ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XII, 8 SECTIO A 1958

Z Zakładu Matematyki II. Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

Sur l'unicité des solutions de certains problemès pour l'équation $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

O istnieniu rozwiązań pewnych zadań dla równania $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

О существовании решений некоторых задач, относящихся к уравнению $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

On sait que dans les problèmes classiques relatifs à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{0.1}$$

c'est-à-dire dans les problèmes de Cauchy, Picard et Goursat, l'existence et l'unicité des solutions sont assurées si la fonction $f(x, y, z, p, q)$ qui figure dans le second membre de l'équation (0,1) est continue et si elle satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à $z, p,$ et q:

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant L\cdot(|z-\bar{z}| + |p-\bar{p}| + |q-\bar{q}|), L = \text{const} > 0.$$

L'existence et l'unicité de la solution résultent ici du fait qu'il est possible d'appliquer la methode des approximations successives. Dans le travail [2] j'ai démontré, par une méthode tout à fait différente, que dans ces problèmes l'existence et l'unicité des solutions sont assurées dès que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue et que l'on a, en même temps

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z-\bar{z}| + |p-\bar{p}| + |q-\bar{q}|), \tag{0.2}$$

où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty)$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \text{ pour } \delta > 0,$$

Dans ce travail je vais établir, en utilisant la condition (0,2), plusieurs théorèmes sur l'unicité des solutions du problème de Mlle Z. Szmydt [5] pour l'équation (0,1); ces théorèmes ont rapport à certains cas particuliers de ce problème, pour lesquels l'existence des solutions a été démontrée dans le travail [3] moyennant des hypothèses plus faibles que celles qu'exige l'unicité. Je m'occuperai aussi de l'unicité des solutions d'une variante du problème de Goursat que j'ai étudiée dans le travail [3] du point de vue de l'existence des solutions.

Le théorème 1, énoncé au chapitre III, a une importance fondamentale dans ce travail; sa démonstration s'appuie sur un théorème de M. Z. Opial relatif aux inégalités intégrales ([4], théorème 1, p. 200) et utilise certains considérations géométriques que l'on trouvera au chapitre I. Les démonstrations de certaines conclusions évidentes auraient pu être omises, j'ai pourtant préféré procéder en toute rigueur en exposant ces démonstrations en caractères mignons.

I

Supposons que les fonctions $\alpha(u)$ et $\beta(v)$, définies pour $u \epsilon (-\infty, +\infty)$ et $v \epsilon (-\infty, +\infty)$, vérifient les conditions de Lipschitz:

$$|\alpha(u') - \alpha(u'')| \leqslant \lambda \cdot |u' - u''|, \quad |\beta(v') - \beta(v'')| \leqslant \lambda \cdot |v' - v''|$$

où λ est une constante positive qu'il sera commode de supposer non inférieure à l'unité. Supposons, de plus, que

$$|\alpha(u)| \leqslant \Theta \cdot |u|, \quad |\beta(v)| \leqslant \Theta \cdot |v|,$$

où la constante Θ satisfait à l'inégalité

$$0 < \Theta < 1.$$

Désignons, pour tout $s \geqslant 0$, par W_s l'octogone fermé, contenu dans le plan uv, dont les sommets sont

$$\begin{aligned} A_s &= (s, \alpha(s)), & B_s &= (ks, ks), \\ C_s &= (\beta(s), s), & D_s &= (-ks, ks), \\ E_s &= (-s, \alpha(-s)), & F_s &= (-ks, -ks), \\ G_s &= (\beta(-s), -s), & H_s &= (ks, -ks), \end{aligned}$$

où

$$k = \frac{\Theta + 2\lambda}{1 + 2\lambda}.$$

Pour $s = 0$ cet octogone se réduit au point (0,0). Si $s'' > s' \geqslant 0$, le sommet $B_{s''}$ est en dehors de l'octogone $W_{s'}$. Puisque le sommet $A_{s''}$ est contenu dans l'angle convexe formé par les demi-droites issues de $A_{s'}$ et faisant avec le sens positif de l'axe u les angles arctg λ et — arctg λ et que le côté $A_{s'} B_{s'}$ fait avec le sens négaitf de l'axe u un angle dont la valeur absolue n'est pas inférieure à arctg 2λ, le côté $A_{s''} B_{s''}$ est situé en dehors de l'octogone $W_{s'}$. Il en est de même des autres côtés de l'octogone $W_{s''}$, donc

(1.1) si $s'' > s' \geqslant 0$, on a $W_{s'} \subset \operatorname{Int}(W_{s''})$, donc $\operatorname{Fr}(W_{s'}) \cdot \operatorname{Fr}(W_{s''}) = 0$.

On prouve aisément que

(1.2) pour $s \in \langle 0, +\infty)$ les frontières $Fr(W_s)$ recouvrent tout le plan uv*).

En vertu de (1,1) et (1,2) pour tout point (u, v) il existe exactement un s non négatif tel que $(u, v) \in Fr(W_s)$. Nous désignons de s par $s(u, v)$.

Supposons que $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ lorsque $n \to \infty$. Il existe alors, d'après (1,1), pour tout $\varepsilon > 0$ un n_ε tel que $(u_n, v_n) \in \operatorname{Int}(W_{s(u_0, v_0)+\varepsilon})$ si $u > n_\varepsilon$ et $(u_n, u_n) \notin W_{s(u_0, v_0)-\varepsilon}$ si $s(u_0, v_0) \geqslant \varepsilon$ et $n > n_\varepsilon$ **).

Donc, pour $n > n_\varepsilon$, il vient $s(u_0, v_0) - \varepsilon < s(u_n, v_n) < s(u_0, v_0) + \varepsilon$ ***), ce qui montre que la fonction $s(u, v)$ est continue.

Si $s(u, v) > s_0$, on a $W_{s_0} \subset \operatorname{Int}(W_{s(u,v)})$, donc $\operatorname{Fr}(W_{s(u,v)}) \cdot W_{s_0} = 0$ et $(u, v) \notin W_{s_0}$; si $s(u, v) \leqslant s_0$, on a $(u, v) \in W_{s(u,v)} \subset W_{s_0}$, donc

