ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XIII, 3 SECTIO A 1959

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur la résonance de seconde espèce

O rezonansie drugiego rodzaju

О резонансе второго вида

0.1. Introduction. Soit une équation linéaire de second ordre à coefficients constants

$$x'' - 2ax' - bx = 0, \tag{0.1.1}$$

où

$$\sigma^2 = -a^2 - b > 0 \quad \text{et} \quad a < 0; \tag{0.1.2}$$

toutes ses solutions sont oscillantes et ε-bornées pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 < 0$ (c'est-à-dire tendent exponentiellement vers zéro).

Par contre l'équation

$$x'' - 2ax' - bx = g(t) \tag{0.1.3}$$

où les nombres a, b vérifient (0.1.2) et la fonction g est périodique, de période ω proche de $2\pi/\sigma$, peut avoir des solutions oscillantes dont l'amplitude ne décroît pas vers zéro. Cet effet est appellé *résonance (de première espèce)*.

L'équation linéaire

$$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0 \tag{0.1.4}$$

où les fonctions $a = a(t)$ et $b = b(t)$ sont continues et vérifient des conditions analogues aux conditions (0.1.2), à savoir

$$\sigma^2(t) = -a^2(t) - b(t) \geqslant \sigma^2 > 0, \quad a(t) \leqslant a < 0 \tag{0.1.5}$$

(où a, σ sont des constantes), donc

$$b(t) \leqslant -\sigma^2 - a^2 < 0$$

peut avoir des solutions ayant des propriétés analogues à celles des solutions de l'équation (0.1.1) (sous les conditions (0.1.2)). C'est-à-dire que toutes ces solutions sont oscillantes et tendent vers zéro exponentiellement (elles sont donc — à plus forte raison — stables asymptotiquement). Mais il peut arriver aussi que les solutions ne tendent pas vers zéro (et même qu'elles ne soient pas bornées). Cet effet est appellé *résonance de seconde espèce.* On peut observer la réalisation de cet effet (ou plutôt la réalisation d'un effet semblable pour des équations non linéaires) dans les mouvements d'une balançoire mise en mouvement par une personne qui se balance (voir mon travail [**3**]). On connaît d'autres applications physiques de cet effet (voir — par exemple — [**1**]).

Ce travail est consacré (§ 2) à l'étude de certaines conditions dans lesquelles l'équation non linéaire

$$x'' = f(t, x, x') \tag{0.1.6}$$

où la fonction $f = f(t, x, z)$ est continue et vérifie pour $t \geqslant T^*$ les conditions:

$$f(t, 0, 0) = 0 \tag{0.1.7}$$

et

$$b_2 \leqslant \partial f(t, x, z)/\partial x \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant \tfrac{1}{2}\partial f(t, x, z)/\partial z \leqslant a_1 \tag{0.1.8}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes négatives (ou bien où f vérifie des conditions encore plus faibles — voir n° 0.2) n'admet pas de résonance de seconde espèce (elle est alors — à plus forte raison — stable asymptotiquement). Les conditions considérées ici ne porteront que sur les bornes a_i, b_i (par exemple, donneront les valeurs de b_2 en fonction de b_1 et de a_1). De ces conditions il s'ensuivra que les solutions de (0.1.6) sont oscillantes (voir n° 2.2). Remarquons que l'équation (0.1.6), avec les conditions (0.1.7) et (0.1.8), contient comme cas particulier l'équation linéaire (0.1.4) qui vérifie les conditions

$$b_2 \leqslant b(t) \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1.$$

Le cas $b_2 > 0$ dans lequel il n'y a pas d'oscillations, donc pas de résonance, sera traité dans mon travail [**5**].

La méthode des démonstrations consistera à comparer l'équation (0.1.6) et les équations linéaires à coefficients constants.

Le problème de l'absence de la résonance de seconde espèce a été traité par nous dans le travail [**2**]. Les résultats, obtenus par d'autres méthodes ne s'appliquaient qu'aux équations linéaires (0.1.4) (et aux équations presque linéaires). Les conditions obtenues étaient d'un autre type que dans le présent travail — on y supposait seulement que $b = b(t)$ était bornée (c'est-à-dire b_2 pouvait être aussi grand que l'on voulait en valeur absolue), mais il y avait des conditions supplémentaires portant sur les dérivées $a'(t)$ et $b'(t)$ (voir la discussion et les exemples du § 2 de mon travail [**4**]).

Les résultats obtenus nous fourniront aussi des conditions *nécessaires* pour que la résonance de seconde espèce puisse avoir lieu (voir *n*° 2.5). Mais elles ne seront pas suffisantes. Les conditions pour l'existence de la résonance de seconde espèce sont peu connues (sauf pour le cas où $a(t) \equiv 0$). Nous ne les considérerons pas ici.

Nous allons aussi considérer (§ 3) les équations (0.1.4) où $a(t) > 0$ et $b(t) < 0$ ou bien les équations (0.1.6) vérifiant les conditions (0.1.7), (0.1.8) et $a_2 > 0$, $b_1 < 0$. Nous trouverons pour ces équations un effet qu'on pourrait appeler contre-résonance de seconde espèce([1]).

0.2. Les hypothèses. Soit l'équation

$$x'' = f(t, x, x'). \tag{0.2.1}$$

Appelons $\mathrm{U}(a_1, a_2, b)$ *ou* U *l'hypothèse suivante:*

1° *la fonction* $f = f(t, x, z)$ *est définie et continue pour toutes les valeurs de* x, z *et pour* $t \geqslant T^*$,

2° *il y a unicité des solutions de* (0.2.1).

3° *il existe des constantes* a_1, a_2, b *telles que pour* $t \geqslant T^*$ *on ait*

$$\begin{aligned} f(t,x,z) &\leqslant 2a_1z+bx & & x \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ f(t,x,z) &\leqslant 2a_2z+bx & & x \geqslant 0,\ z \leqslant 0, \\ 2a_2z+bx &\leqslant f(t,x,z) & \text{pour} \quad & x \leqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ 2a_1z+bx &\leqslant f(t,x,z) & & x \leqslant 0,\ z \leqslant 0. \end{aligned} \tag{0.2.2}$$

De la continuité de f il résulte que pour $t \geqslant T^*$

$$f(t, 0, 0) \equiv 0. \tag{0.2.3}$$

([1]) Les résultats de ce travail et des travaux [3], [**4**], [5] furent énoncés à la séance de la Societé Polonaise de Mathématique, section de Lublin, le 8. III. 1959 (pour le résumé voir Coll. Math. 7 (1959). p. 116 et Prace Matematyczne **4** (1959) p. 125-126) et section de Cracovie le 17. II. 1959. Dernièrement M. Olech a publié une note [*Estimates of the Exponential Growth of a Second Oder Ordinary Differential Equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. cl. III, 7, 8 (1959), p. 487-494] qui contient des résultats apparentés aux certains récultats de ce travail et du travail [**4**]. (Addition en epreuves).

Appelons $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *ou* $\mathbf{V}$ *l'hypothèse suivante:*

1° *la fonction* $f = f(t, x, z)$ *est définie et continue pour toutes les valeurs de* x, z *et pour* $t \geqslant T^*$,

2° *il y a l'unicité des solutions de* (0.2.1),

3° *il existe des constantes* a_1, a_2, b_1, b_2 *telles que pour* $t \geqslant T^*$ *on ait*

$$\begin{aligned}
&2a_2z+b_2x \leqslant f(t,x,z) \leqslant 2a_1z+b_1x & & x \geqslant 0, z \geqslant 0,\\
&2a_1z+b_2x \leqslant f(t,x,z) \leqslant 2a_2z+b_1x & & x \geqslant 0, z \leqslant 0,\\
&2a_2z+b_1x \leqslant f(t,x,z) \leqslant 2a_1z+b_2x & \text{pour} & x \leqslant 0, z \geqslant 0,\\
&2a_1z+b_1x \leqslant f(t,x,z) \leqslant 2a_2z+b_2x & & x \leqslant 0, z \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{0.2.4}$$

Évidemment $a_2 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant b_1$ et si la condition $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ est vérifiée alors $\mathbf{U}(a_1, a_2, b_1)$ l'est aussi, et nous aurons (0.2.3).

Dans la suite nous supposerons toujours que $T^* < 0$ et que T^* est assez grand en valeur absolue pour pouvoir appliquer nos raisonnements. Si cette circonstance ne se présente pas, il suffit de faire la substitution

$$t^* = t - \tau \tag{0.2.5}$$

où τ est assez grand. Évidemment cette substitution ne changera pas les propriétés asymptotiques de l'équation (0.2.1) pour $t \to \pm\infty$ — et dans la suite nous n'allons considérer que ces propriétés. Remarquons, que les premiers et derniers membres de (0.2.4) sont indépendants de t, donc après la substitution (0.2.5) les conditions $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ resteront vérifiées.

Les conditions $\mathbf{U}(a_1, a_2, b)$ et $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ont pour x, z un caractère intégral.

Appelons $\mathbf{U}_{loc}(a_1, a_2, b)$ *ou* $\mathbf{U}_{loc}$ *et* $\mathbf{V}_{loc}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *ou* $\mathbf{V}_{loc}$ *respectivement les hypothèses suivantes:*

1° *la fonction* $f = f(t, x, z)$ *est définie et continue pour* $|x| < x_0$, $|z| < z_0$ *et* $t \geqslant T^*$,

2° *il y a unicité des solutions de* (0.2.1),

3° *il existe des constantes* a_1, a_2, b_1, b_2 *telles que pour* $t \geqslant T^*$, $|x| < x_0$, $|z| < z_0$ *les conditions* (0.2.2) *ou* (0.2.4) *respectivement soient vérifiées.*

L'introduction des hypothèses $\mathbf{U}_{loc}$ et $\mathbf{V}_{loc}$ compliquant les démonstrations nous ne signalerons que les changements qu'il faudra apporter aux énoncés des théorèmes si l'on voudra que les hypothèses $\mathbf{U}_{loc}$ et $\mathbf{V}_{loc}$ remplacent les hypothèses $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$.

Dans la suite nous admettrons toujours

$$\sigma_{ij} = \sqrt{|a_i^2 + b_j|}$$

donc $\sigma_{ij} \geqslant 0$. Parfois nous ommetrons un des indices (ou même tous les deux indices) du symbole σ_{ij}.

Enfin, nous dirons qu'une fonction $x = \varphi(t)$ *tend exponentiellement vers zéro*, si elle est *ε-bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 < 0$*, c'est-à-dire s'il existe un $\varepsilon_0 < 0$ *tel* que pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t)e^{-\varepsilon t} = 0$.

0.3. Relations avec des hypothèses plus fortes. Si nous supposons que la fonction $f = f(t, x, z)$ a des dérivées continues et qu'elle vérifie les conditions (0.1.7) et (0.1.8) alors l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ sera vérifiée.

En effet en intégrant (0.1.8) nous aurons pour $x \geqslant 0$

$$b_2 x \leqslant \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \xi, z)d\xi = f(t, x, z) - f(t, 0, z) \leqslant b_1 x,$$

c'est-à-dire

$$f(t, 0, z) + b_2 x \leqslant f(t, x, z) \leqslant f(t, 0, z) + b_1 x. \tag{0.3.1}$$

De même nous aurons pour $x \leqslant 0$

$$-b_2 x \leqslant \int_x^0 \frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \xi, z)d\xi = -f(t, x, z) + f(t, 0, z) \leqslant -b_1 x,$$

c'est-à-dire

$$f(t, 0, z) + b_1 x \leqslant f(t, x, z) \leqslant f(t, 0, z) + b_2 x. \tag{0.3.2}$$

De (0.1.8) il s'ensuit, en particulier, que

$$2a_2 \leqslant \partial f(t, 0, z)/\partial z \leqslant 2a_1.$$

Vu (0.1.7) nous aurons donc pour $z \geqslant 0$

$$2a_2 z \leqslant \int_0^z \frac{\partial f}{\partial \zeta}(t, 0, \zeta)d\zeta = f(t, 0, z) - f(t, 0, 0) = f(t, 0, z) \leqslant 2a_1 z,$$

c'est-à-dire

$$2a_2 z \leqslant f(t, 0, z) \leqslant 2a_1 z \tag{0.3.3}$$

et de même pour $z \leqslant 0$

$$2a_1 z \leqslant f(t, 0, z) \leqslant 2a_2 z. \tag{0.3.4}$$

De (0.3.1), (0.3.2), (0.3.3) et de (0.3.4) résulte (0.2.4).

Étant donné que si $f \in C^1$ il y a unicité de (0.2.1), nous voyons que si $f \in C^1$ et si les conditions (0.1.7) et (0.1.8) sont vérifiées, alors l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ le sera aussi.

Enfin considérons l'équation linéaire (0.1.4). Si les fonctions $a = a(t)$ et $b = b(t)$ sont continues et vérifient les conditions

$$a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1, \quad b_2 \leqslant b(t) \leqslant b_1, \tag{0.3.5}$$

il y a unicité et les conditions (0.2.4) (ou bien (0.1.7) et (0.1.8)) seront verifiées, donc l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, a_2)$ le sera aussi.

