

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I

O identityczności pewnych klas funkcji jednolistnych I

O тождестве некоторых классов одностных функций I

Introduction

Soit S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$. M. Biernacki [1] a étudié la sous-classe L des fonctions de la classe S qui représentent le cercle unité sur des domaines „linéairement accessibles” (au sens strict). Le domaine D est dit linéairement accessible (au sens strict) si l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à D est identique à l'ensemble des points d'une famille de demi-droites fermées sans points communs (les demi-droites de cette famille peuvent être parallèles et l'extrémité de l'une d'elles peut appartenir à une autre). Dans le cas particulier où les prolongements de toutes les demi-droites passent par le point a , on voit immédiatement que le domaine D est étoilé par rapport au point a . Il en résulte que la sous-classe S^* des fonctions de la classe S qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur des domaines étoilés par rapport à l'origine est contenue dans la classe L . Dans la suite, nous dirons pour abrégé „domaines linéairement accessibles” au lieu de „domaines linéairement accessibles au sens strict”. M. Biernacki [1] a établi pour les fonctions de la classe L un certain nombre de théorèmes. Je rappellerai quelques uns de ces résultats dont je vais profiter dans les considérations de ce travail.

1) Toute fonction $f(x) \in L$ est limite uniforme dans chaque cercle $|z| \leq r$, $r < 1$, de fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur le plan muni d'un nombre fini de coupures qui sont des demi-droites sans points communs.

2) Si $f(z)$ est limite uniforme dans chaque cercle $|z| \leq r$, $r < 1$, pour $n \rightarrow \infty$, de fonctions $f_n(z)$ ($f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$) univalentes dans le cercle $|z| < 1$ et représentant ce cercle sur des domaines D_n linéairement accessibles, $f(z)$ représente aussi le cercle $|z| < 1$ sur un domaine D linéairement accessible.

Dernièrement, plusieurs auteurs ont étudié une autre classe de fonctions: celle des fonctions „presque convexes”, introduite par W. Kaplan [2]. Une fonction $f(z)$, $f'(z) \neq 0$, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, est dite presque convexe dans ce cercle s'il existe une fonction $\Phi(z)$ qui fournit une représentation univalente du cercle unité sur un domaine convexe et telle que la partie réelle de l'expression $f'(z)/\Phi'(z)$ est positive pour $|z| < 1$.

W. Kaplan a établi, entre autres, les résultats suivants:

1) Toute fonction presque convexe dans le cercle $|z| < 1$ est univalente dans ce cercle.

2) Toute fonction qui représente d'une manière univalente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine est une fonction presque convexe.

3) Pour que la fonction $f(z)$ ($f'(z) \neq 0$), holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ soit presque convexe dans ce cercle, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(1) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} d\theta > -\pi,$$

où r est un nombre positif de l'intervalle $0 \leq r < 1$, θ_1 et θ_2 des nombres réels quelconques satisfaisant à l'inégalité $\theta_1 < \theta_2$.

Désignons par $\arg f'(z)$ l'une des branches uniformes de la fonction multiforme $\arg f'(z)$. Un tel choix est possible, puisque $f'(z) \neq 0$.

Remarque. L'inégalité (1) est équivalente à celle-ci:

$$(2) \quad \arg f'(re^{i\theta_1}) - \arg f'(re^{i\theta_2}) < \pi + \theta_2 - \theta_1.$$

Si l'on pose encore $P(r, \theta) = \arg f'(re^{i\theta}) + \theta$, l'inégalité (2) deviendra:

$$(3) \quad P(r, \theta_1) - P(r, \theta_2) < \pi, \quad \theta_1 < \theta_2, \quad 0 \leq r < 1.$$

On obtient ainsi une interprétation géométrique [2] qui caractérise les fonctions presque convexes. Considérons le vecteur unitaire tangent à la courbe qui est l'image du cercle $|z| = r$ (r fixé et $r < 1$) dans la représentation effectuée par la fonction presque convexe $f(z)$ et transportons-le parallèlement de telle façon que son origine soit l'origine des coordonnées. Nous admettons ici que le sens du vecteur tangent est celui du sens positif de parcours sur cette courbe. En désignant le vecteur tangent ainsi transporté par $T(r, \theta)$, on a:

$$T(r, \theta) = ie^{iP(r, \theta)}.$$

Lorsque θ augmente, la rotation du vecteur T peut s'effectuer dans le même sens que celle des aiguilles d'une montre ou dans le sens opposé. Comme $\arg T(r, \theta) = P(r, \theta) + \pi/2$, il résulte de (3) que la rotation du vecteur $T(r, \theta)$ dans le sens de celle des aiguilles d'une montre, lorsque θ augmente, est telle que $\arg T(r, \theta)$ ne surpasse pas π par rapport aux valeurs de $\arg T(r, \theta)$ qui correspondent à des valeurs inférieures de θ . Autrement dit, le vecteur tangent tournera toujours dans le sens négatif d'un angle moindre que π (fig. 1).

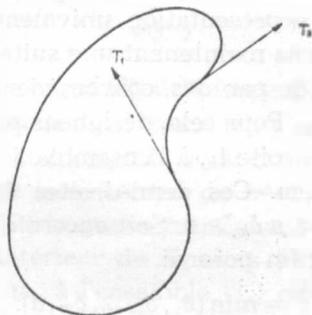


Fig. 1

Dans ce travail, j'établis une comparaison entre la classe L et la classe K des fonctions presque convexes normées classiquement, c'est-à-dire telles que leur développement est de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \text{ où } |z| < 1.$$

Pour chacune des classes L et K on a démontré un certain nombre de théorèmes (de caractère différent); une comparaison de ces classes ne m'a donc pas semblé dépourvue d'intérêt. L'étude de ces classes de fonctions m'a conduit au résultat suivant:

Les classes L et K sont identiques.