(1.3) $$s(u, v) \leqslant s_0 \equiv (u, v) \in W_{s_0},$$

---

*) En effet, le plan uv peut être considéré comme la somme des ensembles Z_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, définis par les inégalités Z_1: $u \geqslant v \geqslant \alpha(u)$, Z_2: $v \geqslant u \geqslant \beta(v)$, etc., il suffit donc de montrer que $Z_1 \subset \Sigma\, \overline{A_s B_s}$, $Z_2 \subset \Sigma\, \overline{B_s C_s}$, etc., où $\overline{A_s B_s}$, $\overline{B_s C_s}$,... désignent les côtes fermés de l'octogone W_s. Toutes ces inclusions s'établissent de la même façon, nous nous bornerons donc à prouver la première. Supposons que $u_0 \geqslant v_0 \geqslant \alpha(u_0)$. Si $u_0 = 0$, on a aussi $v_0 = 0$ et $(u_0, v_0) = (0, 0) \in \overline{A_0 B_0} = \{(0, 0)\}$. Si $u_0 \neq 0$. en vertu de l'inégalité $u_0 \geqslant \alpha(u_0)$ on doit avoir $u_0 > 0$. Comme $v_0 \geqslant \alpha(u_0) \geqslant -\lambda u_0$, il s'ensuit $2\lambda u_0 + v_0 > 0$ d'ou $u_0(\Theta - k) + v_0(k-1) < 0$, donc

$$\limsup_{s \to 0+} \left((u_0 - ks) \cdot \left(\frac{\alpha(s)}{s} - k\right) + (v_0 - ks) \cdot (k-1)\right) < 0.$$

D'autre part, comme $|\alpha(s)| \leqslant \Theta |s|$,

$$\lim_{s \to +\infty} \left((u_0 - ks) \cdot \left(\frac{\alpha(s)}{s} - k\right) + (v_0 - ks) \cdot (k-1)\right) = +\infty$$

il existe donc un $s_0 > 0$ tel que $(u_0 - ks_0) \cdot (\alpha(s_0) - ks_0) + (v_0 - ks_0) \cdot (ks_0 - s_0) = 0$ ce qui signifie que (u_0, v_0) est sur la droite $A_{s_0} B_{s_0}$. Puisque $(u_0, v_0) \in Z_1$, il en résulte $(u_0, v_2) \in \overline{A_{s_0} B_{s_0}}$.

**) Sinon, les octogones W_s étant fermés, on aurait nécessairement $(u_0, v^0) \in W_{s(u_0, v_0)-\varepsilon} \subset \operatorname{Int}(W_{s(u_0, v_0)})$, ce qui est impossible puisque $(u_0, v_0) \in \operatorname{Fr}(W_{s(u_0, v_0)})$.

***) Si l'on avait $s(u_n, v_n) \leqslant s(u_0, v_0) - \varepsilon$, il en résulterait $(u_n, v_n) \in (W_{s(u_n, v_n)} \subset W_{s(u_0, v_0)-\varepsilon}$. Si l'on avait $s(u_n, v_n) \geqslant s(u_0, v_0) + \varepsilon$, on aurait $(u_n, v_n) \in (u_n, v_n) \in W_{s(u_n, v_n)}$ $\operatorname{Int}(W_{s(u_0, v_0)+\varepsilon}) \subset \operatorname{Int}(W_{s(u_n, v_n)})$.

d'où il résulte que

(1.4) si $\lambda'' \geqslant \lambda' \geqslant 0$, on a $s(\lambda' u, \lambda' v) \leqslant s(\lambda'' u, \lambda'' v)$.

Enfin, pour tout $s_0 \geqslant 0$,

(1.5) $$\lim_{s \to s_0+} \max_{(u,v) \in W_s} d((u,v), W_{s_0}) = 0 \text{ ****)}.$$

Dans le lemme suivant nous établirons quelques propriétés de la fonction $s(u,v)$ qui joueront dans la suite un rôle essentiel.

Lemme 1. *Il existe une constante $N \geqslant 1$ telle que*

(1.6) *si* $v'' \geqslant v' \geqslant a(u)$, *on a* $v'' - v' \leqslant N \cdot (s(u,v'') - s(u,v'))$,

(1.7) *si* $v'' \leqslant v' \leqslant a(u)$, *on a* $v' - v'' \leqslant N \cdot (s(u,v'') - s(u,v'))$,

(1.8) *si* $u'' \geqslant u' \geqslant \beta(v)$, *on a* $u'' - u' \leqslant N \cdot (s(u'',v) - s(u',v))$,

(1.9) *si* $u'' \leqslant v' \leqslant \beta(v)$, *on a* $u' - u'' \leqslant N \cdot (s(u'',v) - s(u',v))$.

La démonstration de ce lemme s'appuie sur les faits géométriques suivants:

(1,10) La longueur du segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par les lignes brisées $B_{s'}C_{s'}D_{s'}$ et $B_{s''}C_{s''}D_{s''}$, où $0 < s' < s''$, ne surpasse *pas le nombre* $3/2\,(s'' - s')$.

(1,11) La longueur du segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par le côté $A_{s'}B_{s'}$ et la ligne brisée $A_{s''}B_{s''}C_{s''}D_{s''}$, où $0 < s' < s''$, ne surpasse pas le nombre $(\cos\varphi \cos\psi)^{-1} \cdot (s'' - s')$, où $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \lambda < \pi/2$, $\psi = \operatorname{arc\,tg}(2(\theta + \lambda + \lambda\theta) \cdot (1-\theta)^{-1}) < \pi/2$.

D é m o n s t r a t i o n d e (1,10). Soit

$$I_s = (\theta s, s), \quad C^* = (u^*, s''), \quad u^* = \min(\theta s'', \beta(s') + \lambda(s'' - s')).$$

Comme $\beta(s'') \leqslant u^*$ la longueur du segment de droite parallèle à l'axe v intercepté par le côté $B_{s'}C_{s'}$ et la ligne brisée $B_{s''}C_{s''}D_{s''}$ n'est pas supérieure à celle du segment de la même droite intercepté par le côté $B_{s'}C_{s'}$ et la droite $B_{s''}C^*$. Puisque $|B_{s'}I_{s'}| < |B_{s''}I_{s''}|$ et $|I_{s'}C_{s'}| \geqslant |I_{s''}C^*|$, les droites

****) $d((u,v), W_{s_0})$ désigne la distance du point (u,v) à l'octogone W_{s_0}. En effet, dans le cas contraire, il existerait d'après (1,3) une suite de points $(u_n, v_n) \in W_{s_0+1/n}$ telle que $d((u_n, v_n); W_{s_0}) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Cette suite est bornée. Soit (u_0, v_0) la limite d'une sous-suite convergente quelconque de cette suite. Comme les octogones W_s sont fermés et $W_{s_0+1/(n+1)} \subset W_{s_0+1/n}$, on a $(u_0, v_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{s_0+1/n}$, d'où il résulte, d'après (1,3), $s(u_0, v_0) \leqslant s_0$, c'est-à-dire $(u_0, v_0) \in W_{s_0}$, ce qui est impossible, car on a en même temps, en vertu de la continuité de la fonction $d((u,v), W_{s_0})$, $d((u_0, v_0), W_{s_0}) \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