On peut montrer de même que si $f \epsilon C^1$, la condition (0.1.7) et les conditions

$$\partial f(t, x, z)/\partial x \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant \tfrac{1}{2}\partial f(t, x, z)/\partial z \leqslant a_1 \tag{0.3.6}$$

sont vérifiées, l'hypothèse $\mathbf{U}(a_1, a_2, b_1)$ l'est aussi.

0.4. Une mèthode d'interpretation. Étant donné que l'équation linéaire (0.1.4) fournira l'application la plus simple et la plus intéressante de nos résultats, le lecteur fera bien d'interpréter nos hypothèses à l'aide de la méthode esquissée dans [**2**], p. 27 et suivantes. Nous faisons correspondre à chaque équation linéaire

$$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0$$

une courbe dans le plan (a, b) donnée par les équations paramétriques

$$a = a(t), \quad b = b(t).$$

Par exemple, si la condition (0.3.5) est vérifiée et $a_1 < 0$, $b_1 < 0$, cette courbe sera contenue dans un rectangle $\langle a_2, a_1\rangle \times \langle b_1, b_1\rangle$ dans le III$^{\rm e}$ quadrant du plan. Si la condition supplémentaire

$$a_2^2 + b_1 < 0$$

est vérifiée, ce rectangle sera situé au-dessous de la parabole $b = -a^2$ (voir la figure 3, p. 66).

Pour l'équation non linéaire (0.2.1), cette méthode conduit à une interprétation qui est moins commode. Considérons la transformation de l'espace (t, x, z) dans le plan (a, b) donné par les équations

$$a = \tfrac{1}{2}\partial f(t, x, z)/\partial z, \quad b = \partial f(t, x, z)/\partial x. \tag{0.4.1}$$

Alors — par exemple — la vérification des conditions (0.1.8) signifie que l'image du demi-espace $\langle T^*, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ fournie par (0.4.1) est contenue dans le rectangle $\langle a_2, a_1\rangle \times \langle b_2, b_1\rangle$.

1. Considérations préliminaires

1.1. Un lemme sur l'estimation. Soit $f = f(t, x, z)$ une fonction continue et supposons que les solutions de l'équation

$$x'' = f(t, x, x')$$

sont définies univoquement par les conditions initiales.

Supposons que pour $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et $z > 0$ nous avons

$$f(t, x, z) < 2az + bx. \tag{1.1.1}$$

Considérons les solutions des équations différentielles

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1.1.2}$$

$$y'' - 2ay' - by = 0 \tag{1.1.3}$$

qui sont déterminées univoquement par les conditions initiales

$$x(0) = y(0) = \gamma \geqslant 0, \quad x'(0) = y'(0) = \beta > 0. \tag{1.1.4}$$

Vu (1.1.1) et (1.1.4) nous aurons $x''(0) < y''(0)$. Donc il existe le plus grand t_1 (il pourrait être $t_1 = +\infty$) tel que pour $t \epsilon (0, t_1)$

$$0 < x'(t) < y'(t), \quad 0 < x(t) < y(t). \tag{1.1.5}$$

Soit T_1 le plus grand nombre tel que $x'(t) > 0$ dans $(0, T_1)$ et soit T_2 le plus grand nombre tel que $y'(t) > 0$ dans $(0, T_2)$. Vu (1.1.4) nous aurons $x(t) > 0$ dans $(0, T_1)$ et $y(t) > 0$ dans $(0, T_2)$. Posons

$$T = \min[T_1, T_2].$$

Nous avons $t_1 \leqslant T$. Nous démontrerons que $t_1 = T = T_1 < T_2$. Donc nous démontrerons le lemme suivant:

Lemme. *Supposons que la condition* (1.1.1) *soit vérifiée pour* $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ *et* $z > 0$. *Si les conditions* (1.1.4) *sont vérifiées, alors les inégalités* (1.1.5) *sont vérifiées dans l'intervalle* $(0, T_1)$.

Démonstration du Lemme. Soit $\varepsilon \epsilon (0, t_1)$ et considérons la solution $y = y_1(t)$ de (1.1.3) qui vérifie les conditions

$$y_1(\varepsilon) = x(\varepsilon), \quad y_1'(\varepsilon) = x'(\varepsilon). \tag{1.1.6}$$

Vu (1.1.5) on a $x(\varepsilon) > 0$, $x'(\varepsilon) > 0$. Soit $(t_\varepsilon, T_\varepsilon)$ le plus grand intervalle contenant ε dans lequel $y_1'(t) > 0$. Nous avons $t_\varepsilon < \varepsilon$. Pour $\varepsilon \to 0$ nous aurons $T_\varepsilon \to T_2$.

Évidemment

$$x'(\varepsilon)/x(\varepsilon) = y_1'(\varepsilon)/y_1(\varepsilon). \tag{1.1.7}$$

Posons $T_\varepsilon^1 = \min[T_\varepsilon, T_1]$. Vu (1.1.1), pour $t \epsilon (t_\varepsilon, T_\varepsilon^1)$ nous aurons

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{x}\right) = \frac{xx'' - x'^2}{x^2} = \frac{f(t, x, x')}{x} - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 < \frac{2ax' + bx}{x} - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \tag{1.1.8}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = \frac{y_1 y_1'' - y_1'^2}{y_1^2} = \frac{2ay_1' + by_1}{y_1} - \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2. \tag{1.1.9}$$

Vu (1.1.6)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{x}\right)\bigg|_{t=\varepsilon} < \frac{d}{dt}\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)\bigg|_{t=\varepsilon}. \tag{1.1.10}$$

De (1.1.7) il s'ensuit qu'il existe le plus grand $t_2 \leqslant T_1$ tel que pour $t \in (\varepsilon, t_2)$ on a

$$0 < x'(t)/x(t) < y_1'(t)/y_1(t), \tag{1.1.11}$$

c'est-à-dire $(\ln x(t))' < (\ln y_1(t))'$. Donc vu (1.1.6) on a pour $t \in (\varepsilon, t_2)$

$$0 < x(t) < y_1(t). \tag{1.1.12}$$

Multipliant (1.1.11) et (1.1.12) nous aurons

$$0 < x'(t) < y_1'(t)$$

pour $t \in (\varepsilon, t_2)$.

Si $t_2 = T_\varepsilon^1$ la démonstration est achevée. Si non, nous démontrerons qu'il existe deux fonctions $y = y^\circ(t)$ et $y = y^*(t)$ définies dans (ε, T^1) non nécéssairement continues, dont l'ensemble de discontinuité Γ est fermé dans $(\varepsilon, T_\varepsilon^1)$ et de mesure nulle; pour chaque intervalle de continuité il existe une constante $c \in (0, 1\rangle$ telle que

$$y^\circ(t) = cy_1(t) \tag{1.1.13}$$

et

$$y^*(t) = y^{\circ\prime}(t).$$

Ces fonctions seront telles que dans $(\varepsilon, T_\varepsilon')$

$$0 < x(t) \leqslant y^\circ(t), \quad 0 < x'(t) \leqslant y^*(t) \tag{1.1.14}$$

et dans Γ

$$0 < x(t) = y^\circ(t), \quad x'(t) = y^*(t). \tag{1.1.15}$$

Nous aurons même plus, à savoir dans $(\varepsilon, T_\varepsilon^1) - \Gamma$

$$0 < \frac{x'(t)}{x(t)} < \frac{y^*(t)}{y^\circ(t)} = \frac{y^{\circ\prime}(t)}{y^\circ(t)} = \frac{y_1'(t)}{y_1(t)} \tag{1.1.16}$$

donc

$$x'(t) < y^*(t), \quad x(t) < y^\circ(t)$$

et dans Γ

$$0 < \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{y^*(t)}{y^\circ(t)}. \tag{1.1.17}$$

En effet posons $y^\circ(t) = y_1(t)$ et $y^*(t) = y_1'(t)$ pour $t \epsilon (\varepsilon, t_2)$. Si $t_2 = T_\varepsilon^1$ la démonstration est achevée. Si non, soit (ε, t_3) le plus grand intervalle dans lequel nous avons (1.1.14) et (1.1.16) ou (1.1.17). Évidemment $t_2 \leqslant t_3$.

Les limites

$$y_0^0 = \lim_{t \to t_3 - 0} y^\circ(t) > 0, \quad y_0^* = \lim_{t \to t_3 - 0} y^\circ(t) \tag{1.1.18}$$

existent. C'est évident si $t \epsilon (\varepsilon, T_\varepsilon) - \Gamma'$. Étant donné que la fonction $2az + bx$ est bornée dans le voisinage du point $(x(t_3), x'(t_3))$ ces limites existent même si $t_3 \epsilon \Gamma'$.

Vu (1.1.16) et (1.1.17) nous avons

$$\frac{x'(t_3)}{x(t_3)} \leqslant \frac{y_0^*}{y_0^0}.$$

1) Soit

$$\frac{x'(t_3)}{x(t_3)} < \frac{y_0^*}{y_0^0}. \tag{1.1.19}$$

Désignons alors par y_2 cette solution de (1.1.3) qui vérifie les conditions

$$y_2(t_3) = y_0^0, \quad y_2'(t_3) = y_0^*.$$

Pour τ assez petit nous avons alors $y_2(t) = y^\circ(t)$ dans $(t_3 - \tau, t_3)$, donc $y_2(t) = cy_1(t)$ ou $c \epsilon (0, 1)\rangle$.

Prolongeons y° et y^* en posant $y^\circ(t) = y_2(t)$, $y^*(t) = y_2'(t)$ pour $t \epsilon (t_3, t_3 + \tau_1)$ où τ_1 est assez petit. Vu (1.1.19) nous aurons (1.1.16) et (1.1.14) et $t_3 \epsilon (\varepsilon, T_\varepsilon) - \Gamma$.

2) Supposons que (1.1.19) n'est pas verifié, c'est-à-dire que nous avons

$$\frac{x'(t_3)}{x(t_0^0)} = \frac{y_0^*}{y_3}. \tag{1.1.20}$$

2,1). Supposons en plus que $t_3 \epsilon \Gamma - \Gamma'$. Posons alors pour $t \geqslant t_3$

$$y_4(t) = \frac{x(t_3)}{y_0^0} y_3(t)$$

où $y_3(t) = cy_1(t)$ est le prolongement de la solution de (1.1.3) qui forme la fonction y° entre le dernier point de discontinuité à gauche de t_3 et t_3.

Nous avons $y_4(t_4) = x(t_3)$ et $y_4'(t_3) = x(t_3)y_0^*/y_0^0$, donc vu (1.1.18) et (1.1.20)

$$y_4'(t_3) = x'(t_3).$$

Nous avons $0 < x(t_3)/y_0^0 \leqslant 1$ donc

$$y_4(t) = c_1 y_1(t), \quad \text{où } c_1 \epsilon (0, 1\rangle.$$

Prolongeons y° et y^* en posant

$$\text{(1.1.21)} \qquad y^\circ(t) = y_4(t), \quad y^*(t) = y_4'(t)$$

pour $t \epsilon (t_3, t_3 + \tau_2)$ ou τ_2 est assez petit. En partant du point t_3 a la place de ε nous allons obtenir (1.1.16) donc (1.1.14) dans $(t_3, t_3 + \tau_2)$.

Remarquons que si $y^\circ(t) = c_i y_1(t)$ pour $t = t_i$ et $t_1 < t_2$ alors

$$\text{(1.1.22)} \qquad 0 < c_2 \leqslant c_1 \leqslant 1.$$

2,2). Enfin supposons (1.1.20) et en plus que $t_3 \epsilon \Gamma''$. Il existe alors une suite croissante $t^n \to t_3$, $t^n \epsilon \Gamma$. Supposons que $y^0 = c^n y_1(t)$ pour $t = t^n$. Vu (1.1.22) la suite due c^n sera décroissante et bornée et il existera alors la limite

$$c_0 = \lim_{n\to\infty} c^n.$$

Posons pour $t \epsilon \langle t_3, t_3 + \tau_3)$ et τ_3 assez petit

$$y_4(t) = c_\circ y_1(t).$$

La fonction y_4 aura les mêmes propriétés que dans le cas 2,1 et nous pouvons prolonger y° et y^* en admettant (1.1.21).

Ainsi nous avons prolongé les fonctions y° et y^* au dela du point t_3. Elles vérifieront dans $(\varepsilon, t_3 + \tau_\circ)$ où $\tau_\circ$ est un nombre positif les conditions (1.1.14) et (1.1.16) ou (1.1.17) contrairement à notre supposition. Les fonctions y° et y^* ont les propriétés (1.1.4), (1.1.15), (1.1.16) et (1.1.17), donc existent dans $(\varepsilon, T_\varepsilon^1)$.

Étant donné que dans (1.1.13) on a $c \epsilon (0, 1\rangle$ et de (1.1.14) il s'ensuit que dans $(\varepsilon, T_\varepsilon^1)$ nous aurons

$$\text{(1.1.23)} \qquad 0 < x(t) \leqslant y_1(t), \quad 0 < x_1'(t) \leqslant y_1'(t).$$

Passons à la limite avec $\varepsilon \to 0$. Nous obtenons de (1.1.23)

$$\text{(1.1.24)} \qquad 0 < x(t) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} y_1(t) = y(t) \qquad 0 < x'(t) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} y_1'(t) = y'(t)$$

dans $(0, T)$.

Nous avons $T = T_1$. En effet, si nous aurions $T_1 > T_2 = T$ alors $y'(T) = 0$ et $x'(T) > 0$ contrairement à (1.1.24).