Dans ce travail je n'établis que le théorème suivant:

Théorème. *La classe L est contenue dans la classe K .*

La démonstration du théorème réciproque est plus compliquée et occupe plus de place; elle sera publiée dans un autre travail que je suis en train de préparer*).

La démonstration du théorème énoncé plus haut sera faite en plusieurs étapes; j'introduirai donc d'abord quelques notions et j'exposerai quelques raisonnements auxiliaires qui seront utiles dans la suite de cet article.

*) Ce travail paraîtra dans Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960).

1. Désignons par D_m le domaine contenant l'origine, formé du plan (w) dont on a écarté m demi-droites fermées sans points communs l_1, l_2, \dots, l_m , d'extrémités w_1, w_2, \dots, w_m . Nous désignerons par $\{l_k\}$ l'ensemble des points appartenant à la demi-droite l_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Nous utiliserons dans ce qui suit, pour désigner les opérations faites sur des ensembles, les mêmes signes que pour les opérations correspondantes faites sur des nombres. Désignons par Z l'ensemble de tous les points qui appartiennent aux demi-droites l_1, l_2, \dots, l_m . Le domaine D_m est linéairement accessible, ce qui résulte directement de sa définition. Désignons par $f(z)$, ($f(0) = 0$, $f'(0) > 0$) une fonction qui effectue la représentation univalente du cercle $|z| < 1$ sur ce domaine. Nous formerons maintenant une suite ascendante de domaines contenant l'origine, limités par des courbes de classe $C^{(1)}$ de Jordan et approchant le domaine D_m . Pour cela, désignons par δ_k la distance du point w_k , extrémité de la demi-droite l_k , à l'ensemble des points des demi-droites restantes, où $k = 1, 2, \dots, m$. Ces demi-droites étant fermées et n'ayant pas de points communs, on a $\delta_k > 0$. Soit encore $d > 0$ la distance du point $w = 0$ à l'ensemble Z . Enfin posons:

$$(4) \quad \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, d).$$

Lemme 1. *Si w est un point quelconque de la demi-droite l_k , $k = 1, 2, \dots, m$, sa distance à l'ensemble des points des demi-droites restantes n'est pas inférieure à δ .*

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, qu'il existe un $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ et un point $w \in \{l_k\}$ tels que

$$(5) \quad \inf_{x \in Z - \{l_k\}} |w - x| < \delta.$$

Comme le nombre des demi-droites est fini et $Z = \sum_{k=1}^m \{l_k\}$, il existe un point $w' \in Z - \{l_k\}$ tel que

$$(5') \quad \inf_{x \in Z - \{l_k\}} |w - x| = |w - w'|.$$

Pour un $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $s \neq k$, le point w' appartient donc à l'ensemble $\{l_s\}$ et il vérifie, en vertu de (5) et (5'), l'inégalité

$$(6) \quad |w - w'| < \delta.$$

Désignons par A_k l'ensemble des points dont les distances à la demi-droite l_k ne surpassent pas le nombre δ . On a donc $w' \in A_k$. Soient A, B les extrémités du segment de droite perpendiculaire à la demi-droite l_k , dont le milieu est l'extrémité w_k de la demi-droite l_k et dont la longueur est 2δ . Désignons encore par L la moitié de la circonférence $|w - w_k| = \delta$ qui a le segment AB pour diamètre et n'a pas de points communs avec la

demi-droite l_k . L'ensemble A_k est la somme (au sens de la théorie des ensembles) de l'ensemble K des points du demi-cercle limité par l'arc L et le segment AB et de l'ensemble P des points de la zone illimitée dont le segment AB est la base et la demi-droite l_k l'axe de symétrie (fig. 2). Le

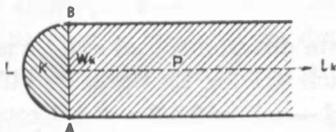


Fig. 2

point w' appartient, en vertu de (6), à l'intérieur de l'ensemble $A_k = K + P$. L'extrémité de la demi-droite l_s , le point w_s , n'appartient pas à l'intérieur de A_k , car la distance du point w_s à la demi-droite l_k serait alors inférieure à δ , en contradiction avec la définition du nombre δ . Il en résulte immédiatement que $w' \neq w_s$. Distinguons maintenant deux cas:

a) w' appartient à l'intérieur de K , alors $|w' - w_k| < \delta$ et il s'ensuit que la distance du point w_k à l'ensemble $\{l_s\}$ est inférieure à δ , ce qui est en contradiction avec (4).

β) w' appartient à l'intérieur de P ou bien est un point intérieur du segment AB . Si w' appartient à l'intérieur du segment AB , on arrive immédiatement à une contradiction avec (4). Supposons donc que w' appartient à l'intérieur de P . Puisque $w' \neq w_s$ et que w_s n'est pas situé à l'intérieur de l'ensemble A_k , la demi-droite l_s passant par w' doit couper le segment couvert AB , sinon elle couperait la demi-droite l_k , ce qui est impossible. Il existe donc sur la demi-droite l_s un point w'' qui serait un point intérieur du segment AB . Il en résulte que $|w_k - w''| < \delta$, ce qui mène aussi à une contradiction avec (4), puisque $w'' \notin \{l_s\}$. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Désignons maintenant par Z_k^n l'ensemble de tous les points du plan (w) dont la distance à la demi-droite l_k ne surpasse pas le nombre $\delta/3n$, où n est un nombre naturel, fixé pour l'instant. De même que précédemment, c'est un ensemble convexe, contenant dans son intérieur le point w_k ; sa frontière est composée de la portion L_k^n de la demi-circonférence $|w - w_k| = \delta/3n$ qui ne coupe pas la demi-droite l_k et dont le diamètre est perpendiculaire à la demi-droite l_k et de deux demi-droites, parallèles à la demi-droite l_k et de même sens, dont les extrémités sont celles du diamètre de la demi-circonférence L_k^n (fig. 3).

Nous établirons maintenant:

Lemme 2. Les ensembles $Z_1^n, Z_2^n, \dots, Z_m^n$ sont disjoints.