$B_{s'}C_{s'}$ et $B_{s''}C^*$ se coupent dans le demi-plan $u > v$. La longueur du segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par le côté $B_{s'}C_{s'}$ et par la droite $B_{s''}C^*$, est donc la plus grande lorsque la droite parallèle à l'axe v passe par le point $C_{s'}$. L'angle γ que fait la droite $B_{s''}C^*$ avec l'axe v n'est pas inférieur à l'angle que fait la droite $B_{s''}I_{s''}$ avec l'axe v, c'est-à-dire à l'angle arctg 2λ. Par conséquent, la longueur du segment de droite parallèle à l'axe v passant par le point $C_{s'}$, intercepté par le côté $B_{s'}C_{s'}$ et la droite $B_{s''}C^* = (s'' - s') + (u^* - \beta(s'))\cdot \mathrm{ctg}\, \gamma \leqslant (s'' - s')\cdot(1 + \lambda\cdot(2\lambda)^{-1}) = 3(s'' - s')/2$, c'est-à-dire la longueur du segment d'une droite quelconque parallèle à l'axe v, intercepté par le côté $B_{s'}C_{s'}$ et la ligne brisée $B_{s''}C_{s''}D_{s''}$, ne surpasse pas a fortiori $3(s'' - s')/2$. On demontre d'une façon analogue que la longueur d'un tel segment, intercepté par le côté $C_{s'}D_{s'}$ et la ligne brisée $B_{s''}C_{s''}D_{s''}$, ne surpasse pas non plus ce nombre et l'assertion (1.10) est ainsi démontrée.

D é m o n s t r a t i o n d e (1,11). Soit

$$K_s = (s, \theta s),\ A^* = (s'', v^*),\ v^* = \min(\theta s'', \alpha(s') + \lambda(s'' - s')).$$

L'angle que fait la droite $A^*B_{s''}$ avec l'axe u est égal ou supérieur à celui que fait la droite $K_{s''}B_{s''}$ (avec l'axe u), c'est-à-dire à l'angle artcg 2λ. D'autre part, comme les angles que font le côté $B_{s''}C_{s''}$ et le côté $C_{s''}D_{s''}$ avec l'axe u ne surpassent pas arctg $(2\lambda)^{-1}$, le segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par le côté $A_{s'}B_{s'}$ et la ligne brisée $A_{s''}B_{s''}C_{s''}D_{s''}$, ne surpasse pas la longueur du segment de cette droite intercepté par le côté $A_{s'}B_{s'}$ et la droite $A^*B_{s''}$.

Désignons par l la droite parallèle au côté $A_{s'}B_{s'}$ qui passe par le point A^*. Les droites $A_{s'}B_{s'}$ et $A^*B_{s''}$ se coupent dans le demi-plan $v > u$ (de même que, dans la démonstration de (1,10), les droites $B_{s'}C_{s'}$ et $B_{s''}C_1$ se coupaient dans le demi-plan $u > v$). Par conséquent la longueur du segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par le côté $A_{s'}B_{s'}$ et la droite $A^*B_{s''}$, est au plus égale à la longueur du segment de cette droite parallèle à l'axe v, intercepté par les droites $A_{s'}B_{s'}$ et l. L'angle χ que fait la droite $A_{s'}B_{s'}$ avec l'axe u est au plus égal à l'angle que fait avec l'axe u la droite qui passe par les points $B_{s'}$ et $(s', -\theta s')$, c'est-à-dire qu'il est au plus égal à l'angle ψ En désignant par d la longueur du segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par les droites $A_{s'}B_{s'}$ et l, nous avons donc

$$d = |A_{s'}A^*|\frac{\sin(\chi + \chi_1)}{\sin(\pi/2 - \chi)} \leqslant \frac{|A_{s'}A^*|}{\cos\chi} \leqslant \frac{|A_{s'}A^{**}|}{\cos\psi} = \frac{s'' - s'}{\cos\varphi\cdot\cos\psi},$$

où χ_1 est l'angle que fait la droite $A_{s'}A^*$ avec le sens positif de l'axe u et A^{**} désigne le point de coordonnées $(s'', \alpha(s') + \lambda(s'' - s'))$. L'assertion (1,11) est ainsi démontrée.

On démontre d'une manière analogue:

(1,12) la longueur du segment de droite parallèle à l'axe v intercepté par le côté $D_{s'}E_{s'}$ et la ligne brisée $B_{s''}C_{s''}D_{s''}E_{s''}$, où $0 < s' < s''$, ne surpasse pas le nombre $(\cos\varphi\cdot\cos\psi)^{-1}\cdot(s''-s')$.

De (1,10), (1,11) et (1,12) on déduit immédiatement:

(1,13) la longueur du segment de droite parallèle à l'axe v, intercepté par les lignes brisées $A_{s'}B_{s'}C_{s'}D_{s'}E_{s'}$ et $A_{s''}B_{s''}C_{s''}D_{s''}E_{s''}$, où $0 < s' < s''$, ne surpasse pas le nombre $3\cdot(2\cos\varphi\cdot\cos\psi)^{-1}\cdot(s''-s')$.

Pour achever la démonstration du lemme 1 remarquons que si $v'' > v' > \alpha(u_0)$, on a $s(u_0, v'') > s(u_0, v') > 0$ (ceci résulte de (1,3)) et $v''-v'$ est la longueur du segment de droite $u = \text{const} = u_0$ intercepté par les lignes brisées $A_{s'}B_{s'}C_{s'}D_{s'}E_{s'}$ et $A_{s''}B_{s''}C_{s''}D_{s''}E_{s''}$, où $s' = s(u_0, v')$, $s'' = s(u_0, v'')$; donc, en vertu de (1.13) $v''-v^{-1} \leqslant 3(2\cos\varphi\cdot\cos\psi)^{-1}\cdot(s(u_0, v'') - s(u_0, v))$. La fonction $s(u, v)$ étant continue, on en déduit:

$$\text{si } v'' \geqslant v' > \alpha(u), \text{ on a } v''-v' \leqslant 3\cdot(2\cos\varphi\cos\psi)^{-1}\cdot(s(u, v'')-s(u, v')).$$

En prenant $N = (3\cdot(2\cos\varphi\cdot\cos\psi)^{-1}$ nous voyons donc que la condition (1,6) est remplie. Pour les conditions (1,7), (1,8) et (1,9) la preuve est analogue et le lemme 1 est ainsi démontré.