Supposons maintenant qu'à la place de (1.1.1) nous ne supposons que

(1.1.25) $$f(t, x, z) \leqslant 2az + bx$$

pour $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Nous avons alors pour $\eta > 0$

$$f(t, x, z) < 2(a+\eta)z + (b+\eta)x.$$

Soit $y = y_\eta(t)$ la solution de l'équation

$$y'' - 2(a+\eta)y' - (b+\eta)y = 0.$$

À l'aide du procédé décrit ci-dessus nous obtenons une estimation dans un intervalle $(0, T_\eta)$

$$0 < x(t) \leqslant y_\eta(t), \quad 0 < x'(t) \leqslant y_\eta'(t).$$

Étant donné que les solutions sont des fonctions continues d'un paramètre contenu dans le second membre de l'équation différentielle, en passant à la limite avec $\eta \to 0$, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme. *Supposons que la condition* (1.1.25) *soit vérifiée pour* $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ *et* $z \geqslant 0$. *Si les conditions* (1.1.4) *sont vérifiées, alors nous aurons*

$$0 < x(t) \leqslant y(t), \quad 0 < x'(t) \leqslant y'(t)$$

pour $t \in (0, T_1)$.

Le même procédé peut être employé si nous avons à la place de (1.1.25)

(1.1.26) $$2az + bx \leqslant f(t, x, z)$$

pour $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et $z > 0$.

De même si (1.1.25) soit vérifié pour $t \leqslant 0$, $x \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$ et si à la place de (1.1.4) nous avons

(1.1.27) $$x(0) = y(0) = \gamma \leqslant 0, \quad x'(0) = y'(0) = \beta > 0,$$

on peut démontrer le lemme suivant

Lemme. *Supposons que la condition* (1.1.26) *soit vérifiée pour* $t \leqslant 0$, $x \leqslant 0$ *et* $z \geqslant 0$. *Si les conditions* (1.1.27) *sont vérifiées, alors nous aurons*

$$x(t) \leqslant y(t) < 0, \quad x'(t) \geqslant y'(t) > 0$$

pour $t \in (T, 0)$, *où* T *est le plus grand nombre négatif tel que* $y'(T) = 0$.

1.2. Un autre lemme. Supposons maintenant que la condition (1.1.1) soit vérifiée pour $t \geqslant 0$, $x > 0$, $z \leqslant 0$ et que x et y soient des solutions de (1.1.2) et de (1.1.3) respectivement, qui vérifient les conditions initiales

(1.2.1) $$x(0) = y(0) = \gamma > 0, \quad x'(0) = y'(0) = \beta \leqslant 0.$$

Supposons que

(1.2.2) $$b < 0.$$

Alors si $\beta = 0$ nous aurons $x''(0) < y''(0) < 0$, donc il existe le plus grand t_1 tel que pour $t \in (0, t_1)$ nous aurons

(1.2.3) $$x'(t) < y'(t) < 0$$

(1.2.4) $$y(t) > x(t) > 0.$$

Si $\beta < 0$ nous aurons aussi les mêmes formules.

Soit T_1 le plus grand nombre tel que $x(t) > 0$ dans $(0, T_1)$ et soit T_2 le plus grand nombre tel que $y(t) > 0$ dans $(0, T_2)$. Nous avons $x'(t) < 0$ pour $t \in (0, T_1)$. En effet soit $\tau \in (0, T_1)$ le plus petit nombre positif tel que $x'(\tau) = 0$. Alors vu (1.2.2) nous aurons $x''(\tau) < 0$, donc pour $t \in (\tau - \varepsilon, \tau)$ (où ε est assez petit) nous aurons $x'(t) > 0$ contrairement à notre hypothèse concernant le nombre τ. De même $y'(t) < 0$ pour $t \in (0, T_2)$.

Posons

$$T = \min[T_1, T_2].$$

Lemme. *Supposons que la condition* (1.1.1) *soit vérifiée pour* $t \geqslant 0$, $x > 0$ *et* $z \leqslant 0$. *Si les conditions* (1.2.1) *sont vérifiées, alors nous aurons* (1.2.3) *et* (1.2.4) *pour* $t \in (0, T_1)$.

Démonstration du lemme. Vu (1.2.1) nous avons

$$\frac{x'(0)}{x(0)} = \frac{y'(0)}{y(0)} \leqslant 0$$

et on peut facilement calculer (voir (1.1.8) et (1.1.9)) que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{x}\right)\bigg|_{t=0} < \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{y}\right)\bigg|_{t=0}$$

Il s'ensuit qu'il existe le plus grand $t_2 \leqslant T$ tel que

(1.2.5) $$\frac{x'(t)}{x(t)} < \frac{y'(t)}{y(t)} < 0.$$

Nous avons donc dans $(0, t_2)$

$$[\ln x(t)]' < [\ln y(t)]'$$

et

$$0 < x(t) < y(t). \tag{1.2.6}$$

De (1.2.5) et de (1.2.6) il ne s'ensuivent pas des estimations sur les dérivées.

Si $t_2 = T$ la démonstration est achevée. Si $t_2 < T$, alors

$$\frac{x'(t_2)}{x(t_2)} = \frac{y'(t_2)}{y(t_2)} < 0$$

et en employant le même procédé qu'au numero précedent et en construisant une fonction auxiliaire $y°$ nous montrerons que (1.2.4) est vérifié pour $t \epsilon (0, T_1)$.

Un passage à la limite — le même qu'au numéro précédent — nous démontre le lemme suivant.

Lemme. *Supposons que la condition* (1.1.25) *soit vérifiée pour* $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ *et* $z \leqslant 0$. *Si les conditions* (1.2.1) *sont vérifiées, alors nous aurons*

$$0 < y(t) \leqslant x(t)$$

pour $t \epsilon (0, T_1)$.

De même on peut démontrer le lemme suivant.

Lemme. *Supposons que la condition* (1.1.26) *soit vérifiée pour* $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ *et* $z \leqslant 0$. *Si les conditions* (1.2.1) *sont vérifiées, alors nous aurons*

$$0 < y(t) \leqslant x(t)$$

dans le plus grand intervalle $(0, T)$ *dans lequel* $y(t) > 0$.

On peut obtenir des estimations semblables, si nous supposons que (1.1.25) ou (1.1.26) sont vérifiées pour $t \leqslant 0$, $x \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$.

A l'aide des considérations assez compliquées on peut obtenir aussi des estimations de la dérivée de x. Elles ne nous seront pas nécessaires.

1.3. Une propriété des équations linéares. Supposons maintenant que $a < 0$, $b_2 < b_1$ soient trois constantes. Supposons en plus que

$$a^2 + b_1 < 0, \tag{1.3.1}$$

donc $b_1 < 0$. Posons

$$\sigma_i = \sqrt{-a^2 - b_i}.$$

Puisque $b_2 < b_1 < 0$ nous aurons

$$\sigma_2 > \sigma_1 > 0. \tag{1.3.2}$$

Soient deux équations linéaires à coefficients constants

$$x_i'' - 2ax' - b_i x_i = 0 \qquad i = 1, 2, \tag{1.3.3}$$

et considérons leus solutions telles que

$$x_1(0) = 0 = x_2(0), \quad x_1'(0) = \gamma = x_2'(0), \tag{1.3.4}$$

où la constante $\gamma > 0$.

Les solutions de (1.3.3) vérifiant (1.3.4) ont la forme

$$x\,(t) = \frac{\gamma}{\sigma_i} e^{at} \sin \sigma_i t. \tag{1.3.5}$$

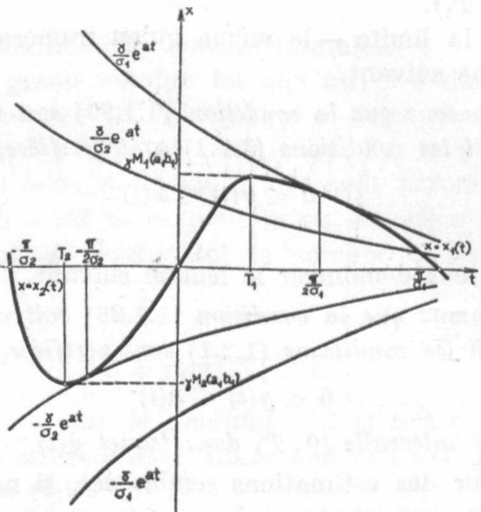

Fig. 1

Nous aurons aussi

$$x_i'(t) = \frac{\gamma}{\sigma_i} e^{at} [a \sin \sigma_i t + \sigma_i \cos \sigma_i t]. \tag{1.3.6}$$

Nous avons supposé que $\gamma > 0$. Il existe alors deux constantes T_1, T_2 telles que la fonction $x = x_1(t)$ est croissante pour $t \in \langle 0, T_1 \rangle$ et qu'elle a pour $t = T_1$ un maximum local, la fonction $x = x_2(t)$ est croissante pour $t \in \langle T_2, 0 \rangle$ et elle a pour $t = T_2$ un minimum local.

Ces minima et maxima sont évidemment des fonctions des nombres b_i. Posons

$$M_i(a, b_i) \underset{df}{=} |x_i(T_i)|/\gamma.$$

Nous allons chercher les conditions sous lesquelles nous aurons pour des constantes $\eta > 0$ assez petites

$$|x_2(T_2)| \geqslant (1+\eta)|x_1(T_1)|, \tag{1.3.7}$$

c'est-à-dire $M_2(a, b_2) \geqslant (1+\eta) M_1(a, b_1)$.

Nous aurons évidemment

$$-\pi/\sigma_2 < T_2 < -\pi/2\sigma_2, \quad 0 < T_1 < \pi/2\sigma_1. \tag{1.3.8}$$

D'après la définition des nombres T_i nous aurons $x_i'(T_i) = 0$, donc, d'après (1.3.6), il vient

$$\sigma_i^{-1} \exp aT_i \cdot [a \sin\sigma_i T_i + \sigma_i \cos\sigma_i T_i] = 0, \qquad i = 1, 2,$$

c'est-à-dire $a \sin\sigma_i T_i + \sigma_i \cos\sigma_i T_i = 0$ et

$$\operatorname{tg}\sigma_i T_i = -\sigma_i/a. \tag{1.3.9}$$

Vu (1.3.8) il s'ensuit

$$\sigma_1 T_1 = \operatorname{arctg}(-\sigma_1/a), \quad \sigma_2 T_2 = \operatorname{arctg}(-\sigma_2/a) - \pi. \tag{1.3.10}$$

De (1.3.9) il résulte, à l'aide de la formule $(\sin\beta)^{-2} = 1 + (\operatorname{tg}\beta)^{-2}$ que

$$\sin\sigma_1 T_1 = \sigma_1/\sqrt{-b_1}, \quad \sin\sigma_2 T_2 = -\sigma_2/\sqrt{-b_2}. \tag{1.3.11}$$

De ces formules et de (1.3.5) on tire

$$\begin{aligned} \gamma M_1(a, b_1) &= x_1(T_1) = \frac{\gamma}{\sqrt{-b_1}} \exp\left[\frac{a}{\sigma_1} \operatorname{arctg}\frac{\sigma_1}{-a}\right] \\ \gamma M_2(a, b_2) &= x_2(T_2) = \frac{\gamma}{\sqrt{-b_2}} \exp\left[\frac{a}{\sigma_2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sigma_2}{-a} - \pi\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Étant donné que $\gamma > 0$, la condition (1.3.7) sera vérifiée si

$$\frac{1}{\sqrt{-b_2}} \exp\left[\frac{a}{\sigma_2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sigma_2}{-a} - \pi\right)\right] \geqslant \frac{1+\eta}{\sqrt{-b_1}} \exp\left[\frac{a}{\sigma_1} \operatorname{arctg}\frac{\sigma_1}{-a}\right]. \tag{1.3.13}$$

1.4. Conclusions. Posons

$$\Phi(a, b_1, b_2) = \exp\left\{(-2a)\left[-\frac{1}{\sigma_2} \operatorname{arctg}\frac{\sigma_2}{-a} + \frac{1}{\sigma_1} \operatorname{arctg}\frac{a_1}{-a} + \frac{\pi}{\sigma_2}\right]\right\} \tag{1.4.1}$$

alors la condition (1.3.13) sera vérifiée si

$$b_2 \geqslant b_1 \Phi(a, b_1, b_2)\cdot(1+\eta)^{-2}. \tag{1.4.2}$$

Donc, si la condition (1.3.7) est vérifiée, (1.4.2) l'est aussi et si (1.3.7) n'est pas vérifiée, alors (1.4.2) ne l'est pas non plus. C'est-à-dire (1.3.7) équivaut à (1.4.2).

Notons que la condition (1.4.2) ne dépend pas (comme il était à prévoir) du nombre γ. C'est-à-dire si un couple b_1, b_2 vérifie (1.4.2) pour un a donné, alors (1.3.7) sera vérifié pour tous les $\gamma > 0$ (pour tous les angles d'incidence que font les solutions $x = x_i(t)$ avec l'axe des t).

