes locaux* les théorèmes contenant ces hypothèses.

Sous-classe 1,3. Pour les fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ il existe des nombres a_i , b_j (qui peuvent avoir à vérifier certaines conditions supplémentaires ou peuvent ne pas être finis) tels que (3.2.1) a lieu.

Si nous désignons par T les conclusions des théorèmes, les théorèmes dont les hypothèses appartiennent aux sous-classes 1,1, 1,2 et 1,3 auront la forme symbolique abrégée:

$$1,1: (a_1, a_2, b_1, b_2) \cdot [a(t), b(t)] \cdot (3.2.1) \supset T$$

$$1,2: [a_1, b_1] \cdot (a_2, b_2) \cdot [a(t), b(t)] \cdot (3.2.1) \supset T$$

$$1,3: [a(t), b(t)] \cdot (a_1, a_2, b_1, b_2) \cdot (3.2.1) \supset T.$$

où les symboles (...) et [...] désignent le quantificateur existentiel et le quantificateur général respectivement.

Classe 2. Les conditions

$$(3.2.2) \quad \Pi[a(t), b(t); c_1, c_2] > 0,$$

où Π est indépendante de t et c_i sont des constantes (qui peuvent vérifier des conditions supplémentaires). Aux hypothèses de cette classe correspond au point de vue géométrique un ensemble du plan (a, b) (en général il n'est pas un rectangle), dans lequel la courbe K définie par la formule (3.1.2) doit être contenue.

On peut subdiviser la classe 2 de différentes manières. Par exemple de la même manière que l'on a divisé la classe 1 au point de vue des quantificateurs appliqués aux fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ et aux constantes a_i, b_j ; on peut subdiviser la classe 2 en sous-classes 2,1, 2,2 et 2,3. On peut aussi le faire au point de vue de la fonction Π , qui peut être linéaire, algébrique, etc

Classe 3 Les conditions

$$(3.2.3) \quad \Psi[t, a(t), b(t); c_1, c_2] \geq 0,$$

où c_i sont des constantes. L'interprétation des hypothèses de cette classe est incommode dans le plan (a, b) . Par contre elle est aisée dans l'espace (a, b, t) .

La classe 3 peut être subdivisée de la même manière que la classe 2.

3.3. Les relations entre les hypothèses. Pour certains théorèmes, qui sont les meilleurs possibles dans une classe d'hypothèses, il peut exister des généralisations dans d'autres classes. Par exemple, dans un théorème dont les hypothèses sont de classe 1,2, le rectangle $\langle a_2, a_1 \rangle \times \langle b_2, b_1 \rangle$ qui doit contenir la courbe K peut avoir une grandeur maximale pour que la conclusion reste vraie et cependant il peut exister des ensembles plus grands que ce rectangle, tels que, si K y est contenu, la conclusion reste vraie. En substituant cet ensemble au rectangle dans les hypothèses du théorème, nous obtiendrons un théorème de classe 2

3.4. Les théorèmes connus. Les théorèmes avec les hypothèses de classe 0 (théorèmes microlocaux) abondent depuis les travaux de Poincaré sur les propriétés asymptotiques de l'équation (3.1.1) (pour quelques informations bibliographiques voir mon travail [7], où j'ai traité un système d'équation d'ordre n , en démontrant quelques théorèmes microlocaux).

Les conditions des classes 1, 2 et 3 sont très faibles. Ce n'est que dans les 10 dernières années que l'on a démontré des théorèmes, dont les hypothèses appartiennent à ces classes. Auparavant on faisait des hypothèses supplémentaires (par exemple, la périodicité des fonctions $a = a(t)$ et $b = b(t)$, leurs croissance, etc.), ce qui conduisait à des théorèmes plus faibles, mais plus faciles à démontrer et parfois intéressants et susceptibles d'applications; mais ces théorèmes ne seraient plus vrais sous les seules hypothèses du type de classe 1–3 (voir, par exemple, Einaudi [2])

Un théorème avec hypothèses de sous-classe 1,1 à été démontré pour l'équation (3.1.1) par Starzyński [4] (voir aussi les travaux de V. M. Vinograd cité dans [8]). Un autre théorème concernant une équation linéaire du troisième ordre, avec des hypothèses analogues à la classe 1,1 a été établi par Starzyński [5] (c'est l'unique théorème connu jusqu'ici sur les propriétés asymptotiques des solutions des équations différentielles d'ordre > 2 et dont les hypothèses sont de classes 1–3).