II

Supposons que les fonctions $g(x)$ et $h(y)$, définies pour $-\infty < x, y < +\infty$, vérifient les conditions de Lipschitz

$$|g(x')-g(x'')| \leqslant L\cdot|x'-x''| \quad \text{et} \quad |h(y')-h(y'')| \leqslant L\cdot|y'-y''|,$$

où L est une constante positive, et admettons qu'il existe un point $(\mathring{x}, \mathring{y})$ tel que

$$|g(x)-\mathring{y}| \leqslant a\cdot|x-\mathring{x}| \quad \text{et} \quad |h(y)-\mathring{x}| \leqslant b\cdot|y-\mathring{y}|,$$

où les constantes positives a et b vérifient l'inégalité

$$a\cdot b < 1.$$

Désignons par T la transformation, définie par les formules

$$x = \sqrt{b}\,u+\mathring{x}, \qquad y = \sqrt{a}\,v+\mathring{y},$$

qui transforme le plan uv en le plan xy. Les courbes d'éqations $y = g(x)$, $x\in(-\infty, +\infty)$ et $x = h(y)$, $y\in(-\infty, +\infty)$ sont alors les transformées des courbes d'équations $v = \alpha(u)$, $u\in(-\infty, +\infty)$ et $u = \beta(v)$, $v\in(-\infty, +\infty)$, où

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{a}}(g(\sqrt{b}\,u+\mathring{x})-\mathring{y}), \qquad \beta(v) = \frac{1}{\sqrt{b}}(h(\sqrt{a}\,v+\mathring{y})-\mathring{x}).$$

Pour ces fonctions $\alpha(u)$ et $\beta(v)$ construisons les octogones fermés W_s et la fonction $s(u, v)$ comme nous l'avons fait plus haut. Soit N une constante qui vérifie les conditions du lemme 1. Posons

$$t(x, y) = N \cdot \sqrt{a+b} \cdot s\left(\frac{x-\mathring{x}}{\sqrt{b}}, \frac{y-\mathring{y}}{\sqrt{a}}\right) \quad \text{pour} \quad -\infty < x, y < +\infty$$

$$S_t = T\left(W_{\frac{t}{N \cdot \sqrt{a+b}}}\right) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, +\infty).$$

En profitant des propriétés, établies précédemment, des octogones W_s et de la fonction $s(u, v)$ on constate aisément que les octogones fermés S_t et la fonction $t(x, y)$ ont les propriétés suivantes:

(2.1) $S_0 = \{(\mathring{x}, \mathring{y})\}$,

(2.2) $0 \leqslant t' < t'' \rightarrow S_{t'} \subset \operatorname{Int}(S_{t''}) \rightarrow \operatorname{Fr}(S_{t'}) \cdot \operatorname{Fr}(S_{t''}) = 0$,

(2.3) les frontières $Fr(S_t)$ recouvrent pour $t \in \langle 0, +\infty)$ tout le plan xy,

(2.4) $\lim\limits_{t \to t_0+} \max\limits_{(x, y) \in S_t} d((x, y), S_{t_0}) = 0$ pour tout $t_0 \geqslant 0$,

(2.5) $t(x, y)$ est le seul t non négatif tel que $(x, y) \in \operatorname{Fr} S_t)$,

(2.6) $t(x, y) \leqslant t_0 \equiv (x, y) \in S_{t_0}$,

(2.7) la fonction $t(x, y)$ est continue et non négative,

(2.8) $0 \leqslant \lambda' \leqslant \lambda'' \rightarrow t(\mathring{x} + \lambda'(x - \mathring{x}), \mathring{y} + \lambda'(y - \mathring{y})) \leqslant$
$\leqslant t(\mathring{x} + \lambda''(x - \mathring{x}), \mathring{y} + \lambda''(y - \mathring{y}))$,

(2.9) $y'' \geqslant y' \geqslant g(x) \rightarrow y'' - y' \leqslant t(x, y'') - t(x, y')$,

(2.10) $y'' \leqslant y' \leqslant g(x) \rightarrow y' - y'' \leqslant t(x, y'') - t(x, y')$,

(2.11) $x'' \geqslant x' \geqslant h(y) \rightarrow x'' - x' \leqslant t(x'', y) - t(x', y)$,

(2.12) $x'' \leqslant x' \leqslant h(y) \rightarrow x' - x'' \leqslant t(x'', y) - t(x', y)$,

(2.13) $t(x, g(x)) \leqslant t(x, y)$,

(2.14) $t(h(y), y) \leqslant t(x, y)$.

Lemme 2. *Si $\Phi(t)$ est une function continue et non négative pour $t \in \langle 0, +\infty)$, on a*

$$\left|\int\limits_{g(x)}^{y} \Phi(t(x, s))\, ds\right| \leqslant \int\limits_{0}^{t(x, y)} \Phi(\tau)\, d\tau \tag{2.15}$$

et

$$\left|\int\limits_{h(y)}^{x} \Phi(t(s, y))\, ds\right| \leqslant \int\limits_{0}^{t(x, y)} \Phi(\tau)\, d\tau. \tag{2.16}$$

Les deux inégalités s'établissent de la même manière, il suffit donc de le faire pour la première. Si $y = g(x)$, cette inégalité est triviale. Supposons donc $y \neq g(x)$. En vertu de (2,13) on a donc $t(x, y) > t(x, g(x))$. Divisons l'intervalle $\langle t(x, g(x)), t(x, y) \rangle$ en n parties égales au moyen des nombres

$$t(x, g(x)) = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t(x, y)$$

et soit, pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y_k un nombre compris entre $g(x)$ et y tel que

$$t(x, y_k) = t_k.$$

D'après (2,9) et (2,10) il existe pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ exactement un nombre ayant cette propriété et on a

$$g(x) = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = y \quad \text{si} \quad y < g(x),$$

$$g(x) = y_0 > y_1 > y_2 > \cdots > y_n = y \quad \text{si} \quad y > g(x),$$

et

$$|y_k - y_{k-1}| \leqslant t(x, y_k) - t(x, y_{k-1}) = t_k - t_{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Par conséquent

$$\sigma_n' = \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_{k-1}| \cdot \Phi(t(x, z_k)) \leqslant \sigma_n'' = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \cdot \Phi(t_k),$$

et, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\left| \int_{g(x)}^{y} \Phi(t(x, s))\, ds \right| = \lim \sigma_n' \leqslant \lim \sigma_n'' = \int_{t(x, g(x))}^{t(x, y)} \Phi(\tau)\, d\tau \leqslant \int_{0}^{t(x, y)} \Phi(\tau)\, d\tau.$$

III

En utilisant la famille des octogones fermés S_t et la fonction $t(x, y)$, construites dans le chapitre précédent, je vais établir un théorème local sur l'unicité de la solution du problème de Mlle Z. Szmydt [5] pour l'équation (0,1); moyennant ce théorème je pourrai, en m'appuyant sur les résultats du travail [3], énoncer deux propositions sur l'existence d'une et une seule solution de ce problème.