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par l'impossible, qu'il existe un point w_0 tel que $w_0 \in Z_k^n \cdot Z_s^n$, où $k \neq s, k, s \in \{1, 2, \dots, m\}$.

En vertu de la définition des ensembles Z_k^n et Z_s^n : $\rho(w_0, \{l_k\}) \leq \delta/3n$ et $\rho(w_0, \{l_s\}) \leq \delta/3n$, où $\rho(x, A)$ désigne la distance du point x à l'ensemble A , définie par la formule:

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$$

Il résulte de là qu'il existe des points $w_k^* \in \{l_k\}$, $w_s^* \in \{l_s\}$, tels que l'on a: $|w_0 - w_k^*| \leq \delta/3n$, $|w_0 - w_s^*| \leq \delta/3n$. En vertu de l'inégalité du triangle nous obtenons finalement: $|w_k^* - w_s^*| = 2\delta/3n < \delta$. Cette inégalité est incompatible avec le lemme 1, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

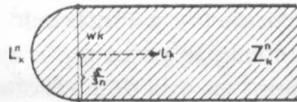


Fig. 3

Remarque. Il résulte de la définition du nombre δ et des ensembles Z_k^n que l'origine est située à l'extérieur de chacun des ensembles Z_k^n .

Comme le nombre des points w_1, w_2, \dots, w_m est fini et $\delta/3n \leq \delta/3$, il existe un nombre $R > 0$ tel que le cercle $|w| < R$ contient tous les cercles $|w - w_k| \leq \delta/3n$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Chaque demi-circonférence L_k^n et chaque point w_k sont donc contenus à l'intérieur du cercle $|w| < R$. Désignons par K_n le cercle $|w| < R + n$ et éloignons-en l'ensemble de tous les points qui appartiennent à l'ensemble $\sum_{k=1}^m Z_k^n$. Nous obtenons ainsi un ensemble B_n contenant l'origine (cf. remarque p. 136). Chaque demi-droite l_k ($k = 1, 2, \dots, m$), dont l'extrémité est à l'intérieur du cercle $|w| < R + n$, coupe la circonférence K_n exactement en un point que nous désignerons par S_k^n . Comme $\{l_k\} \subset Z_k^n$, il résulte de la définition des ensembles Z_k^n et des considérations précédentes qu'il existe une partie commune de la circonférence $|w| = R + n$ et de l'ensemble Z_k^n , qui est un arc \hat{D}_k^n contenant le point S_k^n . En vertu du lemme 2 et des relations $\hat{D}_k^n \subset Z_k^n$, les arcs $\hat{D}_1^n, \hat{D}_2^n, \dots, \hat{D}_m^n$ sont disjoints. Désignons encore par C_k^n la partie de la frontière du domaine Z_k^n qui est contenue dans le cercle K_n fermé (fig. 4).

On voit aisément, en tenant compte de la forme des ensembles Z_k^n ($k = 1, 2, \dots, m$) et en s'appuyant sur le fait que chaque arc (demi-circonférence) L_k^n est contenu dans le cercle $|w| < R$ et, a fortiori, dans le cercle $|w| < R + n$, que C_k^n est un arc ouvert de Jordan dont les extrémités sont celles de l'arc \hat{D}_k^n . En vertu du lemme 2, les courbes C_k^n ($k = 1, 2, \dots, m$) n'ont pas de points communs. La courbe C_k^n étant composée de l'arc L_k^n et

de deux segments parallèles dont les extrémités se confondent respectivement avec celles de l'arc L_k^n et de l'arc \hat{L}_k^n et qui sont tangents à L_k^n , tout point de la courbe C_k^n distinct de ses extrémités est situé à l'intérieur du cercle K_n . On sait que *tout arc simple de Jordan totalement contenu dans un domaine simplement connexe, à l'exception de ses extrémités qui sont situées sur la frontière, partage ce domaine en deux domaines simplement connexes*. En vertu de cette propriété, l'ensemble B_n obtenu du cercle K_n en éloignant les points qui appartiennent à $\sum_{k=1}^m Z_k^n$ est un domaine simplement connexe. Sa frontière est formée du système de courbes C_1^n, \dots, C_m^n et du système d'arcs disjoints $\hat{L}_k^n, k=1, 2, \dots, m$, que l'on a obtenus de la circonférence $|w|=R+n$ en en éloignant les arcs ouverts (sans extrémités) \hat{L}_k^n . Le domaine B_n contient l'origine et sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques. Les seuls points de la frontière C_n du domaine B_n où la tangente n'existe pas sont les extrémités des arcs \hat{L}_k^n (fig. 4).

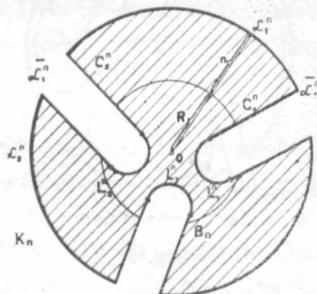


Fig. 4

Il s'agira, dans ce travail, de construire des domaines approchant indéfiniment le domaine D_m et limités par des courbes de classe $C^{(1)}$ de Jordan; il y a donc lieu de modifier encore le domaine B_n ($n=1, 2, \dots$) de manière à obtenir des frontières de classe $C^{(1)}$ (on entend ici par courbe de classe $C^{(1)}$ une courbe admettant en tout point une tangente qui varie d'une façon continue). Les ensembles Z_1^n, \dots, Z_m^n étant disjoints, le complément (par rapport au plan tout entier) du cercle fermé K_n , dépourvu des points appartenant à l'ensemble $\sum_{k=1}^m Z_k^n$ constitue un système de m domaines illimités disjoints $Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_m^n$. Chacun de ces domaines est limité respectivement par l'arc \hat{L}_k^n et par deux demi-droites sans points communs, dont les extrémités se confondent avec celles des arcs \hat{L}_k^n . Ces demi-droites font partie des frontières rectilignes des domaines $Z_1^n, Z_2^n, \dots, Z_m^n$ (fig. 5).

