ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XII, 6 SECTIO A 1958

Z Zakładu Matematyki III. Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur la notion des liaisons

O pojęciu więzów

О понятии связей

1. La notion des liaisons est aussi vieille que la Mécanique elle même, mais elle est tout-de-même assez confuse pour être une source des malentendus. Les définitions usuellement données dans des Traités ne sont pas assez précises et permettent de douter si certains systèmes sont libres ou non, ou bien s'ils sont holonomes ou non. Ce dernier cas est plus important, le comportement de tels systèmes étant moins intuitif que le comportement des systèmes libres.

Dans cette Note nous introduisons des nouvelles notions de mouvement libre et de mouvement holonome. En partant de ces notions nous construisons *une systématique des systèmes* qui est plus detaillée et plus précise que celle qui était employée jusqu'à present.

2. Nous allons appeller *liaisons* d'un ensemble de n points

$$P_i = (x_{3i-2},\ x_{3i-1},\ x_{3i}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

chaque ensemble de conditions

$$(*) \qquad f_k(t, x_1, \ldots, x_{3n},\ \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n},\ c_1, \ldots, c_r) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s$$

(où le signe $=$ peut être remplacé par les signes $<$ ou $\leqslant$ et $c_1, \ldots, c_r$ désigne un ensemble de constantes arbitraises), tel que

1° Les conditions soient indépendentes (c'est-à-dire qu'aucune des conditions (*) ne peut pas être obtenue des autres à l'aide des transformations analytiques, des dérivations ou des intégrations).

2° Il existe des ensembles des nombres

$$t, x_1, \ldots, x_{3n},\ \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n},\ c_1, \ldots, c_r$$

qui vérifient (*).

3° Les fonctions f_k soient assez régulières.

On ne considére le plus souvent que des conditions (*) qui ne dépendent pas des constantes arbitraires. Cela suffit dans les applications, car on peut considérer les liaisons pour chaque ensemble des constantes $c_1, \ldots, c_r$ séparément (voir l'exemple 7E) mais ne permet pas d'introduire une définition de l'équivalence des liaisons qui pourrait être utilisable pour la définition des liaisons holonomes.

Nous n'excluons pas l'éventualité $f_1 \equiv 0$. (Vu 1° on doit alors avoir $s = 1$). Si $f_1 \equiv 0$ nous allons dire que les liaisons sont *banales*.

Un ensemble de point assujetti aux liaisons banales sera dit *système libre*. Dans le cas contraire il sera dit *système non libre*.

Les extensions des définitions que nous avons admis ci-dessus aux liaisons paramètriques, aux liaisons qui dépendent de $\ddot{x}_i, \ldots$, aux systèmes de corps solides etc. sont évidentes.

On pourrait être tenté d'introduire une définition d'un type plus général que la définition admise ci-dessus (et qui suffit pour toutes les applications), par exemple appeller liaisons chaque condition qui exclue certaines positions ou vitesses. Cette définition semble être trop vague pour servir de base à une théorie précise.

Admettons que les forces appliquées ne dépendent que du temps, des positions et des vitesses.

De l'axiome des réactions des liaisons (voir — par exemple — Przeborski [2]) il résulte l'existence des forces appellées *réactions des liaisons*. Les conditions analytiques (*) ne les définissent pas univoquement. Acceptons une *réalisation des liaisons*, c'est-à-dire admettons qu'elles soient *sans frottement*, ou bien — plus généralement — qu'elles *ne travaillent pas* (c'est-à-dire que la somme des travaux virtuels soit nulle, voir — par exemple — Tatarkiewicz [3]), ou bien qu'elles soient *avec frottement*, ou enfin qu'elles *comportent un asservissement*, etc. La réalisation des liaisons peut dépendre du choix des forces appliquées (voir l'exemple du no 9). Alors — si l'on connaît les conditions initiales et les forces appliquées — les réactions seront définies univoquement.

Nous dirons qu'un *système $\mathcal{S}$ de n points est déterminé* si nous connaissons les masses m_i de ces points, leurs liaisons, les forces appliquées et la réalisation des liaisons (donc les réactions).