Hypothèse (U). Soit R le rectangle déterminé par les inégalités

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2; \; -\infty < a_1 < a_2 < +\infty,$$

$$\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2; \; -\infty < \beta_1 < \beta_2 < +\infty.$$

Nous supposons:

1° que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue pour $(x, y) \in R$ et pour z, p, q quelconques et qu'elle y vérifie la condition

(3.1) $\quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$

où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \epsilon \langle 0, +\infty)$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{pour} \quad \delta > 0; \tag{3.2}$$

2° que les fonctions $G(x,z,q)$ et $H(y,z,p)$ sont continues pour $x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et z, p, q quelconques et qu'elles satisfont aux conditions de Lipschitz

$$|G(x,z,q) - G(x,\bar{z},\bar{q})| \leqslant K \cdot |z - \bar{z}| + A(x) \cdot |q - \bar{q}| \tag{3.3}$$

et

$$|H(y,z,p) - H(y,\bar{z},\bar{p})| \leqslant K \cdot |z - \bar{z}| + B(y) \cdot |p - \bar{p}|, \tag{3.4}$$

où K est une constante positive, $A(x)$ et $B(y)$ sont des fonctions continues et positives pour $x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$;

3° que les fonctions $g(x)$ et $h(y)$, définie pour $x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, satisfont aux conditions de Lipschitz

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant L \cdot |x' - x''| \text{ et } |h(y') - h(y'')| \leqslant L \cdot |y' - y''|,$$

où L est une constante positive et vérifient les inégalités

$$\beta_1 \leqslant g(x) \leqslant \beta_2 \text{ et } \alpha_1 \leqslant h(y) \leqslant \alpha_2;$$

4° que les courbes d'équations $y = g(x)$ et $x = h(y)$ ont dans le rectangle R exactement un point commun $(\mathring{x}, \mathring{y})$ et que l'inégalité

$$A(\mathring{x}) \cdot B(\mathring{y}) < 1$$

est vérifiée.

Définition. Si la fonction $z(x,y)$ admet dans le rectangle R des dérivées partielles $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$ continues (sur le bord du rectangle il s'agit de dérivées unilatères), nous dirons que la fonction $z(x,y)$ est de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R.

Théorème 1. *Supposons vérifiée l'hypothèse* (U) *et admettons* $A(x) = \text{const} = A > 0$, $B(y) = \text{const} = B > 0$,

$$\max(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1) < \frac{1 - AB}{K \cdot (A + B + 2)}. \tag{3.5}$$

et

$$|g(x) - \mathring{y}| \leqslant a \cdot |x - \mathring{x}| \quad \textit{pour} \quad x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle,$$

$$|h(y) - \mathring{x}| \leqslant b \cdot |y - \mathring{y}| \quad \textit{pour} \quad y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

où les constantes positives a *et* b *satisfont à l'inégalité*

$$a \cdot b < 1.$$

Soit un nombre donné $\mathring{z}$. Il existe alors une fonction $z(x, y)$ au plus, de classe $C^{(1^*)}$ dans le rectangle R, qui y satisfait à l'équation (0,1) *et aux conditions*

$$\text{(3.6)}\qquad \frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = G\left(x, z(x, g(x)), \frac{\partial z}{\partial y}(x, g(x))\right) \quad \textit{pour} \quad x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle,$$

$$\text{(3.7)}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) - H\left(y, z(h(y), y), \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y)\right) \quad \textit{pour} \quad y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

$$\text{(3.8)}\qquad z(\mathring{x}, \mathring{y}) = \mathring{z}.$$

Démonstration. Supposons que la fonction $z(x, y)$ vérifie les conditions de l'énoncé et posons

$$p(x, y) = \partial z(x, y)/\partial x, \qquad q(x, y) = \partial z(x, y)/\partial y \quad \text{pour} \quad (x, y) \epsilon R.$$

Alors on a

$$\text{(3.9)}\quad p(x, y) = \int_{g(x)}^{y} f(x, s, z(x, s), p(x, s), q(x, s))\, ds + G(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))),$$

$$\text{(3.10)}\quad q(x, y) = \int_{h(y)}^{x} f(s, y, z(s, y), p(s, y), q(s, y))\, ds + H(y, z(h(y), y), p(h(y(y), y)),$$

$$\text{(3.11)}\quad z(x,y) = \begin{cases} \mathring{z} + \int_{\mathring{x}}^{x} p(s, \mathring{y})\, ds \quad \text{lorsque} \quad y = \mathring{y}, \\ \mathring{z} + \int_{\mathring{x}}^{x} p\left(s, \frac{y-\mathring{y}}{x-\mathring{x}}(s-\mathring{x}) + \mathring{y}\right) ds + \int_{\mathring{y}}^{y} q\left(\frac{x-\mathring{x}}{y-\mathring{y}}(s-\mathring{y}) + x, s\right) ds \\ \qquad\qquad \text{lorsque} \quad x \neq \mathring{x} \quad \text{et} \quad y \neq \mathring{y}, \\ \mathring{z} + \int_{\mathring{y}}^{y} q(\mathring{x}, s)\, ds \quad \text{lorsque} \quad x = \mathring{x}. \end{cases}$$

Il suffit donc de prouver que le système d'équations (3,9) et (3,10), où la fonction $z(x, y)$ est définie par la formule (3,11), a au plus une solution formée d'un couple $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle R·

Supposons qu'il y ait deux couples $(p(x, y), q(x, g))$ et $(\overline{p}(x, y), \overline{q}(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle satisfaisant aux équations (3,9) et (3,10). Soit

$$l = \max(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1).$$

D'après (3,5) on a

$$Kl < 1, (1 - Kl)^2 > (Kl + A) \cdot (Kl + B),$$

il existe dons des nombres $c_1 \geqslant 1$ et $c_2 \geqslant 1$ tels que

(3.12) $$Klc_1+(Kl+B)c_2 \leqslant \varkappa c_1, \quad (Kl+A)c_1+Klc_2 \geqslant \varkappa c_2.$$

où

$$0 < \varkappa < 1.$$

Prolongeons les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ d'après les formules

$$g(x)=\begin{cases} g(a_1) \text{ pour } x < a_1 \\ g(a_2) \text{ pour } x > a_2 \end{cases}, \qquad h(y)=\begin{cases} h(\beta_1) \text{ pour } y < \beta_1 \\ h(\beta_2) \text{ pour } y > \beta_2 \end{cases},$$

et posons

$$d_1(t)=\max_{(x,y)\epsilon R\cdot S_t} |p(x,y)-\bar{p}(x,y)|,$$

$$d_2(t)=\max_{(x,y)\epsilon R\cdot S_t} |q(x,y)-\bar{q}(x,y)|,$$

$$d(t)=c_1\cdot d_1(t)+c_2\cdot d_2(t).$$

Comme $R \subset S_t$ pour t suffisamment grands, *il* suffit, pour établir le théorème, de montrer que $d(t) \equiv 0$ pour $t \epsilon \langle 0, +\infty)$.