Supposons maintenant que la condition

$$b_2 > b_1 \Phi(a, b_1, b_2) \tag{1.4.3}$$

soit vérifiée. Alors il est clair qu'il existe un $\eta > 0$ tel que (1.4.2), donc (1.3.7), soit vérifiée. Évidemment, quand (1.3.7) est vérifiée la condition (1.4.3) l'est aussi. Donc les formules (1.3.7) et (1.4.3) sont équivalentes.

Il est aisé de voir que si la condition

$$b_2 < b_1 \Phi(a, b_1, b_2) \tag{1.4.4}$$

est vérifiée, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$(1+\eta)|x_2(T_2)| \leqslant |x_1(T_1)| \tag{1.4.5}$$

et que la formule (1.4.5) implique (1.4.4).

Évidemment

$$|x_2(T_2)| < |x_1(T_1)| \tag{1.4.6}$$

équivaut à (1.4.5), donc à (1.4.4).

1.5. Des formules simplifiées. La formule (1.4.2) étant assez compliquée, il est intéressant de trouver d'autres formules semblables.

Vu (1.3.8) des formules (1.3.11) on obtient

$$T_1 = \frac{1}{\sigma_1} \arcsin \frac{\sigma_1}{\sqrt{-b_1}}, \qquad T_2 = \frac{1}{\sigma_2} \arcsin \frac{\sigma_2}{\sqrt{-b_2}} - \frac{\pi}{\sigma_2}.$$

De ces formules, de (1.3.10) et de (1.3.5) on obtient des formules semblables à (1.3.12), d'où résulte une formule analogue à (1.3.13) et équivalente à (1.4.3) ou (1.3.7), à savoir

$$b_2 > b_1 \exp\left\{(-2a)\left[\frac{1}{\sigma_1}\arcsin\frac{\sigma_1}{\sqrt{-b_1}} - \frac{1}{\sigma_2}\arcsin\frac{\sigma_2}{\sqrt{-b_2}} + \frac{\pi}{\sigma_2}\right]\right\}.$$

Trouvons maintenant des formules qui impliquent la relation (1.4.3) sans lui être équivalentes. Nous avons $\Phi(a, b_1, b_2) > 0$ et $\sigma_1^{-1} \operatorname{arctg}[\sigma_1(-a)^{-1}] > 0$, donc

$$(1.5.1) \qquad \Phi(a, b_1, b_2) > \exp\left\{\frac{2a}{\sigma_2}\left[-\pi + \operatorname{arctg}\frac{\sigma_2}{-a}\right]\right\} \underset{df}{=} \Phi_1(a, b_2).$$

Nous voyons que si

$$(1.5.2) \qquad b_2 > b_1 \Phi_1(a, b_2)$$

— ou bien si $b_2/\Phi_1(a, b_2) > b_1$, les conditions (1.4.3) et (1.3.7) sont vérifiées.

Puisque $\sigma_2 > \sigma_1$ et que la fonction

$$(1.5.3) \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{\xi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\beta}$$

est une fonction décroissante pour $\beta > 0$ et $\xi > 0$, nous aurons

$$(1.5.4) \qquad \Phi(a, b_1, b_2) > \exp\frac{-2\pi a}{\sigma_2}.$$

Donc si la condition

$$(1.5.5) \qquad \Phi(a, b_2) \underset{df}{=} b_2 \exp\frac{2\pi a}{\sigma_2} > b_1$$

est vérifiée, la condition (1.3.7) l'est aussi.

Nous allons donner une condition — très commode, mais assez forte. Je dis que si

$$(1.5.6) \qquad b_1 - b_2 < a^2$$

la condition (1.3.7) sera vérifiée. En effet, (1.5.6) équivaut à

$$(1.5.7) \qquad b_1\left[1 + \frac{a^2}{-b_1}\right] < b_2.$$

Remarquons que si la condition (1.5.6) est vérifiée alors

$$\sqrt{-b_1} > \sqrt{-a^2 - b_2} = \sigma_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{-2b_1}} < \frac{\sqrt{2}}{2\sigma_2} < \frac{\pi}{\sigma_2}.$$

Vu $1+\xi^2/2 < e^{\xi}$ pour $\xi > 0$ et (1.5.4) nous aurons

$$1+\frac{a^2}{-b_1} < \exp\sqrt{\frac{2a^2}{-b_1}} = \exp\frac{-2a}{\sqrt{-2b_1}} < \exp\frac{-2\pi a}{\sigma_2} < \Phi(a, b_1, b_2).$$

De (1.5.7) il s'ensuit donc, que si la condition (1.5.6) est remplie, la condition (1.5.2) l'est aussi — par conséquent les conditions (1.4.3) et (1.3.7) sont vérifiées — ce qu'il fallait démontrer.

Donc, si $b_2 > -2a^2$, alors la condition (1.3.7) sera vérifiée pour tous les nombres b_1 tels que

$$b_2 \leqslant b_1 < -a^2.$$

Par des méthodes semblables on peut encore obtenir d'autres formules impliquant la condition (1.3.7), par exemple la formule

$$-a^2[1+(2\pi)^{2/3}] < b_2 < b_1 < -a^2 < 0.$$

La condition (1.4.3) est une condition implicite et il est difficile de voir à priori (à cause de la forme compliquée du second membre de (1.4.3)) quels sont les nombres b_2 qui la vérifient pour des a et b_1 donnés.

Nous avons déjà remarqué que la condition (1.4.4) équivaut à (1.4.5). La condition (1.4.4) est compliquée, nous allons donc trouver des conditions plus simples qui impliquent (1.4.4) (mais ne sont pas équivalentes à celle-ci).

Par exemple, puisque

$$\frac{-1}{\sigma_2}\operatorname{arctg}\frac{a_2}{-a} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sigma_2} < \frac{\pi}{\sigma_1},$$

nous aurons

$$\Phi(a, b_1, b_2) \leqslant \exp\left\{(-2a)\left[\frac{1}{\sigma_1}\operatorname{arctg}\frac{\sigma_1}{-a}+\frac{\pi}{\sigma_1}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{-2a}{\sigma_1}\left[\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sigma_1}{-a}\right]\right\} \overset{\text{df}}{=} \Phi_3(a, b_1).$$

Donc, si

$$b_2 < b_1\Phi_3(a, b_1)$$

nous aurons (1.4.4). À l'aide de cette méthode on peut obtenir d'autres conditions semblables.

Nous allons trouver à l'aide d'une autre méthode encore une condition qui implique (1.4.4). Vu (1.3.8) nous aurons

$$x_1(T_1) > x_1\left(\frac{\pi}{2\sigma_1}\right) = \frac{\gamma}{\sigma_1}\exp\frac{\pi a}{2\sigma_1}$$

et

$$\frac{\gamma}{\sigma_2}\exp\frac{-\pi a}{\sigma_2} > -x_2(T_2).$$

Nous aurons donc (1.4.6) pourvu que

$$\frac{\gamma}{\sigma_2}\exp\frac{-\pi a}{\sigma_2} < \frac{\gamma}{\sigma_1}\exp\frac{\pi a}{2\sigma_1}$$

D'après (1.3.2), il suffira que l'on ait

$$\frac{\gamma}{\sigma_1}\exp\frac{-\pi a}{\sigma_1} < \frac{\gamma}{\sigma_1}\exp\frac{\pi \sigma}{2\sigma_1}$$

donc que

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \exp\left\{(-\pi a)\left[\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{2\sigma_1}\right]\right\} = \exp\frac{-3a\pi}{2\sigma_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a^2+b_2}{a^2+b_1} > \exp\frac{-3\pi a}{\sqrt{-a^2-b_1}}.$$

Il s'ensuit que si la condition

$$b_2 < -a^2+(a^2+b_1)\exp\frac{-3\pi a}{\sqrt{-a^2-b_1}}$$

est vérifiée, alors la condition (1.4.6) et par suite les conditions (1.4.4) et (1.4.5) le sont aussi.

Pour a et b_1 constants soit $B(a, b_1)$ la limite supérieure des $b_2 < -a^2$ pour lesquels la condition (1.4.3) n'est pas vérifiée. Vu—par exemple — (1.5.6), un tel nombre $B(a, b_1)$ existe et même $B(a, b_1) < (b_1, a^2)$. Nous avons donc démontré qu'il existe une fonction $B(a, b_1)$ telle que si

(1.5.8) $$b_2 > B(a, b_1),$$

les conditions (1.4.3) et (1.3.7) sont vérifiées et pour chaque η il existe des b_2 tels que $0 < B(a, b_1) - b_2 < \eta$ et les conditions (1.4.3) et (1.3.7) ne sont pas vérifiées.

En partant directement de (1.4.3) et de la définition (1.4.1), on peut d'ailleurs montrer que pour tous les b_2 tels que $0 < B(a, b_1) - b_2$ les conditions (1.4.3) et (1.3.7) ne sont pas vérifiées.

Posons

$$\psi(a, b_1, b_2) = -b_2 + b_1 \Phi(a, b_1, b_2).$$

À l'aide d'un calcul facile, mais assez laborieux on peut montrer que

$$\partial\psi/\partial b_1 > 0,$$

donc ψ sera une fonction croissante de b_1. Par suite il existe une fonction $B_1(a, b_2)$ telle que si

$$b_1 < B_2(a, b_2), \tag{1.5.9}$$

les conditions (1.4.3) et (1.3.7) seront vérifiées et si la condition (1.5.9) ne l'est pas, alors les conditions (1.4.3) et (1.3.7) ne le sont pas non plus.

2. Le cas. $a_1 < 0$.

2.1. La méthode employée. Sous les conditions du n° 0.2 et sous certaines hypothèses concernant les nombres a_i, b_i, nous allons démontrer que si une solution $x = x(t)$ de l'équation (0.2.1) a un minimum au point $t = t_1$ (alors $x(t_1) < 0$), il existe un $t_2 > t_1$ tel que $x(t_2) = 0$ et un $t_3 > t_2$ tel que x admet pour $t = t_3$ un maximum (et $x(t_3) > 0$). Donc toutes les solutions sont oscillantes. Nous montrerons que si b_2 est plus grand qu'un nombre B (dépendant de a_1 et de b_1), alors $|x(t_3)| < |x(t_1)|$, et que les solutions tendent vers zéro. La méthode que nous utiliserons consistera à comparer les solutions considérées avec les solutions des équations linéaires du second ordre à coefficients constants.

2.2. Les solutions sont oscillantes. Considérons l'équation

$$x'' = f(t, x, x') \tag{2.2.1}$$

qui vérifie l'hypothèse $\mathrm{U}(a, -a, b)$, où $a > 0$ et

$$\sigma^2 \underset{df}{=} -a^2 - b > 0 \tag{2.2.2}$$

Désignons ses solutions non banales par $x = x(t) = x_0(t)$.

Soient les équations linéaires à coefficients constants

$$x_1'' - 2ax_1' - bx_1 = 0, \quad x_2'' - 2(-a)x_2' - bx_2 = 0.$$

Elles ont comme solutions

$$
(2.2.3)\qquad \begin{aligned} x_1(t) &= e^{at}[C_{11}\sin\sigma t + C_{12}\cos\sigma t], \\ x_2(t) &= e^{-at}[C_{21}\sin\sigma t + C_{22}\cos\sigma t]. \end{aligned}
$$

Nous avons admis l'hypothèse $\dot{U}(a, -a, b)$, donc nous aurons, pour les solutions vérifiant les mêmes conditions initiales

$$
x_0(t_1) = x_1(t_1) = x_2(t_1), \quad x_0'(t_1) = x_1'(t_1) = x_2'(t_1),
$$

les inégalités (vu les résultats du n° 1.1)

$$
(2.2.4)\qquad x_0'(t) \leqslant x_1'(t) \quad \text{et} \quad x_0(t) \leqslant x_1(t)
$$

pour les t qui forment le plus grand intervalle $\langle t_1, \tau\rangle$ tel que $x_i(t) \geqslant 0$, $x_i'(t) \geqslant 0$ $(i = 0, 1)$. De même nous aurons

$$
(2.2.5)\qquad \begin{aligned} x_0(t) &\leqslant x_2(t) \text{ pour } x_i \geqslant 0,\ x_i' \leqslant 0, \quad i = 0, 2, \\ x_1(t) &\leqslant x_0(t) \text{ pour } x_i \leqslant 0,\ x_i' \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \\ x_2'(t) \leqslant x'(t) \text{ et } x_2(t) &\leqslant x_0(t) \text{ pour } x_i \leqslant 0, x' \leqslant 0, \quad i = 0, 2. \end{aligned}
$$

Supposons maintenant que la solution considérée $x = x(t)$ de (2.2.1) vérifie les conditions initiale (nous employons une transformation (0.2.5))

$$
x(0) = a, \quad x'(0) = \beta.
$$

1). Supposons que $a \geqslant 0, \beta > 0$. Alors, dans un intervalle contenant 0, nous aurons les inégalités (2.2.4). Mais de (2.2.3) il s'ensuit qu'il existe un $T^* \leqslant \pi/\sigma$ tel que $x_1(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, T^*)$ et $x_1(T^*) = 0$. Comme $\beta > 0$, ou bien il existe un $T < T^*$ tel que $x'(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, T)$ et $x'(T) = 0$, ou bien il n'existe pas. Mais l'estimation (2.2.4) sera alors valable dans tout l'intervalle $\langle 0, T^*\rangle$ et nous aurons $x'(T^*) = 0$. Nous avons donc démontré qu'il existe un $0 < T \leqslant \pi/\sigma$ tel que $x'(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, T)$ et $x'(T) = 0$. Évidemment $x(T) > a \geqslant 0$.