Considérons, pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ l'arc \mathcal{L}_k^{*n} ouvert de Jordan de classe $C^{(1)}$, qui est contenu entièrement, sauf ses extrémités, dans le domaine Q_k^n . Supposons les extrémités de l'arc \mathcal{L}_k^{*n} confondues respectivement avec celles de l'arc \mathcal{L}_k^n et l'arc \mathcal{L}_k^{*n} tangent en ses extrémités aux demi-droites qui font partie de la frontière du domaine Q_k^n . Admettons, en plus, que l'arc \mathcal{L}_k^{*n} est entièrement situé à l'intérieur du cercle K_{n+1} et que l'angle entre la tangente et l'axe réel u ($w = u + iv$) augmente constamment lorsque le point de contact parcourt l'arc \mathcal{L}_k^{*n} de telle façon que le domaine borné simplement connexe dont la frontière est formée de cet arc et de l'arc \mathcal{L}_k^n soit contourné dans le sens positif. La possibilité d'une telle construction de l'arc \mathcal{L}_k^{*n} résulte des simples propriétés géométriques des domaines Q_k^n *) (fig. 5). Puisque les arcs \mathcal{L}_k^n ainsi que les arcs

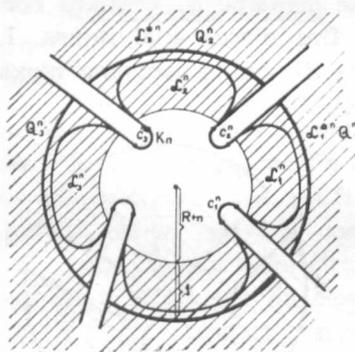


Fig. 5

\mathcal{L}_k^n sont disjoints et que ces derniers sont situés, sauf leurs extrémités, dans le complément du domaine B_n en remplaçant les arcs \mathcal{L}_k^n par les \mathcal{L}_k^{*n} et en ne changeant pas les arcs C_k^n nous obtiendrons un domaine simplement connexe Ω_n limité par une courbe de Jordan de classe $C^{(1)}$ et contenant l'origine. Les arcs \mathcal{L}_k^{*n} et les arcs C_k^n ($k = 1, 2, \dots, m$) forment en-

*) Les arcs \mathcal{L}_k^{*n} peuvent être effectivement construits comme il suit. Considérons, pour $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ fixé, le domaine Q_k^n . Désignons par A et B les extrémités de l'arc \mathcal{L}_k^n , de telle manière que les trois points AMB , où M est un point quelconque intérieur de l'arc \mathcal{L}_k^n , déterminent sur la circonférence K_n un sens de parcours positif. Désignons par l_A et l_B les demi-droites, d'extrémités A et B , qui forment les portions rectilignes de la frontière du domaine Q_k^n . Il résulte de la construction de ces demi-droites qu'aucune d'elles n'est tangente à la circonférence K_n et que leurs prolongements se coupent, soit au point O' (il peut arriver que $l_A \parallel l_B$, alors $O' = \infty$). Désignons par k_A et k_B les circonférences qui sont tangentes respectivement à l_A et l_B aux

semble la frontière du domaine, qui est lisse puisque les demi-droites qui limitent les domaines Q_k^n sont les prolongements des parties rectilignes des arcs correspondants C_k^n . Désignons par Z_n la somme des ensembles Z_k^n ($k = 1, 2, \dots, m$). De la définition des ensembles Z_k^n il résulte directement que $Z_k^n \supset Z_k^{n+1}$, donc $Z_n \supset Z_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), où le signe \subset indique l'inclusion pour les ensembles. Le domaine Ω_n est contenu dans l'ensemble $K_{n+1} - Z_{n+1}$. A cause de la relation $Z_{n+1} \subset Z_n$ on a :

$$(7) \quad K_{n+1} - Z_{n+1} \supset K_{n+1} - Z_n.$$

L'ensemble $K_{n+1} - Z_{n+1}$ étant une partie du domaine Ω_{n+1} , nous avons, en vertu de (7) :

$$(8) \quad \Omega_n \subset \Omega_{n+1},$$

Désignons par $f_n(z)$, ($f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0$) des fonctions analytiques qui effectuent une représentation univalente du cercle $|z| < 1$ sur les domaines Ω_n ($n = 1, 2, \dots$). La famille $f_n(z)$ de ces fonctions est normale [4, p. 29], car $f'_n(0) > 0$; $f'_n(0)$ augmente avec n (en vertu de (8)) et on a, de plus, $f'_n(0) < f'(0)$ puisque $\Omega_n \subset D_m$ pour tout n . La fonction $f(z)$ et le domaine D_m ont été définis à la p. 134. On peut donc extraire de cette famille une sous-suite $\{f_{n_i}\}$ $i = 1, 2, \dots$, uniformément convergente dans chaque cercle $|z| \leq r$ $r < 1$, vers une fonction $\varphi(z)$ ($\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0$) holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$.