Les fonctions $d_1(t)$, $d_2(t)$ et $d(t)$ sont non négatives, continues (ceci résulte de (2,4)) et non décroissantes. Comme $(x, y) \epsilon S_{t(x,y)}$, on a

$$|p(x,y)-\bar{p}(x,y)| \leqslant d_1(t(x,y)) \text{ et } |q(x,y)-\bar{q}(x,y)| \leqslant d_2(t(x,y))$$

pour $(x, y) \epsilon R$, d'où, en tenant compte de (3,11) et (2,8), on tire

$$|z(x,y)-\bar{z}(x,y)| \leqslant l\cdot d_1(t(x,y))+l\cdot d_2(t(x,y)) \leqslant l\cdot d(t(x,y)),$$

donc, en vertu de (3.9), (3,1) et (3,3),

$$|p(x,y)-p(x,y)| \leqslant \left|\int_{g(x)}^{y} \omega((1+l)\cdot d(t(x,s)))\,ds\right| + Kl\cdot d_1(t(x,g(x))) + \\ +(Kl+A)\cdot d_2(t(x,g(x))).$$

De là on obtient d'après (2,13) et (2,15),

$$|p(x,y)-\bar{p}(x,y)| \leqslant \int_0^{t(x,y)} \omega((l+1)\cdot d(\tau))\,d\tau + Kl\cdot d_1(t(x,y))+(Kl+A)\cdot d_2(t(x,y)),$$

et par conséquent, en tenant compte de (2,6),

$$d_1(t) \leqslant \int_0^t \omega((l+1)\cdot d(\tau))\,d\tau+Kl\cdot d_1(t)+(Kl+A)\cdot d_2(t) \text{ pour } t\epsilon \langle 0, +\infty).$$

On obtient de même, en tenant compte de (3,10), (3,1), (3,4), (2,14), (2,16) et (2,6),

$$d_2(t) \leqslant \int_0^t \omega((l+1)\cdot d(\tau))\,d\tau+(Kl+B)\,d_1(t)+Kl\cdot d_2(t) \text{ pour } t\epsilon \langle 0, +\infty),$$

d'où on tire, d'après (3,12),

$$d(t) \leqslant \int_0^t \varphi(d(\tau))\,d\tau \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, +\infty),$$

où

$$\varphi(\delta) = \frac{c_1 + c_2}{1 - \varkappa}\,\omega((l+1)\cdot\delta) \quad \text{pour} \quad \delta \in \langle 0, +\infty).$$

Par conséquent (cf. [4], théorème 1, p. 200)

$$d(t) \leqslant D(t) \quad \text{pour} \quad \delta \in \langle 0, +\infty),$$

où

$$D(t) = \int_0^t \varphi(D(\tau))\,d\tau, \text{ c'est-à-dire } D(0) = 0 \text{ et } D'(t) = \varphi(D(t)).$$

Mais en vertu de (3,2), on a

$$\int_0^\delta \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty \quad \text{pour} \quad \delta > 0,$$

donc $D(t) = 0$ pour $t \in \langle 0, +\infty)$ et, par suite, aussi $d(t) = 0$ pour $t \in \langle 0, +\infty)$, ce qui démontre le théorème.

En utilisant le théorème 1, qui vient d'être établi, ainsi que les lemmes 7 et 8 du travail [2], le théorème 1 du travail [3] et le lemme 5 du travail [3], en appliquant la méthode du prolongement des solutions exposée dans les démonstrations des théorèmes 3, 4 et 5 du travail [3] nous obtenons les deux théorèmes suivants sur l'existence d'une et une seule solution du problème de Mlle Z. Szmydt pour l'équation (0,1).

Théorème 2. *Supposons que l'hypothèse* (U) *soit vérifiée et que l'on ait*

$$|g(x) - \mathring{x}| \leqslant a\cdot|x - \mathring{x}| \quad \text{pour} \quad x \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

et

$$|h(y) - \mathring{y}| \leqslant b\cdot|y - \mathring{y}| \quad \text{pour} \quad y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

où les constantes positives a et b satisfont à l'inégalité

$$a\cdot b < 1.$$

Etant donné un nombre $\mathring{z}$, il existe exactement une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1^*)}$ dans le rectangle R, qui y satisfait à l'équation (0,1) *et aux conditions* (3,6), (3,7) *et* (3,8).

Théorème 3. *Supposons que l'hypothèse* (U) *soit vérifiée et que les courbes d'équations $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ aient pour seul point commun l'un des sommets du rectangle R, leurs con-*

tingents en ce point étant disjoints. Etant donné un nombre $\mathring{z}$, il existe exactement une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R, qui y satisfait à l'équation (0,1) *et aux conditions* (3,6), (3,7) *et* (3.8).

De ces théorèmes on déduit immédiatement les deux théorèmes suivants sur le problème de G o u r s a t pour l'équation (0,1).

Hypothèses (U*). Soit R le rectangle défini par les inégalités

$$\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2; \ -\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < +\infty,$$
$$\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2; \ -\infty < \beta_1 < \beta_2 < +\infty.$$

Nous supposons:

1° que la fonction $f(x, y, z\ p, q)$ est continue pour $(x, y) \epsilon R$ et z, p, q quelconques et qu'elle y satisfait à la condition

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$

où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \epsilon \langle 0, +\infty)$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{pour} \quad \delta > 0,$$

2° que les courbes d'équations $y = g(x)$, $x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, où les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont de classe $C^{(1)}$, sont contenues dans le rectangle R et qu'elles y ont exactement un point commun $(\mathring{x}, \mathring{y})$;

3° que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont de classe $C^{(1)}$ pour $x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $\varphi(\mathring{x}) = \psi(\mathring{y})$.

Théorème 4. *Supposons que l'hypothèse* (U*) *soit vérifiée et que l'on ait*

$$|g(x) - \mathring{y}| \leqslant a \cdot |x - \mathring{x}| \quad \textit{pour} \quad x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \tag{4.1}$$

$$\textit{et} \quad |h(y) - \mathring{x}| \leqslant b \cdot |y - \mathring{y}| \quad \textit{pour} \quad y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

où les constantes positives a *et* b *vérifient l'inégalité*

$$a \cdot b < 1.$$

Dans ces conditions il existe exactement une fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R, qui y satisfait à l'équation (0·1) *et aux conditions*

$$z(x, g(x)) = \varphi(x) \quad \textit{pour} \quad x \epsilon \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \tag{4.2}$$

et

$$z(h(y), y) = \psi(y) \quad \textit{pour} \quad y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle. \tag{4.3}$$

Théorème 5. *Supposons vérifiée l'hypothèse* (U*). *Soit* $(\dot{x}, \dot{y})$ *l'un des sommets du rectangle* R *et supposons que l'on ait*

$$|g'(\dot{x}) \cdot h'(\dot{y})| < 1. \tag{4.4}$$

Il existe exactement une fonction $z(x, y)$, *de classe* $C^{(1^*)}$ *dans le rectangle* R, *qui y satisfait à l'équation* (0,1) *et aux conditions* (4,2) *et* (4,3).