Nous allons entendre par *conditions initiales* chaque ensemble de valeurs $x_i(t_1)$, $\dot{x}_i(t_1)$, $i = 1, 2, \ldots, 3n$ qui est compatible avec les liaisons, c'est-à-dire qui vérifie (*).

Soit un intervalle de temps $\langle t_1, t_2 \rangle$ fixe et un système $\mathcal{S}$ fixe. Supposons que le mouvement du système $\mathcal{S}$ soit déterminé dans l'intervalle $\langle t_1, t_2 \rangle$ par les liaisons $\boldsymbol{L}$ (c'est-à-dire qu'il vérifie (*) pour un ensemble donné des constantes $c_1, ..., c_r$), les forces appliquées (assez régulières) $\boldsymbol{F}$, une réalisation donnée $\boldsymbol{T}$ des liaisons $\boldsymbol{L}$ et les conditions initiales $\boldsymbol{I}$ (compatibles avec les liaisons $\boldsymbol{L}$ — en général elles déterminent les constantes $c_1, ..., c_r$ univoquement). Ce mouvement est alors déterminé univoquement et sera dit *mouvement* $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$. (Les mouvements des systèmes libres pourront être caractérisés par $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{I}$ seulement).

3. Supposons que deux liaisons $\boldsymbol{L}^{(1)}$, et $\boldsymbol{L}^{(2)}$ soient indépendentes ou bien qu'au moins une d'elles soit banale. Si un système est assujetti aux liaisons $\boldsymbol{L}^{(1)}$ et aux liaisons $\boldsymbol{L}^{(2)}$, nous dirons qu'il est assujetti *aux liaisons* $\boldsymbol{L}^{(1)} + \boldsymbol{L}^{(2)}$.

Définition 1. *Si le mouvement* $\boldsymbol{L}^{(1)} + \boldsymbol{L}^{(2)}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$ *est le même que le mouvement* $\boldsymbol{L}^{(1)}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$, *alors nous dirons que dans ce mouvement les liaisons* $\boldsymbol{L}^{(2)}$ *n'agissent pas. Dans le cas contraire nous dirons qu'elles agissent.*

Si aux liaisons $\boldsymbol{L}^{(j)}$, $j = 1, 2$, correspondent les réactions $R_i^{(j)}$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, ..., 3\,n$, et dans un mouvement les liaisons $\boldsymbol{L}^{(2)}$ n'agissent pas, alors pour ce mouvement $R_i^{(2)} \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., 3n$ et inversement. Remarquons que les liaisons banales n'agissent pas.

Définition 2. *Si dans le mouvement* $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$, *les liaisons* $\boldsymbol{L}$ *n'agissent pas nous dirons que ce mouvement est libre. Dans le cas contraire nous dirons qu'il n'est pas libre.*

On peut définir d'une manière semblable une *position d'équilibre libre (d'équilibre non libre)* d'un système.

4. Nous dirons que deux liaisons $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{L}^*$ sont *équivalentes*, si $\boldsymbol{L}^*$ est une conséquence de $\boldsymbol{L}$ et inversement. (C'est-à-dire que $\boldsymbol{L}^*$ se laisse obtenir de $\boldsymbol{L}$ à l'aide des transformations analytiques, des dérivations et des intégrations).

Si $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{L}^*$ sont des liaisons équivalentes et ont une même réalisation, alors leurs réactions sont les mêmes.

Nous dirons que les *liaisons* $\boldsymbol{L}$ *sont holonomes*, si elles sont équivalentes à des liaisons (*) qui ne dépendent pas des $\dot{x}_i$ ou à des liaisons banales. Les *liaisons* qui ne sont pas holonomes seront dites *non holonomes*.

Un système assujetti aux liaisons holonomes sera dit *système holonome*. Un système assujetti aux liaisons non holonomes sera dit *système non holonome*.

Chaque système libre est un système holonome.