Nous allons démontrer que $\varphi(z)$ représente le cercle $|z| < 1$ sur le domaine D_m , c'est-à-dire $\varphi(z) \equiv f(z)$. La fonction $\varphi(z)$ admet dans le cercle $|z| < 1$ toute valeur $w \in D_m$. En effet, soit $w \in D_m$; désignons par ε la distance du point w à la frontière du domaine D_m . Le nombre ε est positif. Soit n_p un nombre de la suite n_1, n_2, \dots ($n_1 < n_2 < n_3 < \dots$) satisfaisant aux conditions :

$$(9) \quad |w| < R + n_p, \quad \delta/3 n_p < \varepsilon.$$

Donc $w \in \Omega_{n_p+1}$ et, à cause de (8), $w \in \Omega_{n_q}$, où q est un nombre naturel égal ou supérieur à $p+1$.

points A et B et qui coupent l'arc \mathcal{L}_k^n en un point différent du point de contact. Les rayons r_A et r_B des circonférences k_A et k_B peuvent être pris assez petits pour qu'elles n'aient pas de points communs. Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, la circonférence k_ε de rayon $R + n + \varepsilon$ et de centre O coupe chacune des deux circonférences k_A ou k_B en deux points contenus dans le domaine Q_k^n . En diminuant convenablement les rayons r_A et r_B , nous obtenons des circonférences \hat{k}_A et \hat{k}_B qui sont tangentes à l_A et l_B aux points A et B et qui sont tangentes intérieurement à k_ε respectivement aux points \hat{A} et \hat{B} . L'arc convexe de classe $C^{(1)}$ formé par l'arc $\hat{A}\hat{A}$ de la circonférence \hat{k}_A , l'arc $\hat{A}\hat{B}$ de la circonférence k_ε et l'arc $\hat{B}\hat{B}$ de la circonférence \hat{k}_B peut être choisi comme arc \mathcal{L}_k^{*n} .

Il existe donc une suite $\{z_{n_q}\}$ de points du cercle $|z| < 1$ telle que $f_{n_q}(z_{n_q}) = w$, où $q > q$. Pour $q > p+1$ on a $\Omega_{n_{p+1}} \subset \Omega_{n_q}$, donc la fonction $f_{n_q}(z)$ est une majorante de la fonction $f_{n_{p+1}}(z)$, c'est-à-dire il existe une fonction $\omega(z)$, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ (satisfaisant dans le cercle $|z| < 1$ aux conditions du lemme de Schwarz) telle que $f_{n_{p+1}}(z) = f_{n_q}(\omega(z))$, d'où il vient $f_{n_q}^{-1}(f_{n_{p+1}}(z)) = \omega(z)$. Puisque $f_{n_{p+1}}(z_{n_{p+1}}) = w$, on a $z_{n_q} = \omega(z_{n_{p+1}})$ et on déduit finalement du lemme de Schwarz $|z_{n_q}| < |z_{n_{p+1}}|$ (*). Posons $|z_{n_{p+1}}| = \varrho < 1$. Tous les points z_{n_q} , $q \geq p+1$ sont donc situés dans le cercle $|z| \leq \varrho$. Il en résulte, en tenant compte de la convergence uniforme de la suite $\{f_{n_i}(z)\}$ dans le cercle $|z| \leq \varrho$, qu'il existe un z , $|z| < 1$ tel que $\varphi(z) = w$ (**).

Nous allons encore montrer que la fonction $\varphi(z)$ ne peut admettre aucune valeur w_0 n'appartenant pas au domaine D_m . Le domaine D_m ne contient pas de points extérieurs et sa frontière est l'ensemble Z (p. 134), donc si w_0 n'appartient pas à D_m , le point w_0 appartient pour un certain $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ à l'ensemble $\{l_k\}$. Supposons, pour la démonstration par l'impossible, que la fonction $\varphi(z)$ admette dans le cercle $|z| < 1$ la valeur w_0 . Il existe donc un point z_0 , $|z_0| < 1$, tel que $\varphi(z_0) = w_0$. Le cercle $|z| \leq |z_0|$ est transformé par l'intermédiaire de la fonction $f(z)$ en un domaine fermé

*) Il en résulte que la suite $\{|z_{n_q}|\}$, $q \geq p+1$, est décroissante.

**) En effet, de la suite $\{z_{n_q}\}$, $q \geq p+1$ on peut extraire une sous-suite $\{z_{n_{q_j}}\}$ convergente vers le point z . Il résulte de la remarque de la p. 140 (note *) que $|z| < \varrho$. Désignons par γ la circonférence de rayon $\varrho_\gamma > 0$ et de centre z , entièrement contenue dans le cercle $|z| < \varrho$. Soit j_0 un nombre naturel tel que pour $j > j_0$ tous les points $z_{n_{q_j}}$ soient situés dans le cercle de centre z et de rayon $\frac{1}{2}\varrho_\gamma$. En appliquant la formule intégrale de Cauchy nous obtenons:

$$\begin{aligned} |w - \varphi(z)| &= |f_{n_{q_j}}(z_{n_{q_j}}) - \varphi(z)| \leq |f_{n_{q_j}}(z_{n_{q_j}}) - f_{n_{q_j}}(z)| + |f_{n_{q_j}}(z) - \varphi(z)| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} f_{n_{q_j}}(\zeta) \frac{z_{n_{q_j}} - z}{(\zeta - z_{n_{q_j}})(\zeta - z)} d\zeta \right| + |f_{n_{q_j}}(z) - \varphi(z)|. \end{aligned}$$

De la relation $\Omega_n \subset D_m$ il résulte que tous les points $f_{n_{q_j}}(\zeta)$ sont contenus dans la transformée du cercle $|z| < \varrho$ par la fonction $w = f(z)$. Les nombres $|f_{n_{q_j}}(\zeta)|$ forment donc une suite bornée, soit par $M > 0$. On a aussi pour $j > j_0$: $|\zeta - z_{n_{q_j}}| |\zeta - z| \geq \frac{1}{2}\varrho_\gamma^2$.

De ce qui précède on tire pour $j > j_0$:

$$|w - \varphi(z)| \leq \frac{2M}{\varrho_\gamma^2} |z_{n_{q_j}} - z| + |f_{n_{q_j}}(z) - \varphi(z)|.$$

Puisque la suite $\{f_{n_{q_j}}(z)\}$ converge uniformément vers la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle $|z| \leq \varrho$ et que $z_{n_{q_j}} \rightarrow z$ pour $j \rightarrow \infty$, ceci prouve que $w = \varphi(z)$.