Pour établir les théorèmes 4 et 5 il suffit d'appliquer les théorèmes 2 et 3, en posant $G(x,z,q) \equiv \varphi'(x) - g'(x) \cdot q$, $H(y,z,p) \equiv \psi'(y) - h(y) \cdot p$, $\dot{z} = \varphi(\dot{x}) = \psi(\dot{y})$. Dans le théorème 5 le problème de Goursat a été énoncé comme dans le travail [1], où il était question de l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y)$. La condition (4,4) (de même que (4,1)) exclut de cas où les courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ sont tangentes; pourtant nous avons montré, dans le travail [1], que dans le cas de l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y)$ on peut admettre, en gardant les précautions nécessaires, que ces courbes sont tangentes. Dans le théorème 1 du travail [2] j'ai réussi à étendre ce résultat, pour ce qui concerne l'existence et l'unicité des solutions, à l'équation générale (0,1) dans le cas où les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont toutes les deux non décroissantes et où il ne s'agit que d'une solution détterminée dans un ensemble situé entre les courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$. Je pourrai maintenant énoncer un théorème analogue dans le cas où les hypothèses sont les mêmes que dans le théorème 5, toutefois sans l'hypothèse (4,4).

Condition (χ). Il existe une fonction $\chi(x, y)$, de classe $C^{(1)}$ dans le rectangle R, telle que $\varphi(x) \equiv \chi(x, g(x))$, $\psi(y) \equiv \chi(h(y), y)$ et que les conditions de Lipschitz

$$|\chi_x(x, y') - \chi_x(x, y'')| \leqslant K \cdot |y' - y''| \quad \text{et} \quad |\chi_y(x', y) - \chi_y(x'', y)| \leqslant K \cdot |x' - x''|,$$

où K est une constante positive, sont vérifiées dans le rectangle R.

Dans le théorème 1 du travail [2] la condition (χ) devait être remplie. Il est pourtant évident que, pour asurer l'unicité seule de la solution, il n'est plus nécessaire d'introduire cette condition, car elle est automatiquement remplie s'il existe une solution quelconque. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 8 du travail [3] nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Théorème 6. *Supposons vérifiée l'hypothèse* (U*) *et admettons que le le point* (x, y) *soit un des sommets du rectangle* R *et que toutes les fonctions* $d\lambda^n(x)/dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *où* $\lambda^0(x) = x$, $\lambda^{n+1}(x) = h(g(\lambda^n(x)))$, *soient bornées dans leur ensemble dans l'intervalle* $\langle a_1, a_2 \rangle$. *Il eiste au plus une fonction* $z(x, y)$, *de classe* $C^{(1^*)}$ *dans le rectangle* R, *qui y vérifie l'équation* (0,1) *et les conditions* (4,2) *et* (4,3). *Si, de plus, la condition* (χ) *est remplie, il existe exactement une telle fonction.*

Remarque. Des théorèmes 5 et 6 de ce travail il résulte que dans le le théorème 1 du travail [2] il n'était pas nésessive, pour assurer l'existence d'une solution, de supposer les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ non décroisantes. L'exemple suivant montre que cette hypothèse est pourtaant necessaire pour assurer l'unicité de la solution, définie seulement entre les courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$.

Exemple. Admettons $g(x) \equiv x - x^2$, $h(y) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$ et $\psi(y) \equiv 0$ pour $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$. Soit Δ l'ensemble défini par les inégalités $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x - x^2 \leqslant y \leqslant 1$. L'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = 0$ admet alors un infinité de solutions de classe $C^{(1*)}$ dans l'ensemble Δ, qui vérifient les conditions (4,2) et (4,3); elles sont déterminées par la formule:

$$z(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, x - x^2 \leqslant y \leqslant 1, \\ C \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\alpha} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \frac{1}{4} \leqslant y \leqslant 1, \\ C \cdot \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{1}{4} - y\right)^{\alpha}\right] & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, x - x^2 \leqslant y < \frac{1}{4}, \end{cases}$$

où $\alpha > 1$ et C est une constante arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B i e l e c k i, A. et K i s y ń s k i, J., *Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y)$*. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10**, 10 (1956), p. 99—126.

[2] K i s y ń s k i, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$*. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **11**, 11 (1957), p. 73—112.

[3] K i s y ń s k i, J., *Sur l'existence des solutions d'un problème de Mlle Z. Szmydt relatif à l'équation $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$*. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **12**, 12 (1958), p. 67—109.

[4] O p i a l, Z., *Sur un système d'inégalités intégrales*. Annales Polonici Mathematici, **3**, 2 (1957), p. 200—209.

[5] S z m y d t, Z., *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations, différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **4**, 2 (1956), p. 67—72.

Streszczenie

Praca dotyczy jednoznaczności rozwiązań następującego, postawionego przez Panią Z. Szmydt problemu dla równania

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y). \tag{1}$$

Problem (S). Niech R oznacza prostokąt

$$\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2, \quad \beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2.$$

Dane są funkcje $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$ i $H(y, z, p)$, ciągłe dla $(x, y) \epsilon R$ i z, p, q dowolnych. Ponadto dane są funkcje $g(x)$ i $h(y)$ ciągłe odpowiednio w przedziałach $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ i $\langle\beta_1, \beta_2\rangle$, spełniające nierówności $\beta_1 \leqslant g(x) \leqslant \beta_2$ i $\alpha_1 \leqslant h(y) \leqslant \alpha_2$. Wreszcie dany jest punkt $(\mathring{x}, \mathring{y}) \epsilon R$ oraz liczba $\mathring{z}$. Poszukiwane jest rozwiązanie $z(x, y)$ równania (1), określone i ciągłe wraz z pochodnymi z_x, z_y i z_{xy} w prostokącie R, spełniające warunki

$$z_x(x, g(x)) = G(x, z(x, g(x)), z_y(x, g(x))) \quad \text{dla} \quad x \epsilon \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle,$$

$$z_y(h,(y), y) = H(y, z(h(y), y), z_x(h(y), y)) \quad \text{dla} \quad y \epsilon \langle\beta_1, \beta_2\rangle,$$

$$z(\mathring{x}, \mathring{y}) = \mathring{z}.$$

Odnośnie funkcji, występujących w sformułowaniu powyższego problemu w niniejszej pracy przyjęte są założenia następujące.