2). Une situation semblable aura lieu si $a \leqslant 0, \beta < 0$, (mais alors $x(T) < a \leqslant 0$).

3). Si $a > 0, \beta < 0$, d'après (2.2.5) il existe un $\tau \leqslant \pi/\sigma$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, \tau)$ et $x(\tau) = 0$. Nous aurons aussi $x'(t) < 0$ pour $t \in \langle 0, \tau\rangle$. Donc, en posant $x'(\tau) = \beta^*$, nous retombons sur le cas 2). Par suite il existe un $0 < T \leqslant 2\pi/\sigma$ tel que $x'(t) < 0$ pour $t \in \langle 0, T)$ et $x'(T) = 0$ (et évidemment $x(T) < 0$).

4). Une situation semblable aura lieu si $a < 0$, et $\beta > 0$.

5). Enfin, si $\beta = 0$ on a $x'(0) = 0$ et des estimations (2.2.5) il s'ensuit que pour $t = 0$ nous avons un maximum si $a > 0$ et un minimum si $a < 0$.

En résumant nos résultats, nous voyons que pour toutes les condition initiales $x(0) = \alpha$, $x'(0) = \beta$ il existe un $T \epsilon (0, 2\pi/\sigma\rangle$, tel que $x = x(t)$ est monotone dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et qu'elle a pour $t = T$ un *extremum*. Pour fixer les idées, supposons que ce soit un maximum. Il sera positif. En répétant nos raisonnements nous verrons qu'il existera un $0 < \tau_2 \leqslant 2\pi/\sigma$ tel que $x = x(t)$ sera décroissante dans l'intervalle $\langle T, T+\tau_2\rangle$ et que pour $t = T+\tau_2$ elle aura un minimum négatif. Il existe même un τ_1 tel que $0 < \tau_1 \leqslant \pi/\sigma$ et $0 < \tau_2 - \tau_1 \leqslant \pi/\sigma$ et tel que $x(t) > 0$ pour $t \epsilon \langle T, T+\tau_1)$, $x(T+\tau_1) = 0$, enfin $x(t) < 0$ pour $t \epsilon (T+\tau_1, T+\tau_2\rangle$.

Par induction nous voyons qu'il existe une suite de nombres $T_1, T_2, \ldots$ tels que $0 < T_{k-1} - T_k \leqslant 2\pi/\sigma$ et

$$x(T_k) = 0.$$

Nous pouvons exiger pour les T_k même plus: dans l'intervalle (T_k, T_{k+1}) la fonction $x(t) \neq 0$ et elle n'a qu'un extremum. Enfin, si $x(t) > 0$ pour $t \epsilon (T_k, T_{k+1})$, alors $x(t) < 0$ pour $t \epsilon (T_{k+1}, T_{k+2})$.

Il est

$$\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty$$

En effet, s'il était

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T_0 < +\infty$$

alors $x(T_0) = 0$. Nous savons qu'entre deux zéros de $x = x(t)$ il existe un extremum de cette solution. Il existe donc une suite $\tau_k \to \tau_0$ telle que $x'(\tau_k) = 0$. Vu $x \epsilon C^2$, il sera $x'(T_0) = 0$. Nous avons supposé l'unicité de (2.2.1) donc $x(t) \equiv 0$ — en contradiction avec notre supposition que $x = x(t)$ est une solution non banale. Nous avons donc démontré que $\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty$.

Comme d'ordinaire, nous appellerons *fonction oscillante* toute fonction $x = x(t)$ pour laquelle il existe deux suites τ_k', τ_k'' convergentes vers l'infini et telles que $x(\tau_k') < 0$, $x(\tau_k'') > 0$. Si x est une fonction coutinue, il existe alors une suite $t_k \to +\infty$, telle que $x(t_k) = 0$.

Étant donné qu'entre un minimum et un maximum consécutifs une fonction est croissante, donc $x'(t) \geqslant 0$ et il existe de tels t que $x'(t) > 0$, et qu'entre un maximum et un minimum consécutifs une fonction est décroissante, donc $x'(t) \leqslant 0$, et il existe des t telles que $x'(t) < 0$, nous voyons que les dérivées d'une fonction oscillante (et dérivable) sont des fonctions oscillantes.

Nous avons donc démontré que les solutions $x = x(t)$ sont oscillantes. En plus nous voyons que les dérivées des solutions sont aussi oscillantes et que les distances entre deux zéros de ces dérivées sont plus petites que $2\pi/\sigma$.

Enfin supposons que $x(T) = 0$, $x'(T) = 0$. Alors $x(t) \equiv 0$ — donc c'est la solution banale — écartée par nous. Étant donné que, si l'hypothèse **U** est vérifiée, il a unicité des solutions, nous voyons que si $x = x(t)$ est une solution non banale et si $x(T) = 0$, alors $x'(T) \neq 0$. Donc tous les zéros de solutions non banales sont simples.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème A. *Si l'équation* (2.2.1) *vérifie l'hypothèse* $U(a, -a, b)$ *et* (2.2.2), *toutes ses solution non banales sont oscillantes avec leurs dérivées et la distance de leurs zéros consécutifs (qui sont simples) ne dépasse pas* $2\pi/\sigma$. *Entre deux zéros il n'existe qu'un seul extremum.*

Des exemples banals ($x'' - 2ax' + a^2x = 0$) montrent que si la condition (2.2.2) n'est pas vérifiée (il suffit même qu'il est $-a^2 - b \geqslant 0$), la conclusion du Théorème A peut être fausse. Comme le montrent des exemples (voir le § 2 de mon travail [**4**]) sous les suppositions du Théorème A les distances des zéros consécutifs peuvent tendre vers zéro.

Si à la place de $\mathbf{U}(a, -a, b)$ nous ne supposerons que l'hypothèse $\mathbf{U}_{loc}(a, -a, b)$ soit vérifiée, les conclusions du. Théorème A deviendraient fausses (elles seraient vraies — mais seulement localement — si on supposait en plus que les solutions, ayant des valeurs initiales assez petites en valeur absolue, tendent vers zéro, ou bien si on supposait en plus que la solution banale soit stable).

L'hypothèse **U** étant assez compliquée, nous allons énoncer un théorème moins général, mais beaucoup plus simple. Vu les raisonnements du n° 0.3 (démontrant que (0.3.6) implique (0.2.2)), il s'ensuit immédiatement du Théorème A.

Théorème A$^{\text{bis}}$. *Supposons que la fonction* $f = f(t, x, z)$, *définie pour* $t \geqslant T^*$ *et pour tous les* x, z, *ait des dérivées continues et que*

$$f(t, 0, 0) \equiv 0, \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, z) \leqslant b < 0, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial z}(t, x, z)\right| \leqslant 2a, \tag{2.2.7}$$

où

$$\sigma^2 \underset{df}{=} -a^2 - b > 0; \tag{2.2.8}$$

alors toutes les solutions non banales de l'équation

$$x'' = f(t, x, x')$$

sont oscillantes, avec leurs dérivées (de premier ordre). La distance des zéros consécutifs des solutions ne dépasse pas $2\pi/\sigma$.

Pour les équations linéaires

$$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0 \tag{2.2.9}$$

la vérification de l'hypothèse $U(a, -a, b)$ (ou bien de (2.2.6) et de (2.2.7)) signifie, comme nous le savons, que

$$|a(t)| \leqslant a, \quad b(t) \leqslant b < 0. \tag{2.2.10}$$

Le Théorème A montre, que si les conditions (2.2.10) et (2.2.8) sont vérifiées, alors les solutions de (2.2.9) sont oscillantes. Il est probable, qu'une hypothèse plus faible, à savoir

$$a^2(t) + b(t) \leqslant -\sigma^2 < 0 \tag{2.2.11}$$

où σ est une constante, suffirait pour que toutes les solutions non banales de l'équation (2.2.9) soient oscillantes[2]. Pour les équations non linéaires, il suffirait probablement de généraliser la condition (2.2.11) en supposant que l'image du demi-espace $t \geqslant T$ par la transformation (0.4.1) soit un ensemble du plan (a, b) situé au-dessous de la parabole $b = -a^2 - \sigma^2$ (où σ est une constante).

Supposons que l'hypothèse $\mathbf{U}(a_1, a_2, b)$ soit vérifiée et soit $b < 0$.

Alors si $a_2 \leqslant a_1 < 0$ et $\sigma_i^2 = -a_i^2 - b > 0$ les solutions non banales de (2.2.1) sont oscillantes et on peut facilement voir que les distances des zéros consécutifs sont plus petites que

$$\pi/2\sigma_1 + \pi/\sigma_2 \leqslant 3\pi/2\sigma_2.$$

Et si $0 < a_2 \leqslant a_1$ et $\sigma_i = -a_i^2 - b > 0$ les solutions de (2.2.1) sont oscillantes et on peut voir facilement que les distances des zéros consécutifs sont plus petites que

$$\pi/\sigma_1 + \pi/2\sigma_2 \leqslant 3\pi/2\sigma_2.$$

2.3. Stabilité. Supposons que l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ soit vérifiée et que, en plus

$$a_1 < 0 \tag{2.3.1}$$

et

$$\sigma^2 \overset{\mathrm{df}}{=} -a_2^2 - b_1 > 0. \tag{2.3.2}$$

---

[2] M. Opial m'a obligeamment communiqué, que la réponse est affirmative, sous l'hypothèse supplémentaire que les fonctions $a = a(t)$ et $b = b(t)$ soient bornées.

Alors évidemment $a_i < 0$, $b_i < 0$ $(i = 1, 2)$ et

$$\sigma_i^2 = -a_i^2 - b_i > 0. \tag{2.3.3}$$

Vu (2.3.1) et (2.3.2) il s'ensuit du Théorème A que toutes les solutions non banales de l'équation

$$x'' = f(t, x, x')$$

sont oscillantes, donc qu'elles admettent une infinité de zéros. Tous ces zéros sont simples; la distance de deux zéros consécutifs est plus petite que $2\pi/\sigma$ (et même vu (2.3.1) est plus petite que $3\pi/2\sigma$); enfin entre deux zéros consécutifs il n'y a qu'un extremum.

Considérons une solution non banale $x = x(t)$ de (0.1.2) vérifiant n'importe quelles conditions initiales pour $t = t_1$. Il existera alors un $0 \leqslant \tau < 3\pi/\sigma$ tel que $x(t_1 + \tau) = 0$ et $x'(t_1 + \tau) > 0$. En faisant la transformation $t^* = t - t_1 - \tau$, nous allons obtenir une fonction qui s'annulle pour $t^* = 0$. Nous pouvons donc, pour fixer les idées, supposer que notre solution vérifie les conditions initiales

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = \gamma > 0.$$

Dans le voisinage de 0 nous aurons alors

$$x(t) > 0, \quad x'(t) > 0 \quad \text{pour} \quad t > 0,$$

$$x(t) < 0, \quad x'(t) > 0 \quad \text{pour} \quad t < 0.$$

Nous avons supposé l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ vérifiée, donc pour $t > 0$ assez petit, à savoir pour $x > 0$, $x' = z > 0$, nous aurons

$$f(t, x, z) \leqslant 2a_1 z + b_1 x.$$

Soit $y = y_1(t)$ la solution de l'équation

$$y_1'' - 2a_1 y_1' - b_1 y_1 = 0 \tag{2.3.4}$$

qui vérifie les conditions initiales

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = \gamma. \tag{2.3.5}$$

Alors pour tous les $t \in \langle 0, T^{(1)} \rangle$, où $T^{(1)} < \pi/2\sigma_1$ est le premier maximum de $x = x(t)$ à droite de 0, (le premier maximum à droite de 0 de $y = y_1(t)$ est pour $T_1 < \pi/2\sigma_1$), nous aurons

$$x'(t) \leqslant y_1'(t) \quad \text{et} \quad x(t) \leqslant y_1(t). \tag{2.3.6}$$

Soit $y = y_2(t)$ la solution de l'équation

$$y_2'' - 2a_1 y_2' - b_2 y_2 = 0$$

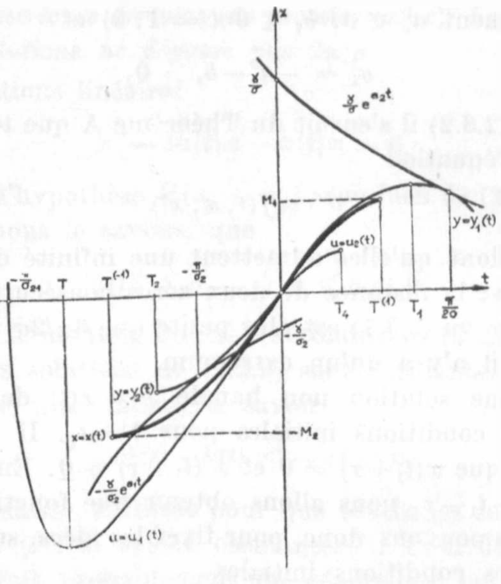

Fig. 2.

qui vérifie les conditions initiales $y_2(0) = 0$, $y_2(0) = \gamma$. Si $t = T_2$ est le dernier minimum à gauche de 0 de $y = y_2(t)$, alors