D_0 entièrement contenu dans D_m . La distance du point w_0 à la frontière du domaine D_0 est positive, désignons-la par η . Les images du cercle $|z| \leq |z_0|$ fournies par chaque fonction $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) sont contenues dans D_0 . En effet, pour tout n on a $\Omega_n \subset D_m$, donc $f(z)$ est une majorante de $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$). Il en résulte qu'il existe une fonction $\omega_n(z)$, satisfaisant aux conditions du lemme de Schwarz, telle que

$$f_n(z) = f(\omega_n(z)), \quad |z| < 1.$$

Soit maintenant ζ un point quelconque du cercle $|z| \leq |z_0|$. Nous obtenons

$$f_n(\zeta) = f(\omega_n(\zeta)).$$

Puisque $|\omega_n(\zeta)| \leq |\zeta| < |z_0|$, on a $f(\omega_n(\zeta)) \in D_0$, d'où l'on tire, en tenant compte de la dernière égalité, $f_n(\zeta) \in D_0$, ($n = 1, 2, \dots$).

La distance du point w_0 à l'image du cercle $|z| \leq |z_0|$ fournie par la fonction $f_n(z)$ est donc supérieure à η . La suite numérique $\{f_{n_q}(z_0)\}$ tend vers un nombre situé en dehors du cercle $|w - w_0| \leq \eta$. Il en résulte que $|\varphi(z_0) - f_{n_q}(z_0)| > \eta$ pour tout $q \geq p + 1$, ce qui est incompatible avec le fait que la suite converge uniformément dans tout cercle $|z| < r < 1$ vers la fonction $\varphi(z)$. La fonction $\varphi(z)$ admet donc dans le cercle $|z| < 1$ des valeurs du domaine D_m et seulement celles-ci. On a donc bien $\varphi(z) = f(z)$.

2. E. Lindelöf [3] a démontré le théorème suivant:

Si la fonction $z = \omega(\zeta)$, régulière dans $|\zeta| < 1$, effectue la représentation univalente du cercle $|\zeta| < 1$ sur un domaine B , limité par une courbe de Jordan C fermée de classe $C^{(1)}$ et $\zeta = \chi(z)$ est la fonction inverse, $\arg \omega'(\zeta)$ est une fonction continue dans $|\zeta| \leq 1$ et $\arg \chi'(z)$ est une fonction continue dans la fermeture de B . De plus, on a sur $|\zeta| = 1$

$$\arg \omega'(\zeta) = \theta(\zeta) - \arg \zeta - \frac{\pi}{2},$$

où $\theta(\zeta)$ désigne l'angle d'inclinaison (convenablement choisi) entre l'axe réel et la tangente au point $z = \omega(\zeta)$ de la courbe C .

Soit $\arg f'_n(z)$ la branche de la fonction multiforme $\arg f'_n(z)$ qui tend vers zéro lorsque $z \rightarrow 0$.

En nous appuyant sur le théorème de Lindelöf nous voyons que $\arg f'_n(z)$ est une fonction continue dans le cercle $|z| \leq 1$ et on a sur $|z| = 1$:

$$(10) \quad \arg f'_n(e^{i\theta}) = \arg T_n(e^{i\theta}) - \theta - \pi/2,$$

où $\arg T_n(e^{i\theta})$ désigne l'angle, convenablement choisi, que fait avec le sens positif de l'axe réel la tangente à la frontière du domaine Ω_n au point $w = f_n(e^{i\theta})$, orientée d'accord avec le sens positif de parcours du domaine Ω_n .

Pour abrégé, nous désignerons $\arg T_n(e^{i\theta})$ par $T_n(\theta)$. La fonction $T_n(\theta)$ est continue, puisque la frontière du domaine Ω_n est une courbe de classe $C^{(1)}$ et elle est définie dans l'intervalle $-\infty < \theta < +\infty$. La fonction $f_n(z)$ étant univalente, on a de plus:

$$(11) \quad T_n(\theta + 2\pi) - T_n(\theta) = 2\pi.$$

Remarque. La forme des courbes C_k^n ($k = 1, 2, \dots, m$), p. 136, fig. 4) montre que si l'on parcourt le domaine Ω_n dans le sens positif, la fonction $T_n(\theta)$ est faiblement décroissante le long de chaque arc C_k^n et diminue de π le long de cet arc. Par contre, il résulte de la définition des domaines Q_k^n ($k = 1, 2, \dots, m$) (p. 137) et de la détermination des arcs \mathcal{L}_k^{*n} que si l'on parcourt le domaine Ω_n dans le sens positif le long de chaque arc \mathcal{L}_k^{*n} la fonction $T_n(\theta)$ est croissante et augmente sur l'arc \mathcal{L}_k^{*n} (fig. 5) d'un angle au moins égal à π . Si l'on parcourt la frontière de Ω_n , les arcs \mathcal{L}_k^{*n} et C_k^n sont parcourus alternativement.

Nous établirons maintenant la relation

$$(12) \quad T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) \leq \pi$$

où θ_1 et θ_2 sont deux nombres réels quelconques tels que $\theta_1 < \theta_2$.

En effet, il résulte de la remarque à la p. 142, de la formule (11) et de la continuité de $T_n(\theta)$ sur toute la droite $-\infty < \theta < +\infty$ qu'il existe un système de nombres $\{a_k\}$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) tels que $\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k = -\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ et $a_k < a_{k+1}$, $T_n(\theta)$ ne croissant pas dans chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ lorsque k est un nombre entier pair et $T_n(\theta)$ croissant dans chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ lorsque k est un nombre entier impair. De la remarque à la p. 142 il résulte encore que l'on a:

$$(13) \quad \begin{cases} T_n(a_k) - T_n(a_{k+1}) = \pi & \text{pour } k \text{ pairs,} \\ T_n(a_k) - T_n(a_{k+1}) \leq -\pi & \text{pour } k \text{ impairs.} \end{cases}$$