Założenia (U):

1° funkcja $f(x, y, z, p, q)$ spełnia dla $(x, y) \epsilon R$ i $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ dowolnych nierówność

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$

gdzie $\omega(\delta)$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą dla $\delta \epsilon \langle 0, +\infty)$, taką że $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ dla $\delta > 0$, oraz

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{dla} \quad \delta > 0;$$

2° funkcje $G(x, z, q)$ i $H(y, z, p)$ spełniają dla $x \epsilon \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$, $y \epsilon \langle\beta_1, \beta_2\rangle$ i $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ dowolnych warunki Lipschitza

$$|G(x, z, q) - G(x, \bar{z}, \bar{q})| \leqslant K \cdot |z - \bar{z}| + A(x) \cdot |q - \bar{q}|$$

i

$$|H(y, z, p) - H(y, \bar{z}, \bar{p})| \leqslant K \cdot |z - \bar{z}| + B(y) \cdot |p - \bar{p}|,$$

gdzie K jest stałą dodatnią, zaś $A(x)$ i $B(y)$ są to funkcje ciągłe i dodatnie dla $x \epsilon \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ i $y \epsilon \langle\beta_1, \beta_2\rangle$;

3° funkcje $g(x)$ i $h(y)$ spełniają w przedziałach $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ i $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ warunki Lipschitza

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant L \cdot |x' - x''| \quad \text{i} \quad |h(y') - h(y'')| \leqslant L \cdot |y' - y''|,$$

gdzie L jest stałą dodatnią;

4° krzywe o równaniach $y = g(x)$ i $x = h(y)$ mają w prostokącie R dokładnie jeden punkt wspólny $(\mathring{x}, \mathring{y})$;

5° spełniona jest nierówność

$$A(\mathring{x}) \cdot B(\mathring{y}) < 1.$$

Twierdzenie I. *Jeśli założenia* (U) *są spełnione oraz funkcje* $g(x)$ i $h(y)$ *spełniają warunki*

$$|g(x) - \mathring{y}| \leqslant a \cdot |x - \mathring{x}| \quad \text{dla} \quad x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$$

i

$$|h(y) - \mathring{x}| \leqslant b \cdot |y - \mathring{y}| \quad \text{dla} \quad y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$ *i*

$$a \cdot b < 1,$$

wówczas problem (S) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Twierdzenie II. *Przypuśćmy, że założenia* (U) *są spełnione oraz, że krzywe o równaniach* $y = g(x)$, $x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ i $x = h(y)$, $\langle y \in \beta_1, \beta_2 \rangle$ *mają mają za jedyny punkt wspólny jeden z wierzchołków prostokąta* R, *przy czym ich kontyngensy w tym wierzchołku są rozłączne. Przy powyższych założeniach problem* (S) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Istnienie rozwiązań w obu przypadkach wynika z twierdzeń pracy [3]. Jednoznaczności dowodzi się przy pomocy twierdzenia Z. Opiala o nierównościach całkowych w oparciu o własności pewnej rodziny ośmiokątów położonych w płaszczyźnie xy. Ostatni rozdział zawiera wynikające z twierdzeń I i II twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zadania Goursata dla równania (1).

Резюме

Эта работа касается однозначности решений следующей проблемы, поставленной мадам С. Шмыдт относительно уравнения

(1) $$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$$

Проблема (S). Пусть R обозначает прямоугольник

$$\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2, \qquad \beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$$

Даны функции $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$ и $H(y, z, p)$ непрерывные для $(x, y) \in R$ и произвольных z, p, q. Сверх того даны функции $g(x)$ и $h(y)$

непрерывные соотвественно в сегментах $\langle a_1, a_2 \rangle$ и $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, исполняющие неравенства $\beta_1 \leqslant g(x) \leqslant \beta_2$ и $a_1 \leqslant h(y) \leqslant a_2$. Ктому дана точка $(\mathring{x}, \mathring{y})$ и число $\mathring{z}$. Ищется решение $z(x, y)$ уравнения (1) определённое и непрерывное вместе с производными z_x, z_y и z_{xy} в црямругольнике R, исполняющие условия

$$z_x(x, g(x)) = G(x, z(x, g(x)), z_y(x, g(x))) \text{ для } x \epsilon \langle a_1, a_2 \rangle$$
$$z_y(h(y), y) = H(y, z(h(y), y), z_x(h(y), y))) \text{ для } y \epsilon \langle \beta_1, \delta_2 \rangle$$
$$z(\mathring{x}. \mathring{y}) = \mathring{z}.$$

Относительно функций, выступающих в формулировке вышеизложенной проблемы, в этой работе приняты следующие предпосылки. Предпосылки (U):

1° Функция $f(x, y, z, p, q)$ исполняет для $(x, y) \epsilon R$ и произвольных z, p, q, $\bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ неравенство

$$|f(x, y, z, p, q) - f(z, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$

где $\omega(\delta)$ есть функция непрерывная и немалеющая для $\delta \epsilon \langle 0, +\infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ для $\delta > 0$, а также

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{для} \quad \delta > 0;$$

2° функции $G(x, z, q)$ и $H(y, z, p)$ исполняют для $x \epsilon \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ и произвольных z, p, q, $\bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ условия Липшица

$$|G(x, z, q) - G(x, \bar{z}, \bar{q})| \leqslant K \cdot |z - \bar{z}| + A(x) \cdot |q - \bar{q}|$$

и

$$|H(y, z, p) - H(y, \bar{z}, \bar{p})| \leqslant K \cdot |z - \bar{z}| + B(y) \cdot |p - \bar{p}|,$$

где K есть положительная постоянная, а $A(x)$ и $B(y)$ суть функции непрерывные и положительные для $x \epsilon \langle a_1, a_2 \rangle$ и $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$;

3° функции $g(x)$ и $h(y)$ исполняют в сегментах $\langle a_1, a_2 \rangle$ и $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ условия Липшица

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant L \cdot |x' - x''| \text{ и } |h(y') - h y'')| \leqslant L \cdot |y' - y''|,$$

где L положительная постоянная;

4° кривые, определяемые уравнениями $y = g(x)$ и $x = h(y)$, имсют в прямоугольнике R в точности одну общую точку $(\mathring{x}, \mathring{y})$;

5° исполнено неравенство

$$A(\mathring{x}) \cdot B(\mathring{y}) < 1.$$

Теорема I. Если продпосылки (U) выполнены, а функции $g(x)$ и $h(y)$ исполняют условия

$$|g(x)\dot{y}| \leqslant a \cdot |x - \dot{x}| \quad \text{для} \quad x \epsilon \langle a_1, a_2 \rangle,$$

и

$$|h(y)\dot{x}| \leqslant b \cdot |y - \dot{y}| \quad \text{для} \quad y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

причём

$$a > 0,\ b > 0 \text{ и } a \cdot b < 1,$$

то тогда проблема (S) имеет в точности одно решение.

Теорема II. Предположим, что предпосылки (U) выполнены и что кривые с уранениями $y = g(x)$, $x \epsilon \langle a_1, a_2 \rangle$ и $x = h(y)$, $y \epsilon \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, имеют в качестве единственной общей точки одну из вершин прямоугольника R, причём их контигенты в этой вершине раздельны. При этих предпосылках проблема (S) имеет в точности одно решение.

Существование решений в обеих случаях вытекает из теоремы работы [3]. Однозначность доказывается при помощи теоремы З. Опиала об интегральных неравенствах, опираясь на свойствах некоторого семейства восьмиугольников, лежащих на плоскости xy. Последняя глава содержит вытекающие из теорем I и II предложения о существовании и однозначности решений задачи Гурса для уравнения (1).