(2.3.7) $$T_2 \leqslant -\pi/2\sigma_2.$$

Étant donnée que pour $x \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$ nous avons

$$f(t, x, z) \leqslant 2a_1 z + b_2 x,$$

vu les résultats du n° 1.2 nous aurons pour $t \in \langle T_2, 0\rangle$

$$x'(t) \geqslant y_2'(t)$$

et de même,

(2.3.8) $$x(t) \leqslant y_2(t).$$

Nous avons désigné par $T^{(1)}$ la valeur de t pour laquelle nous avons le premier maximum de $x = x(t)$ à droite de 0. Posons $M_1 = x(T^{(1)})$. En employant la notation introduite au n° 1.3, vu (2.3.6) nous aurons

$$M_1 = x(T^{(1)}) \leqslant y_1(T^{(1)}) \leqslant y_1(T_1) = \gamma M_1(a_1, b_1).$$

Désignons par $T^{(-1)}$ la valeur de t pour laquelle $x = x(t)$ admet son dernier minimum à gauche de 0. Alors

$$-\pi/\sigma \leqslant T^{(-1)} \leqslant -\pi/2\sigma_2.$$

Posons $M_2 = -x(T^{(-1)})$. En employant la notation introduite au n° 1.2 nous aurons, vu (2.2.8),

$$M_2 = -x(T^{(-1)}) \geqslant -x(-\pi/2\sigma_2) \geqslant |x(T_2)| \geqslant |y_2(T_2)| = \gamma M_2(a_1, b_2).$$

Donc, si

$$M_1(a_1, b_2).\ (1+\eta) < M_2(a_1, b_2) \tag{2.3.9}$$

où $\eta > 0$, alors à plus forte raison

$$M_1 < M_2/(1+\eta)^{-1}. \tag{2.3.10}$$

Mais, pour que la condition (2.3.9) soit vérifiée, il faut et il suffit que (voir (1.5.8))

$$b_2 > B(a_1, b_1). \tag{2.3.11}$$

Supposons donc que la condition (2.3.11) soit vérifiée – alors nous aurons (2.3.10). Par $M^{(\nu)}$ désignons la valeur absolue du ν-ième extremum à droite de 0 (évidemment $M_1 = M^{(1)}$). Par induction nous obtenons

$$M^{(\nu)} < M_2/(1+\eta)^{-\nu}.$$

Désignons par $T^{(\nu)}$ la valeur de t pour laquelle la solution $x = x(t)$ admet son ν-ième extremum à droite de 0 (évidemment $M^{(\nu)} = |x(T^{(\nu)})|$. On a, vu (2.3.7)

$$(2\nu+1)\pi/2\sigma_2 \leqslant T^{(\nu)} \leqslant (3\nu+1)\pi/2\sigma.$$

Pour $t \in \langle T^{(\nu)}, T^{(\nu+1)}\rangle$ et $\varepsilon < 0$ nous aurons

$$|x(t)|e^{-\varepsilon t} \leqslant |x(T^{(\nu)})| \exp(-\varepsilon T^{(\nu)}). \tag{2.3.12}$$

Mais

$$|x(T^{(\nu)})| \exp(-\varepsilon T^{(\nu)}) \leqslant \frac{M_2}{(1+\eta)^\nu} \exp\left(-\frac{\varepsilon(2\nu+1)\pi}{2\sigma_2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \left[\frac{1}{1+\eta} \exp\left(-\frac{\varepsilon\pi}{2\sigma}\right)\right]^\nu.$$

Si $-\varepsilon$ est assez petit, alors $(1+\eta)^{-1}\exp(-\varepsilon\pi/2\sigma) < 1$ et

$$\lim_{\nu\to\infty} |x(T^{(\nu)})| \exp(-\varepsilon T^{(\nu)}) = 0.$$

Vu (2.3.12), nous aurons donc

$$\lim_{t\to\infty} x(t) e^{-\varepsilon t} = 0,$$

par suite $x = x(t)$ est une fonction ε-bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 < 0$, c'est-à-dire elle tend exponentiellement vers zéro.

Remarquons que la distance de deux zéros consécutifs de $x = x(t)$ est plus grande que la distance de l'extremum au zéro suivant. Donc

$$t_{k+1} - t_k \geqslant T^{(k)} - t^{(k)} \geqslant \pi/2\sigma_2$$

D'après le Théorème A et les remarques de la p. 56 nous avons donc

$$\pi/2\sigma_2 \leqslant t_{k+1} - t_k \leqslant 3\pi/2\sigma.$$

2.4. Le comportement des dérivées. Nous allons montrer que les dérivées des solutions aussi tendent exponentiellement vers zéro. La solution de (2.3.4), avec les conditions initiales (2.3.5), est

$$y_1(t) = \gamma\sigma_1^{-1} e^{a_1 t} \sin\sigma_1 t,$$

d'où

$$y_1'(t) = \gamma\sigma_1^{-1} e^{a_1 t}[a_1 \sin\sigma_1 t + \sigma_1 \cos\sigma_1 t].$$

Le premier maximum à droite de 0 de $y_1'(t)$ sera atteint pour la valeur T_0 qui vérifie la condition

$$y_1''(T_0) = 0.$$

Étant donnée que

$$y_1''(t) = \gamma\sigma_1^{-1} e^{a_1 t}[a_1^2 \sin\sigma_1 t + 2a_1\sigma_1 \cos_1 t - \sigma_1^2 \sin\sigma_1 t].$$

le nombre T_0 vérifie l'égalité

$$(a_1^2 - \sigma_1^2)\sin\sigma_1 T_0 + 2a_1\sigma_1 \cos\sigma_1 T_0 = 0,$$

donc

$$\operatorname{tg}\sigma_1 T_0 = -2a_1\sigma_1/(a_1^2 - \sigma_1^2) \tag{2.4.1}$$

(on peut avoir $a_1^2 - \sigma_1^2 = 2a_1^2 + b_1 = 0$ — il suffirait alors de prendre un $b_1^* > b_1$ car alors l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1^*, b_2)$ sera aussi vérifiée).

Considérons les solutions des équations

$$u_i'' - 2a_2 u_i' - b_i u_i = 0, \qquad i = 1, 2,$$

avec les conditions initiales

$$u_i(0) = 0, \quad u_i'(0) = \gamma$$

— elles ont la forme

$$u_i(t) = \frac{\gamma}{\sigma_{2i}} e^{a_2 t} \sin\sigma_{2i} t,$$

$$\text{où } \sigma_{21} = \sigma \quad \text{et} \quad \sigma_{2i}^2 = -a_2^2 - b_i \geqslant \sigma^2 > 0.$$

Nous avons admis l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ donc

$$2a_2 z + b_1 x \leqslant f(t, x, z)$$

pour $x < 0$, $z > 0$.

Puisque pour des $t < 0$ assez petits en valeur absolue, nous aurons $x < 0$, $x' > 0$, il vient du lemme du n° 1.2 que

$$x'(t) \leqslant u_i'(t).$$

De même que ci-dessus, le maximum de $u_1'(t)$ est atteint pour la valeur de $t = T$ qui vérifie l'équation

$$\operatorname{tg} \sigma T = -2a_2\sigma/(a_2^2 - \sigma)$$

Supposons — comme au n° 2.3. — que $x = x(t)$ admette pour $t = T^{(-1)}$ son premier minimum à gauche de 0 et pour $t = T^{(1)}$ son premier maximum à droite de 0. Alors, pour $t \in \langle T^{(-1)}, T^{(1)} \rangle$, nous aurons $x'(t) \geqslant 0$, donc

$$\max_{\langle T^{(-1)}, 0\rangle} |x'(t)| = \max_{\langle T^{(-1)}, T^{(1)}\rangle} x'(t).$$

Remarquons que

$$\max_{\langle 0, T^{(-1)}, 0\rangle} x'(t) \leqslant \max_{\langle 0, T^{(1)}\rangle} y_1'(t) \leqslant y_1'(T_0).$$

Le signe „<" peut figurer dans la dernière inégalité car il résulte de (2.4.1) que T_0 peut ne pas appartenir à l'intervalle $\langle 0, T^{(1)} \rangle$.

De même

$$\max_{\langle T^{(1)}\rangle} x'(t) \leqslant \max_{\langle T^{(-1)}, 0\rangle} u'(t) \leqslant u'(T)$$

et

$$\max_{\langle T^{(-1)}, T^{(1)}\rangle} x'(t) = \max [y_1'(T_0),\ u_1'(T)] \underset{df}{=} \gamma Y(a_1, a_2, b_1).$$

Nous avons admis l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, donc

$$2a_2 z + b_2 x \leqslant f(t, x, z),$$

pour $x > 0$, $x' = z > 0$.

Puisque pour des $t > 0$ assez petites nous avons $x > 0$, $x' > 0$, il vient

$$u_2'(t) \leqslant x'(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) \leqslant x(t)$$

dans l'intervalle $\langle 0, T_4 \rangle$ dans lequel $u_2'(t) \geqslant 0$. Supposons que pour $t = T_4$ la fonction $u = u_2(t)$ admette son premier maximum à droite de 0. Étant donné que x est une fonction croissante dans $\langle 0, T^{(1)}\rangle$ (et $T_4 \leqslant T^{(1)}$), nous avons

$$\gamma N(a_2, b_2) \underset{df}{=} u_2(T_4) \leqslant x(T_4) \leqslant \max_{\langle 0, T^{(1)}\rangle} x(t) = \max_{\langle T^{(-1)}, T^{(1)}\rangle} |x(t)|$$

où $N(a_2, b_2)$ peut être calculée par les méthodes du n° 1.3.

Donc

$$\frac{\max_{\langle T^{(-1)}, T^{(1)}\rangle} x'(t)}{\max_{\langle 0, T^{(1)}\rangle} x(t)} \leqslant \frac{Y(a_1, a_2, b_1)}{N(a_2, b_2)} \underset{df}{=} A_1(a_1, a_2, b_1, b_2)$$

Désignons par x_n la valeur du n-ième maximum de $x = x(t)$ à droite de 0 (on a $x_n = M^{(2n)}$ ou $x_n = M^{(2n-1)}$) et par x_n' la première valeur extrémale de $x' = x'(t)$ à gauche du point où $x(t) = x_n$ (c'est un maximum positif). Nous avons donc démontré que

$$\frac{x_n'}{x_n} \leqslant A_1(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

De même, si x^n désigne la valeur absolue du n-ième minimum à droite de $x = x(t)$ et x'^n la valeur absolue de la première valeur extrémale de $x' = x'(t)$ à gauche du point où $x(t) = x_n$, alors

$$\frac{x'^n}{x^n} \leqslant A_2(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

Donc, pour $t \in \langle T^{(\nu)}, T^{(\nu+1)}\rangle$, nous aurons

$$|x(t)| e^{-\varepsilon t} \leqslant A(a_1, a_2, b_1, b_2)\, |x(T^{(\nu)})| \exp(-\varepsilon T^{(\nu)})$$

(où $A = \max[A_2, A_2]$) et, comme au n° 2.3, il s'ensuit que

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) e^{-\varepsilon t} = 0,$$

par conséquent $x' = x'(t)$ est une fonction ε-bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 < 0$, c'est-à-dire elle tend exponentiellement vers zéro.

2.5. Nos conditions sont les meilleures possibles. Supposons que la condition (2.3.11) ne soit pas vérifiée. On doit alors avoir ou bien

(2.5.1) $$b_2 = B(a_1, b_1),$$

ou bien

(2.5.2) $$b_2 < B(a_1, b_1).$$

Si cette dernière condition est vérifiée, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$(1+\eta)M_2 < M_1.$$

Considérons alors la fonction

$$b^*(t) = \begin{vmatrix} b_2 & \text{pour} & t \in \langle T_2, 0) \\ b_1 & & t \in \langle 0, T_1), \end{vmatrix}$$

où T_i sont définies par les formules (1.3.10) dans lesquelles σ_1 a la signification (2.3.3) et à la place de σ_2 il faut mettre σ définie par (2.3.2). Enfin supposons que la fonction $b = b^*(t)$ soit périodique de période

(2.5.3) $$T_1 - T_2.$$

En approximant convenablement $b = b^*(t)$ par des fonctions continues on peut trouver des fonctions $b = b(t)$ continues, $b(t) \in \langle b_2, b_1 \rangle$ pour tous les t, telles que l'équation

(2.5.4) $$x'' - 2a_1 x' - b(t)x = 0$$

admette au moins une solution $x = x(t)$ non banale dont les zéros consécutifs aient une distance mutuelle (2.5.3) et telles que le quotient des valeurs absolues des extrema consécutifs soit plus grand ou égal à 1 (ce quotient sera d'ailleurs plus petit que $M_1 : M_2$); donc les amplitudes des oscillations de $x = x(t)$ croissent exponentiellement et vu que la distance de deux extrema consécutifs aura une borne supérieure finie la solution $x = x(t)$ ne sera pas une fonction ε-bornée pour $\varepsilon > 0$. Il en est de même de sa dérivée $x' = x'(t)$.

Il est à remarquer que la période complète d'une oscillation (c'est-à-dire l'intervalle de t nécessaire pour que la valeur de $x = x(t)$ passe de zéro au maximum, à zéro, au minimum et de nouveau à zéro) est alors approximativement le double de la période de $b = b(t)$. C'est d'ailleurs la condition optima — bien connue — pour qu'il y ait résonance de seconde espèce.