Pour un k entier on a: $\theta_1 \in [a_k, a_{k+1}]$. Soit $s \geq 0$ le plus grand entier possible tel que $a_{k+s} \leq \theta_2$. Evidemment $a_k \leq \theta_2$. Nous avons ensuite:

$$(14) \quad T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) = T_n(\theta_1) - T_n(a_k) + T_n(a_k) - T_n(a_{k+1}) + \\ + T_n(a_{k+1}) \dots - T_n(a_{k+s}) + T_n(a_{k+s}) - T_n(\theta_2).$$

Considérons deux cas:

I. k — pair. Il y a encore deux possibilités:

a) s — pair; la fonction $T_n(\theta)$ est non croissante dans $[a_k, a_{k+1}]$, donc $T_n(\theta_1) - T_n(a_k) \leq T_n(a_k) - T_n(a_k) = 0$, $k+s$ est pair et $\theta_2 \in [a_{k+s}, a_{k+s+1}]$, donc $T_n(a_{k+s}) - T_n(\theta_2) \leq T_n(a_{k+s}) - T_n(a_{k+s+1}) = \pi$ en vertu de (13).

En tenant compte de (14) nous avons encore:

$$T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) \leq T_n(a_k) - T_n(a_{k-1}) + T_n(a_{k-1}) + \dots + T_n(a_{k+s-1}) - T_n(a_{k+s}) + \pi \leq \frac{s}{2} \pi - \frac{s}{2} \pi + \pi = \pi.$$

en vertu de (13).

b) s — impair; la fonction $T_n(\theta)$ est croissante dans $[a_{k+s}, a_{k+s+1}]$ donc $T_n(a_{k+s}) - T_n(\theta_2) \leq 0$. De là on déduit, à cause de (14) et de l'inégalité $T_n(\theta_1) - T_n(a_k) \leq 0$,

$$T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) \leq T_n(a_k) - T_n(a_{k+1}) + T_n(a_{k+1}) - \dots + T_n(a_{k+s+1}) - T_n(a_{k+s}) \leq \frac{s-1}{2} \pi - \frac{s-1}{2} \pi + \pi = \pi$$

en vertu de (13). Dans le cas I l'inégalité est ainsi établie.

II. k — impair. Il y a encore deux cas possibles:

a) s — pair: la fonction $T_n(\theta)$ est croissante dans $[a_k, a_{k+1}]$ et dans $[a_{k+s}, a_{k+s+1}]$. Si $s = 0$, on a $T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) < 0$, puisque $\theta_2 \in [a_k, a_{k+1}]$ et $\theta_1 < \theta_2$. Si $s \neq 0$, on a $s \geq 2$, donc $a_{k+1} < a_{k+s}$ et on a:

$$T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) = T_n(\theta_1) - T_n(a_{k+1}) + T_n(a_{k+1}) - \dots - T_n(a_{k+s}) + T_n(a_{k+s}) - T_n(\theta_2) \leq T_n(a_{k+1}) - T_n(a_{k+2}) + T_n(a_{k+2}) - \dots + T_n(a_{k+s-1}) - T_n(a_{k+s})$$

puisque $T_n(a_{k+s}) \leq T_n(\theta_2)$. On obtient ainsi, en vertu de (13):

$$T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) \leq \frac{s-2}{2} \pi - \frac{s-2}{2} \pi + \pi = \pi,$$

b) s — impair, donc $s \geq 1$. La fonction $T_n(\theta)$ est croissante dans $[a_k, a_{k+1}]$ et faiblement décroissante dans $[a_{k+s}, a_{k+s+1}]$. Alors

$$T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) = T_n(\theta_1) - T_n(a_{k+1}) + T_n(a_{k+1}) - \dots + T_n(a_{k+s}) - T_n(\theta_2) \leq T_n(a_{k+1}) - T_n(a_{k+2}) + T_n(a_{k+2}) - \dots - T_n(a_{k+s-1}) - T_n(a_{k+s})$$

puisque $T_n(\theta_1) \leq T_n(a_{k+1})$ et $T_n(a_{k+s}) - T_n(\theta_2) \leq 0$. De là on tire en vertu de (13):

$$T_n(\theta_1) - T_n(\theta_2) \leq \frac{s-1}{2} (\pi - \pi) = 0.$$

L'inégalité (12) est donc démontrée dans les deux cas I et II.

Les formules (11) et (12) étant vérifiées pour les fonctions $f_n(z)$ sur la frontière du cercle $|z| < 1$, il s'ensuit, d'après les résultats de W. K a p l a n [2, p. 174—175), que les fonctions $f_n(z)$ sont presque convexes dans le

circle $|z| < 1$. Donc toutes les fonctions $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur les domaines Ω_n sont presque convexes dans le cercle unité. Pour tout n on a (cf. p. 132, no. 3):

$$(15) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f_n''(re^{i\theta})}{f_n'(re^{i\theta})} \right\} d\theta > -\pi \quad \text{pour } \theta_1 < \theta_2, 0 \leq r < 1.$$

Comme il existe une suite $\{f_{n_i}(z)\}$ uniformément convergente dans tout cercle $|z| \leq r < 1$ vers la fonction $f(z)$ dans le cercle $|z| < 1$, la formule (15) donne, si l'on passe à la limite pour $i \rightarrow \infty$:

$$(16) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} d\theta > -\pi \quad \text{pour } \theta_1 < \theta_2, 0 \leq r < 1.$$

Ceci résulte de la légitimité du passage à la limite sous le signe intégrale et du théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme des suites de fonctions analytiques.