Dans le présent travail et dans notre travail [9], nous avons énoncé des théorèmes, qui ont — sauf les Théorèmes G1 et G2 — des hypothèses de sous-classe 1,2 (c'est-à-dire ont des hypothèses locales), avec la condition supplémentaire $b_1 < 0$. Nous avons aussi démontré (voir n° 2.5 RS) que les résultats obtenus sont les meilleurs dans la classe 1 (les hypothèses de ces théorèmes ne peuvent pas être de sous-classe 1,3 — voir n° 2.5). Les théorèmes G1 et G2 ont des hypothèses de sous-classe 1,3 et sont les meilleurs dans la classe 1 (voir n° 2.4).

Mais on pourrait certainement trouver de meilleurs résultats dans les classes 2 et 3. On pourrait — pour mieux illustrer cette situation — énoncer ces hypothèses d'une façon plus géométrique. Nos théorèmes (par exemple, les Théorèmes A RS, B1 RS, ... D1, ... etc.) sont équivalents aux théorèmes de la forme „Pour chaque point $(a_1, b_1) \in A$ où A est un ensemble donné, il existe un rectangle $R = \langle a_2, a_1 \rangle \times \langle b_2, b_1 \rangle$ tel que si $K \subset R$, alors T a lieu” (où T désigne une conclusion). Il est probable que l'on obtiendrait des théorèmes vrais en remplaçant des hypothèses par des hypothèses plus faibles: ce seraient probablement des théorèmes de la forme: „Pour chaque point $(a_1, b_1) \in A$ il existe un ensem-

ble B (tel que $(a_1, b_1) \in B$, $R \subset B$ et $R \neq B$) et tel que si $K \subset B$ alors T a lieu". Ces théorèmes seraient des théorèmes avec hypothèses de classe 2,2.

Des théorèmes ayant les mêmes conclusions que ceux de ce travail ont été démontrés pour $b_1 < 0$ dans mon travail [6], aussi sous des conditions de sous-classe 1,3, mais évidemment avec des hypothèses supplémentaires concernant les dérivées des fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$. Nous avons démontré (voir § 2) que ces conditions supplémentaires n'impliquent pas des conditions de la sous-classe 1,2.

Pour le cas $b_2 > 0$, j'ai démontré dans le travail [6] des théorèmes avec hypothèses de sous-classe 1,3 (Théorème II). Dans cette classe (comme le montrent des exemples, voir [11]) ils sont les meilleurs possibles. Dans le travail [11] j'ai démontré, dans le cas $b_2 > 0$, des théorèmes avec hypothèses de sous-classe 2,3 où pour chaque couple c_1, c_2 , la courbe $H = 0$ était composée de deux demi-droites (cas quasi-linéaire). C'est le meilleur résultat possible dans cette sous-classe (2,3 (et dans la classe 2) si nous ne considérons que des hypothèses quasi-linéaires (et linéaires).

Les théorèmes dont les hypothèses sont de classe 3 peuvent être comparés à des travaux d'orfèvrerie. De tels théorèmes sont pourtant connus — voir par exemple Opial [3] (dans son travail l'opération Ψ de (3.2.3) contient pourtant une intégrale et il y a des hypothèses supplémentaires relatives à $b = b(t)$) et mon travail [8] (non pour l'équation (3.1.1), mais pour une équation de premier ordre).

3.5. Un problème. Soit l'équation différentielle

$$(3.5.1) \quad x^{(n)} - a_n(t)x^{(n-1)} - \dots - a_2(t)x' - a_1(t)x = 0,$$

généralisant l'équation (3.1.1).

Considérons l'équation algébrique en λ :

$$\lambda^n - a_n(t)\lambda^{n-1} - \dots - a_2(t)\lambda - a_1(t) = 0.$$

Elle admet exactement n solutions $\lambda_i = \lambda_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Nous appellerons *cellule de rang k* et désignerons par $Z_k^{(n)}$ l'ensemble de l'espace $E = (a_1, \dots, a_n)$, à n dimensions, pour lequel exactement k fonctions $R'\lambda_i(a_1, \dots, a_n)$ sont positives, (où $R'\lambda$ est la partie réelle de λ , voir mon travail [8]).

Désignons par $Z_{k+}^{(n)}$ l'ensemble des points appartenant à $Z_k^{(n)}$, pour lequel toutes les fonctions $\lambda_i = \lambda_i(a_1, \dots, a_n)$ $i = 1, \dots, n$ sont réelles. Posons $Z_{k-}^{(n)} = Z_k^{(n)} - Z_{k+}^{(n)}$.