Si la condition (2.5.1) est vérifiée, on a $M_2 = M_1$ mais parmi les fonctions continues $b = b(t)$ telles que $b(t) \in \langle b_2, b_1 \rangle$, nous ne pourrons trouver que des fonctions telles que les solutions de (2.5.4) ont des amplitudes décroissantes. Mais elles pourront décroître non exponentiellement et même on pourra avoir

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} |x(t)| > 0.$$

Donc, si la condition (2.3.11) n'est pas vérifiée, il existe des équations (même linéaires) qui vérifient l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ et (2.3.2) et dont les solutions ne tendent pas exponentiellement vers zéro. Même parmi les équations vérifiant $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (2.3.1), (2.3.2) et (2.5.2) il existe des équations ayant des solutions qui ne sont pas ε-bornées pour $\varepsilon > 0$ et qui, à plus forte raison, ne sont pas bornées.

Le problème des conditions supplémentaires auxquelles doivent satisfaire les équations, quand $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, (2.3.1), (2.3.2) est vérifiée, mais (2.3.11) ne l'est pas, pour que leurs solutions tendent exponentiellement vers zéro, est très peu étudié (voir les remarques du § 2 de mon travail [**4**]).

2.6. L'énoncé du théorème principal. Les résultats des nos précédents peuvent être résumés sous forme du théorème suivant.

Théorème. B1. *Si l'équation* (2.2.1) *vérifie l'hypothèse* $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, *les conditions* (2.3.1), (2.3.2) *et* (2.3.11), *alors toutes ses solutions non banales avec leurs dérivées premières sont des fonctions oscillantes tendant exponentiellement vers zéro*; *la distance de leurs zéros consécutifs* (*qui sont simples*) *appartient a l'intervalle* $(\pi/2\sigma_2,\ 3\pi/2\sigma)$.

Pour quatre nombres a_1, a_2, b_1, b_2 *tels que* $b_2 \leqslant b_1 < 0$, $a_2 \leqslant a_1 < 0$, $b_2 < B(a_1, b_1)$ *et que la condition* (2.3.2) *est vérifiée, il existe une équation* (2.2.1) — *qui peut même être linéaire* — *vérifiant l'hypothèse* $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *et telle qu'au moins une de ses solutions ne soit pas* ε*-bornée pour* $\varepsilon > 0$.

Des exemples banals ($x''-bx' = 0$ où $b < 0$ est une constante) montrent que si la condition (2.3.1) n'est pas vérifiée, la conclusion de ce théorème peut être fausse. Si la condition (2.3.2) n'est pas remplie (les autres hypothèses du Théorème B1 étant vérifiées) il est probable que les solutions tendent exponentiellement vers zéro (quoique elles puissent — évidemment — ne pas être oscillantes) — voir le §1 de mon travail [**4**].

Dans la définition de l'hypothèse $\mathbf{V}$ nous avons supposé les inégalités (0.2.4) vérifiées pour tous les x, z. Si elles ne l'étaient que pour des x, z assez petites en valeur absolue (c'est-à-dire si l'hypothèse $\mathbf{V}_{loc}$ serait verifiée), la conclusion du Théorème B1 ne serait vraie que pour les solutions ayant des valeurs initiales assez petites en valeur absolue.

De la fonction $B = B(a_1, b_1)$ nous ne savons que ce qu'elle existe et que $B(a_1, b_1) < -a_1^2 + b_1$. Pour des applications numériques du Théorème B1, il faut donc avoir recours où bien à l'inégalité (1.4.3) (où Φ est définie par (1.4.1)) qui est équivalente à l'inégalité $b_2 > B(a_1, b_1)$ ou bien aux inégalités plus faibles, mais beaucoup plus maniables, du n° 1.5 (la condition la plus commode — mais assez faible — est l'inégalité (1.5.6)).

L'hypothèse $\mathbf{V}$ étant assez compliquée, nous allons énoncer un théorème un peu plus faible, mais plus élégant. D'après les raisonnement du n° 0.3, il est une conséquence immédiate du théorème B1.

Théorème B1$^{\text{bis}}$. Supposons que la fonction $f = f(t, x, z)$, définie pour tous les x, z et pour $t > T^*$, ait des dérivées continues et que

$$f(t, 0, 0) \equiv 0,$$

$$a_2 \leqslant \tfrac{1}{2}\partial f(t, x, z)/\partial z \leqslant a_2 < 0, \quad b_2 \leqslant \partial f(t, x, z)/\partial x \leqslant b_1 < 0,$$

où

$$\sigma^2 = -a_2^2 - b_1 > 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2^2 = -a_1^2 - b_2.$$

Alors, pour chaque couple a_1, b_1, il existe un nombre $B(a_1, b_1)$ (qui est une fonction de a_1 et de b_1 et peut être évalué numériquement) et tel que si

$$b_2 > B(a_1, b_1),$$

alors toutes les solutions non banales de l'équation

$$x'' = f(t, x, x') \tag{2.6.1}$$

sont, avec leurs dérivées premières, des fonctions oscillantes, qui tendent exponentiellement vers zéro. La distance de leurs zéros consécutifs $\epsilon(\pi/2\sigma_2, 3\pi/2\sigma)$.

Pour chaque système de nombres $a_2 \leqslant a_2 < 0$, $b_2 \leqslant b_1 < 0$, où $b_2 < B(a_2, b_1)$, il existe une fonction $f = f(t, x, z)$ (elle peut être même linéaire en x et z), vérifiant les autres hypothèses, telle qu'il existe des solutions de (2.6.1) qui ne sont pas ε-bornées pour $\varepsilon > 0$.

En tenant compte des considérations du n° 0.3, nous aurons aussi:

Théorème B1$^{\text{ter}}$. *Si $a = a(t)$, $b = b(t)$ sont deux fonctions définies et continues pour $t \geqslant T^*$,*

$$a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1 < 0, \quad b_2 \leqslant b(t) \leqslant b_1 < 0$$

où a_i, b_i sont des constantes telles que

$$a_2^2 + b_1 < 0$$

et

$$b_2 > B(a_1, b_1),$$

alors toutes les solutions non banales de l'équation

$$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0$$

ainsi que leurs dérivées premières, sont des fonctions oscillantes qui tendent exponentiellement vers zéro.

Désignons par K la courbe du plan (a, b) donnée par les équations paramétriques $a = a(t)$, $b = b(t)$. Les hypothèses du Théorème B1^{ter}

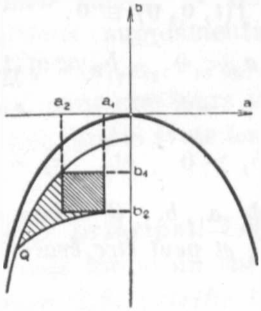

Fig. 3

équivalent à la condition $K \subset \langle a_2, a_1 \rangle \times \langle b_2, b_1 \rangle \underset{df}{=} R$. Il est probable que si nous supposons $a(t) \leqslant a_1 < 0$, $b(t) \leqslant b_1 < 0$, alors pour que la conclusion du Théorème B1^{ter} reste vraie, il faudra supposer en plus que K soit immergé dans un ensemble contenant R et ayant comme frontière les droites $a = a_1$, $b = b_1$, une parabole $b = -a^2 - \sigma^2$ (où σ est une constante) et une courbe convexe joignant un point Q (voir la fig. 3) et le point (a_1, b_2). On peut facilement formuler un problème analogue pour l'équation (2.6.1).

3. Le cas $a_2 > 0$.

3.1. La contre-résonance. Supposons maintenant que l'équation

$$x'' = f(t, x, x') \tag{3.1.1}$$

vérifie l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ et que

$$0 < a_2 \leqslant a_1, \quad b_2 \leqslant b_1 < 0. \tag{3.1.2}$$

et

$$a_1^2 + b_1 < 0. \tag{3.1.3}$$

Les résultats présenteront ici beaucoup d'analogie avec ceux du § 2. Esquissons-les rapidement. Vu (3.1.2) et (3.1.3) on a $\sigma_{ij}^2 = -a_i^2 + -b_j > 0$ et du Théorème A il s'ensuit que toutes les solutions non banales de l'équation (3.1.1) sont oscillantes.

Considérons une équation linéaire à coefficients constants

$$x'' - 2ax' - bx = 0, \tag{3.1.4}$$

où $a^2 + b < 0$, $0 < a$.

Toutes les solutions non banales de (3.1.4) sont oscillantes et les amplitudes des oscillations croissent exponentiellement. Une circonstance semblable peut se présenter pour les solutions de l'équation (3.1.1), vérifiant les conditions (3.1.2) et (3.1.3). Mais il peut aussi arriver, que sous ces conditions certaines solutions (ou toutes) ont des amplitudes d'oscillations qui restent bornées (il peut même arriver qu'elles tendent vers 0, même exponentiellement). Nous appellerons cet effet *contre-résonance de seconde espèce* (par l'analogie à la contre-résonance de premiere espèce). À ma connaissance cette contre-résonance de seconde espèce n'a pas encore été étudiée. Il est vrai qu'il est difficile de trouver pour elle une application physique naturelle (contrairement à la résonance de seconde espèce).

3.2. Les solutions oscillantes. Nous allons trouver des conditions sous lesquelles la contre-résonance de seconde espèce n'aura pas lieu.

Considérons les solutions des équations

$$y_i'' - 2a_2 y_i' - b_i y_i = 0$$

qui vérifient les conditions initiales

$$y_i(0) = 0, \qquad y_i'(0) = \gamma > 0.$$

Enfin, considérons les solutions de (3.1.1) qui vérifient les conditions initiales

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = \gamma.$$

Nous aurons pour $|t|$ suffisamment petits

$$0 \geqslant x(t) \geqslant y_1(t) \qquad \text{pour} \qquad t \leqslant 0,$$

$$0 \leqslant y_2(t) \leqslant x(t) \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0.$$

Désignons par M_1 la valeur absolue du premier minimum à gauche de 0 de la fonction $y = y_1(t)$ et par M_2 la valeur du premier maximum à droite de 0 de la fonction $y = y_2(t)$.

Il n'y aura pas de contre-résonance s'il existe un $\eta > 0$ tel que

$$M_1 \leqslant (1+\eta) M_2. \tag{3.2.1}$$

C'est-à-dire, si cette condition est vérifiée, les amplitudes des oscillations de $x = x(t)$ croîteront exponentiellement.

La condition (3.1.2) conduit, à l'aide des mêmes calculs qu'au n° 1.3, à la condition équivalente

$$b_2 > b_1 \Phi(a_2, b_1, b_2), \tag{3.2.2}$$

où la fonction Φ est définie par (1.4.1). C'est une condition implicite. En la développant, nous obtenons une condition explicite, équivalente à (3.2.1) et à (3.2.2), à savoir

$$b_2 > B(a_2, b_1). \tag{3.2.3}$$

Formellement, c'est la même condition que (2.3.11) où l'on a mis seulement a_2 à la place de a_1. Remarquons pourtant que dans les deux conditions (2.3.11) et (2.3.3) on a celui des a_i dont la valeur absolue est la plus petite.

Il est intéressant que, les signes des a_i étant ici autres qu'au § 1, des conditions plus fortes et plus simples que (3.2.3) aient une autre forme qu'au n° 1.5. Par exemple, il est facile de voir que si

$$b_2 > b_1 \exp \frac{3\pi a_2}{\sqrt{-a_2^2 - b_2}},$$

alors (3.2.3) est vérifiée, donc il n'y aura pas de contre-résonance (comparer à la formule (1.5.5)).

3.3. L'existence de la contre-résonnance. Soient quatre nombres a_1, a_2, b_1, b_2 tels que

$$b_2 \leqslant B(a_2, b_1) \tag{3.3.1}$$

et que (3.1.2) et (3.1.3) soient vérifiées. Il est aisé à voir qu'il existe alors des équations (3.1.1) qui vérifient l'hypothèse $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ (et en plus la fonction $f = f(t, x, z)$ peut être linéaire en x et z) et pour lesquelles il y a contre-résonance, c'est-à-dire ces équations admettent des solutions bornées (si dans (3.3.1) nous avons le signe d'inègalité, ces solutions peuvent même tendre exponentiellement vers zéro).

3.4. Un théorème. Nous avons donc obtenu le théorème suivant:

Théorème B2. *Si l'équation* (3.1.1) *vérifie l'hypothèse* $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *les conditions* (3.1.2), (3.1.3) *et* (3.2.3), *alors toutes ses solutions non banales, avec leurs dérivées premières, sont des fonctions oscillantes qui ne sont pas ε-bornées pour $\varepsilon > 0$. La distance de leurs zéros consécutifs est contenue dans l'intervalle* $(\pi/\sigma_{22}, 3\pi/2\sigma_{11})$.

Pour chaque b_2 vérifiant (3.3.1), *il existe une équation* (3.1.1) (*elle peut être linéaire*) *vérifiant l'hypothèse* $\mathbf{V}(a_1, a_2, b_1, b_2)$ *et les conditions* (3.1.2) *et* (3.1.3) *et telle qu'au moins une de ses solutions non banales soit bornée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Мандельштам, Л. И., Папалекси, Н. Д., *О параметрическом возбуждении электрических колебании*, Журн. Техн. Физики 4 (1934), p.5–29.