Nous allons prouver que le signe d'égalité dans (16) ne peut avoir lieu à l'intérieur du cercle $|z| < 1$. En effet, supposons, pour la démonstration par l'absurde, que l'on ait pour certaines valeurs fixées, θ_1, θ_2 telles que $\theta_1 < \theta_2$ et pour un r_0 ($0 \leq r_0 < 1$):

$$(17) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + r_0 e^{i\theta} \frac{f''(r_0 e^{i\theta})}{f'(r_0 e^{i\theta})} \right\} d\theta = -\pi.$$

L'égalité (17) équivaut à la suivante:

$$(17') \quad \arg f'(r_0 e^{i\theta_2}) + \theta_2 - \arg f'(r_0 e^{i\theta_1}) - \theta_1 = -\pi$$

où on a désigné par $\arg f'(z)$ la branche uniforme de la fonction multiforme $\arg f'(z)$ qui tend vers zéro lorsque $z \rightarrow 0$. Soit $\theta_2 - \theta_1 = \alpha$, où $\alpha > 0$ est un nombre fixé. Considérons la fonction:

$$h(r, \theta) = \arg f'(re^{i(\theta+\alpha)}) - \arg f'(re^{i\theta}) + \alpha.$$

Comme $f'(z) \neq 0$ dans le cercle $|z| < 1$ ($f(z)$ est une fonction holomorphe), on a $\arg f'(re^{i(\theta+\alpha)})$ et $\arg f'(re^{i\theta})$ sont des fonctions harmoniques dans le cercle unité. Il en résulte que $h(r, \theta)$ est une fonction harmonique dans le cercle $|z| < 1$.

Comme

$$h(r, \theta) = \int_{\theta}^{\theta+\alpha} \operatorname{Re} \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} d\theta$$

et $\theta + \alpha > \theta$, on voit, d'après (16), que $h(r, \theta) \geq -\pi$ dans le cercle unité. En vertu de (17) nous obtenons: $h(r_0, \theta_1) = -\pi$ en contradiction avec le principe du minimum (extrémum) pour les fonctions harmoniques. On a donc pour la fonction $f(z)$:

$$(18) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} d\theta > -\pi \quad \text{pour } \theta_1 < \theta_2, 0 \leq r < 1,$$

d'où il résulte, a'après le n° 3 de la p. 132, que la fonction $f(z)$ est presque convexe dans le cercle $|z| < 1$. Toute fonction qui représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine linéairement accessible étant limite uniforme dans tout cercle $|z| \leq r < 1$ de fonctions représentant le cercle unité sur des domaines du type D_m — ainsi que je l'ai rappelé au n° 1, p. 131 — on obtient, en passant une seconde fois à la limite:

Toute fonction représentant le cercle $|z| < 1$ sur un domaine linéairement accessible est une fonction presque convexe. Le théorème énoncé à la p. 133 se trouve ainsi définitivement établi.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Biernacki, M., *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*. Prace Matematyczno-Fizyczne **44**, Warszawa 1936, p. 22.
- [2] Kaplan, W., *Close-to-Convex schlicht Functions*. The Michigan Mathematical Journal **1**, 2 (1952), p. 169—185.
- [3] Lindelöf, E., *Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle*. 4 Cong. Scand. Math. 1916, p. 59—90.
- [4] Montel, P., *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*. Paris, Gauthier-Villars, 1933.

Streszczenie

Niech S oznacza klasę funkcji $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ holomorficznych i jednolitych w kole jednostkowym. Oznaczmy przez L podklasę klasy S , funkcji które odwzorowują koło $|z| < 1$ na obszary liniowo osiągalne (w znaczeniu węższym). Obszar D nazywa się liniowo osiągalnym (w znaczeniu węższym) jeśli zbiór punktów nie należących do obszaru D jest identyczny ze zbiorem punktów pewnej rodziny domkniętych i nieprzecinających się półprostych. Pojęcie obszarów liniowo osiągalnych i podklasę L wprowadził M. Biernacki [1]. Oznaczmy jeszcze przez K klasę funkcji postaci $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ prawie wypukłych. Funkcja $f(z)$, $f'(z) \neq 0$, holomorficzna w kole $|z| < 1$ nazywa się prawie wypukłą w kole $|z| < 1$ jeśli istnieje funkcja $\Phi(z)$ wypukła i jednolita w tym kole i taka,

że $f'(z)/\Phi'(z)$ ma część rzeczywistą dodatnią dla $|z| < 1$. Funkcje klasy K , jak wykazał W. Kaplan [2], są jednoliste. A więc klasa K , wprowadzona przez W. Kaplana [2], jest podklasą klasy S . Badając wyżej wspomniane klasy funkcji, klasę L oraz klasę K , wykazałem, że są to klasy identyczne. W niniejszej pracy wykazuję tylko następujące

Twierdzenie. *Klasa L zawiera się w klasie K .*

Dowód twierdzenia odwrotnego jest bardziej skomplikowany, zajmuje więcej miejsca i podany będzie przez autora w innej pracy przygotowywanej obecnie do druku (patrz str. 133, odnośnik *)).

Резюме

Пусть S обозначает класс функций $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ голоморфных и однолистных в единичном круге. Обозначим через L подкласс класса S функций, которые отображают круг $|z| < 1$ на области линейно достижимые (в узком значении). Область D называется линейно достижимой (в узком значении), если множество точек, не принадлежащих к области D , тождественно со множеством точек некоторого семейства дожнутых и не пересекающихся полупрямых. Понятие областей линейно достижимых и подкласс L ввёл М. Бернацкий [1]. Обозначим ещё через K класс функций вида $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ почти выпуклых. Функция $f(z)$ ($f'(z) \neq 0$) голоморфная в круге $|z| < 1$ называется почти выпуклой в круге $|z| < 1$, если существует функция $\Phi(z)$ выпуклая и однолистная в этом круге и такая, что отношение $f'(z)/\Phi'(z)$ имеет действительную часть положительную для $|z| < 1$. Функции класса K , как показал В. Каплан [2], однолиственны. Следовательно, введённый В. Капланом [2] класс K является подклассом класса S . Исследуя вышеупомянутые классы функций: класс L и класс K , я показал, что они тождественны. В настоящем труде я излагаю только следующее

Теорема. *Класс L содержится в классе K .*

Доказательство обратной теоремы очень сложно, требует более места и будет дано автором в другой работе,готавливаемой теперь к печати (см. стр. 133, выноска *)).