Il peut arriver que $Z_{k+}^{(n)} = Z_k^{(n)}$, par exemple pour $n = 2$, $k = 1$.

La courbe de l'espace E représentée par les équations paramétriques

$$a = a_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sera désigné par K .

Dans mon travail [8] j'ai posé la question suivante: si $K \subset I'Z_k^{(n)}$ où $I'Z$ désigne l'intérieur de l'ensemble Z (et éventuellement si K est bornée), existe-t-il une famille à k paramètres exactement de solutions de (3.5.1) qui tendent exponentiellement vers zéro? Les résultats de ce travail montrent que la réponse est négative.

Mais il semble assez probable que:

1. Si la courbe bornée $K \subset I'Z_{k+}^{(n)}$ (on pourrait affaiblir la condition que K soit bornée — voir [6] et [11]; mais on ne pourrait pas se passer entièrement de cette hypothèse — voir les exemples du travail [11]), il existe une famille à k paramètres exactement de solutions de (3.5.1) qui tendent exponentiellement vers zéro (donc que des hypothèses de sous-classe 1,3 ou 2,3 peuvent suffire).

2). Si un point $(a_1^0, \dots, a_n^0) \in I'Z_{k-}^{(n)}$, il existe un δ tel que si

$$K \subset \langle a_1^0 - \delta, a_1^0 + \delta \rangle \times \dots \times \langle a_n^0 - \delta, a_n^0 + \delta \rangle.$$

il existe une famille à k paramètres exactement de solutions de (3.5.1) qui tendent exponentiellement vers zéro (donc que des hypothèses de sous-classe 1,2 ou 2,2 peuvent suffire — nous savons que si elles sont de sous-classe 1,3, donc aussi de sous-classe 2,3 — elles ne suffisent pas).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bellman, R., *Stability theory of differential equations*, New York, 1953.
- [2] Einaudi, R., *Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativa*, Atti Inst. Veneto Sci., **95** (1936), p. 425–444.
- [3] Opial, Z., *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$* , Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5** (1957), p. 847–853.
- [4] Старжинский, В. М., *Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы*, Прикл. Математика и Механика, **16** (1952), p. 369–374.
- [5] ——— *Об устойчивости неустановившихся движений в одном случае*, Прикл. Математика и Механика, **16** (1952), p. 500–504.
- [6] Tatarkiewicz, K., *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle de second ordre*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **7** (1953), p. 19–81.
- [7] ——— *Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **8** (1954), p. 25–69.

- [8] — *Quelques exemples de l'allure asymptotique des solutions d'équations différentielles*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **8** (1954), p. 105—133.
- [9] — *Sur la résonance de seconde espèce*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13** (1959), p. 33—74.
- [10] — *Sur une équation généralisant les équations linéaires avec second membre*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13** (1959), p. 75—85.
- [11] — *Un cas de stabilité conditionnelle*, à paraître dans Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **14** (1960).

Streszczenie

Paragraf 1 pracy tej poświęcony jest badaniu własności asymptotycznych równania różniczkowego

$$(1) \quad x'' = f(t, x, x'),$$

gdzie funkcja $f = f(t, x, z)$ jest określona i ciągła dla $t \geq 0$ i dla wszystkich x, z , przy czym

$$(2) \quad f(t, 0, 0) \equiv 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} < 0$$

i nie robi się żadnych założeń gwarantujących oscylacyjność rozwiązań równania (1). Zamiast (2) i (3) można zresztą zrobić nieco słabsze acz bardziej skomplikowane założenia.

Paragraf 2 poświęcony jest omówieniu kilku równań, które rozwiązują się elementarnie, a więc dają się bliżej zbadać we względnie prosty sposób.

Natomiast ostatni paragraf 3 poświęcony jest próbie klasyfikacji twierdzeń o własnościach asymptotycznych równań różniczkowych.

Резюме

§ 1 этой работы посвящён исследованию асимптотических свойств дифференциального уравнения

$$(1) \quad x'' = f(t, x, x')$$

где функция $f = f(t, x, z)$ определена и непрерывна для $t \geq 0$ и всяких x и z причём $f(t, 0, 0) \equiv 0$ и $\partial f / \partial z < 0$ или, возможно, f выпол-

няет несколько более слабые условия. Зато не делаем предпосылок, гарантирующих колебание решений уравнения (1).

§ 2 посвящён оговорению нескольких уравнений, которые решаются элементарно, так что можно их исследовать сравнительно простым способом.

Последний § 3 посвящён попытке классифицировать теоремы об асимптотических свойствах дифференциальных уравнений.