[2] Tatarkiewicz, K., *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 7 (1953), p. 19–81.

[3] —— *Sur une équation généralisant les équations linéaires avec second membre*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 13 (1959), p. 75–85.

[4] —— *Sur les mouvements sous l'influence des forces elastiques généralisées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 13 (1959), p. 87–113.

[5] —— *Un cas de stabilité conditionnelle*, à paraître dans Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960).

Streszczenie

1. Weźmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne, drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x''-2ax'-bx=0 \tag{1}$$

gdzie

$$a<0 \tag{2}$$

i

$$\sigma^2=-a^2-b>0 \tag{3}$$

(wtedy oczywiście $b<0$; zakładamy też, że $\sigma>0$). Wszystkie jego rozwiązania są oscylujące i zmierzają wykładniczo do zera. Tymniemniej równanie

$$x''-2ax'-bx=g(t)$$

gdzie g jest funkcją okresową o okresie ω bliskim $2\pi/\sigma$ może mieć rozwiązania oscylujące o amplitudzie nie znikającej, a nawet rosnącej. Efekt ten nazywamy rezonansem (pierwszego rodzaju). Równanie liniowe

$$x''-2a(t)x'-b(t)x=0 \tag{4}$$

gdzie funkcje $a=a(t)$ i $b=b(t)$ są określone i ciągłe dla $t\geqslant T^*$, oraz spełniają warunki analogiczne do warunków (2) i (3), a mianowicie

$$a(t)\leqslant a_1<0 \tag{5}$$

i

$$-a^2(t)-b(t)\geqslant\sigma^2>0 \tag{6}$$

(gdzie a, σ są stałymi) może mieć rozwiązania o własnościach analogicznych do własności rozwiązań równania (1), a mianowicie będące funkcjami oscylującymi i zmierzającymi wykładniczo do zera. Ale może się też zdarzyć, iż rozwiązania te nie zmierzają do zera (a nawet mogą być nieograniczone); efekt ten nazywamy rezonansem drugiego rodzaju (albo parametrycznym wzbudzeniem drgań). Możemy obserwować jego realizację (ściśle rzecz biorąc nie dla równania liniowego (4) lecz dla pewnego jego nieliniowego uogólnienia) na huśtawce rozhuśtywanej przez przysiadające i wstające na niej dziecko. Znamy też zresztą i inne realizacje, mające poważniejsze znaczenie.

2. Weźmy pod rozwagę równanie — niekoniecznie liniowe —

$$x'' = f(t, x, x') \tag{7}$$

gdzie funkcja $f = f(t, x, z)$ jest zdefiniowana i różniczkowalna w sposób ciągły dla wszystkich x, z i $t > T$. Zakładamy, że

$$f(t, 0, 0) = 0 \tag{8}$$

oraz, że istnieją stałe a_1, a_2, b_1, b_2 takie, że

$$b_2 \leqslant \partial f/\partial x \leqslant b_1 < 0, \qquad a_2 \leqslant \tfrac{1}{2}\partial f/\partial z \leqslant a_1. \tag{9}$$

Praca niniejsza poświęcona jest zbadaniu warunków, w których równanie (7), uogólniające równanie liniowe (4), nie wykazuje rezonansu drugiego rodzaju. Odpowiednie twierdzenia udawadnia się zresztą przy założeniach nieco słabszych niż (9) — danych skomplikowanymi wzorami (0.2.4).

3. Udowadniam na przykład w § 2:

Twierdzenie B1$^{\text{bis}}$. *Jeżeli funkcja $f = f(t, x, z)$ klasy C^1 spełnia warunki* (8), (9) *i*

$$a_1 < 0, \quad a_2^2 + b_1 < 0, \tag{10}$$

to każde niebanalne rozwiązanie równania (7) *jest oscylujące. Ponadto dla każdej pary a_1, b_1 spełniającej* (10) *istnieje takie $B = B(a_1, b_1)$, że jeśli*

$$b_2 > B(a_1, b_1) \tag{11}$$

to każde rozwiązanie równania (7) *zmierza wraz z pochodnymi wykładniczo do zera.*

Podaje się też szacowanie od góry i od dołu odległości dwu sąsiednich zer niebanalnych rozwiązań.

Widzimy więc, że warunek (11) jest warunkiem wystarczającym na to, by rezonans drugiego rodzaju przy spełnieniu (8), (9) i (10) nie zachodził. Można ponadto pokazać, że dla każdej czwórki ustalonych liczb a_1, a_2, b_1, b_2 spełniających (10) i takich, że $b_2 \leqslant b_1 < 0$, $a_2 \leqslant a_1 < 0$, $b_2 \leqslant B(a_1, b_1)$, w klasie funkcji spełniających (8) i (9) istnieją funkcje $f = f(t, x, z)$ (i to nawet liniowe względem x i z) takie, że nie wszystkie rozwiązania odpowiedniego równania (7) będą zmierzać do zera. A więc warunek (11) jest też — w pewnym sensie — najlepszym warunkiem ograniczającym b_2, dostatecznym na to, by rezonans drugiego rodzaju nie wystąpił.

W praktyce zamiast posługiwać się nierównością (11), gdzie o B wiemy tylko tyle, że istnieje i że $B(a_1, b_1) < b_1 - a_1^2$, należy posługiwać się pewnymi warunkami efektywnymi. Na przykład, można się posługiwać nierównością uwikłaną (1.4.3) (gdzie Φ dane jest przez (1.4.1)), która jest równoważna rozwikłanemu względem b_2 warunkowi (11), lub też nierównościami słabszymi lecz za to prostszymi jak (1.5.6) albo (1.5.2) (gdzie Φ_1 dane jest wzorem (1.5.1)).

4. Wnioskiem z twierdzenia B1$^{\text{bis}}$ będzie następujące twierdzenie słuszne dla równań liniowych:

Twierdzenie B1$^{\text{ter}}$. *Jeżeli $a = a(t)$ i $b = b(t)$ są funkcjami zdefiniowanymi i ciągłymi dla $t \geqslant T^*$, takimi, że*

$$(12) \qquad a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1 < 0, \qquad b_2 \leqslant b(t) \leqslant b_1 < 0,$$

gdzie a_i, b_i są stałymi spełniającymi warunki (10) *i* (11), *to każde niebanalne rozwiązanie równanie* (4) *jest oscylujące i zmierza wykładniczo do zera.*

W mej pracy [**2**] udowodniłem podobne twierdzenie dla równań liniowych (4) przy czym zakładałem, że b_2 spełniające (12) tylko istnieje (bez spełnienia warunku (11)). Ale oczywiście (skoro (11) jest najlepszym możliwie warunkiem) dochodziły skomplikowane dodatkowe nierówności, które musiały spełniać pochodne funkcji $a = a(t)$, $b = b(t)$ (o których zakładaliśmy, że są różniczkowalne). Spełnienie tych nierówności (jak będzie pokazane w mej pracy [**4**]) nie pociąga za sobą spełnienia (11).

5. Jeżeli $0 < a$ i (3), to wtedy rozwiązania (1) są oscylujące o amplitudach rosnących wykładniczo. Na ogół podobnie zachowają się rozwiązania (4) gdy $0 < a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1$ i spełniony jest warunek (6), ale może też wystąpić — nie badany dotychczas — *przeciw-rezonans* powodujący zanikanie oscylacji. W § 3 jego występowanie jest badane dla równań niekoniecznie liniowych (7).

Резюме

1. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

(1) $$x'' - 2ax' + bx = 0$$

где

(2) $$a < 0$$

и

(3) $$\sigma^2 = -a^2 - b > 0$$

(тогда очевидно $a < 0$, полагаем $\sigma > 0$). Все решения уравиения колеблющиеся и стремятся экспоненциально к нулю. Тем не менее уравнение

$$x'' - 2ax' - bx = g(t),$$

где g есть периодическая функция с периодом ω близким к $2\pi/\sigma$, может иметь колеблющиеся решения с амтплитудой, не малеющей до нуля (а даже растущей). Этот эфект иазывается резонансом (первого рода).

Линейное уравнение

(4) $$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ обозначают функции определенные и непрерывные для $t \geqslant T^*$, выполняющие условия аналогичные с условиями (2) и (3), а именно

(5) $$a(t) \leqslant a_1 < 0$$

и

(6) $$-a^2(t(- b(t) \geqslant \sigma^2 > 0$$

(здесь a и σ постояанные), может иметь со свойствами аналогичными свойствам решений уравнения (1), именно они выражаются функциями колеблющимися и стремящимися экспонециально к нулю. Но может тоже случиться, что эти решения не стремятся к нулю (даже могут не быть ограничены); этот эфект называется резонансом второго вида, или параметрическим возбуждением колебаний. Можем наблюдать его осуществление (строго говоря, не для линейного уравнения (4), но для некоторого его нелинейного обобщения) в движении качелей, раскачеваемых приседающим на них ребёнком. Известны впрочем и иные осуществления, имеющие более серьзное значение.

2. Рассмотрим уравнение — не обязательно линейное

(7) $$x'' = f(t, x, x')$$

где $f = f(t, x, z)$ есть функция определенная и дифференцируемая нетпрерывно для всех x, z и $t \geqslant T^*$.

Полагаем что

(8) $$f(t, 0, 0) = 0$$

и что

(9) $$b_2 \leqslant \partial f/\partial x \leqslant b_1 < 0, \quad a_2 \leqslant \tfrac{1}{2}\partial f/\partial z \leqslant a_1,$$

где a_1, v_2, b_1, b_2 обозначают некоторые постоянные.

Предлагаемая работа посвящена исследованию условий, при которых уравнение (7) являющееся обобщением линейного уравнения (4) не дает резонанса 2-го вида. Впрочем соответственные теоремы можно доказать при несколько более слабых предпосылках, чем (9), они даны сложными формулами (0.2.4).

3. Например в § 2 доказана

Теорема B1[bis]. Если функция $f = f(t, x, z)$ класса C^1_* исполняюшая услвия (8), (9) и

(10) $$a_1 < 0, \quad a_2^2 + b_1 < 0$$

то каждое не тривиальное решение уравнения (7) — колеблющееся.

Сверх того, для всякой пары чисел a_1, b_1, удевлетворяющих условию (10), существует такое число $B = B(a_1, b_1)$ что, если

(11) $$b_2 > B(a_1, b_1),$$

то каждое решение уравнения (7) стремится вместе с производными экспоненциально к нулю.

Даны тоже оценки, верхняя и нижняя, расстояния двух соседних нулей не тривиальных решений.

Итак, видим, что условие (11) есть условие достаточное для того, чтобы не имел места резонанс 2-го вида (при соблюдении условий (8), (9) и (10)). Можно показать сверх того, что для всяких четырех установленных чисел a_1, a_2, b_1, b_2, выполняющих (10) и таких, что $b_2 \leqslant b_1 < 0, a_2 \leqslant a_1 < 0$, $b_2 < B(a_1, b_1)$ существуют в классе функций, выполняющих и (9), такие функции $f(t, x, z)$ (даже линейные относительно x и z) что не все решения уравнения (7) стремятся к нулю. Следовательно, условие (11) это — в некотором смысле — самое лучшее условие, ограничивающее b_2, достаточное для того, чтобы не выступал резонанс второго вида.

Но в практике вместо пользования неравенством (11), в котором о постоянной B знаем только то, что она существует и что $B(a_1, b_1) < b_1 - a_1^2$ следует применять некоторые эффективные условия. Например, можно пользоваться неявным неравенством (1.3.3) (где Φ дано через (1.3.1), которое равносильно разрешенномы относительно b_2 условию (11), лии же более слабыми неравенствами, но зато более простыми, как (1.4.6) или (1.4.2), где Φ_1 дано формулой (1.4.1)).

4. Заключением из теоремы $\mathrm{B1^{bis}}$ является следующая теорема, отиосящаяся к линейным уравнениям.

Теорема $\mathrm{B1^{ter}}$. Если $a = a(t)$ и $b \leqslant b(t)$ функции определенные и непрерывные для $t \geqslant T^*$ такие, что

$$a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1 < 0, \qquad b_2 \leqslant b(t) \leqslant b_1 < 0, \tag{12}$$

где a_i, b_i постоянные, выполнящие условия (10) и (11), то каждое не тривиальное решение уравнения (4) колеблется и стремится экспоненциально к нулю.

В работе [**2**] я доказал аналогичную теорему для линейных уравнений (4), причем я предполагал, что b_2 выполняющее условие (12), только существует — без выполнения условия (11). Но очевидно, так как (11) является возможно найлучшым условыем, то появлялись сложные добавочные неравенства, которые должны были выполняться производными функций $a = a(t)$, $b = b(t)$, относительно которых предполагалось, что b диффенцируемы. Выполнение этих неравенств (как будет показано в моей работе [**4**]) не влечет за собою выполнения неревенства (11).

5. Если $0 < a$ и исполнено (3), то решения уравнения (1) колебьющиеся с растушими экспоненциално амплитудами. В обшем подобным образом пробегают решения уравнения (4), когда $0 < a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1$ и исполнено услове (6); но может тоже выступить не исследованный до сих пор противу-резонанс, вызывающий затухание колебаний. В § 3 исследуется его выступание для уравнений (7) не обязательно линейных.