Définition 3. *Soit un mouvement* $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$. *S'il existe des liaisons indépendentes* $\boldsymbol{L}^{(1)}$ *et* $\boldsymbol{L}^{(2)}$ *telles que* 1° $\boldsymbol{L}^{(1)} + \boldsymbol{L}^{(2)}$ *soient équivalentes à* $\boldsymbol{L}$, 2° *les liaisons* $\boldsymbol{L}^{(1)}$ *soient holonomes,* 3° *les liaisons* $\boldsymbol{L}^{(2)}$ *n'agissent pas, nous dirons que ce mouvement est holonome. Si pour chaque couple de liaisons indé-*

pendentes $L^{(1)}$ *et* $L^{(2)}$ *tel que* 1° $L^{(1)}+L^{(2)}$ *soient équivalentes à* L, 2° *les liaisons* $L^{(1)}$ *soient holonomes,* 3° *les liaisons* $L^{(2)}$ *soient non holonomes et agissent, nous dirons que ce mouvement est non holonome.*

5. Remarquons que chaque mouvement d'un système libre est un mouvement libre. Mais il existe (voir ci-dessous l'exemple du $n°$ 7A) des systèmes non libres qui n'admettent que des mouvements libres.

De même remarquons que chaque mouvement d'un système holonome est un mouvement holonome. Mais il existe (voir ci-dessous les numéros 8 et 9) des systèmes non holonomes qui n'admettent que des mouvements holonomes.

Introduisons les définitions suivantes:

Définition 4. *Un système non libre qui n'admet que des mouvements libres, sera dit système pseudo-libre.*

Définition 5. *Un système non holonome qui n'admet que des mouvements holonomes sera dit système pseudo-holonome.*

Chaque système pseudo-libre est un système pseudo-holonome.

Remarquons que la notion du système libre ne dépend que de ces liaisons (elles doivent êtres banales, donc peuvent avoir n'importe quelle réalisation), c'est-à-dire si un système est libre, alors tous les systèmes ayant les mêmes liaisons, indépendamment des forces appliquées, sont libres. Cependant, la notion du système pseudo-libre dépend aussi des forces appliquées et des réalisations des liaisons, c'est-à-dire en changeant convenablement les forces appliquées ou des réalisations des liaisons nous pouvons passer d'un système pseudo-ilbre à un système qui n'est plus pseudo-libre (voir les exemples 7B et 7C). La même différence existe entre les systèmes holonomes et les systèmes pseudo-holonomes.

6. Il est facile de voir que tous les mouvements libres d'un système non libre peuvent être plongés, sans changement des forces appliquées dans un champ de mouvement d'un système libre. C'est-à-dire qu'il existe un champ de force F_i^* defini dans tout l'espace et égale à F_i pour toutes les positions et vitesses vérifiant les liasons et tel que chaque mouvement libre L, F, T, I soit un mouvement F^*, I d'un système libre.

De même il est facile de voir que tous les mouvements holonomes d'un système non holonome ayant des liaisons $L^{(1)}+L^{(2)}$ peuvent être plongé sans changement des forces appliquées et de la réalisation des liaisons dans un champ de mouvements d'un système holonome. C'est-à-dire qu'il existe un champ de force F_i^* défini pour toutes les positions et vitesses compatibles avec les liaisons holonomes $L^{(1)}$ et égal à F_i pour toutes les positions et vitesses vérifiant les liaisons $L^{(1)}+L^{(2)}$, tel que chaque mouvement holonome $L^{(1)}+L^{(2)}$, F, T, I soit un mouvement $L^{(1)}$, F, T, I d'un système holonome.

7. Des exemples.

A. Soit un point dont les liaisons sont formées par un plan fixe, les forces appliquées ont des directions contenues dans ce plan et les liaisons ont une réalisation sans frottement. Chaque mouvement de ce système non libre est un mouvement libre. Il s'ensuit que nos liaisons (bilatérales) n'agissent pas.

B. Si nous introduisons dans l'exemple A une réalisation des liaisons qui comporte du frottement, alors (quoique le mouvement reste plan) les liaisons vont agir et les mouvements ne seront plus libres.

Si nous allons accepter la réalisation des liaisons sans frottement et ajouter les forces du frottement aux forces appliquées, les mouvements resteront libres. Nous voyons que la notion du mouvement libre dépend de ce que nous considérons certaines forces comme des réactions ou bien comme des forces appliquées.

C. Si l'on change convenablement dans l'examble A les directions du champ des forces appliquées, on peut facilement parvenir à des exemples des systèmes dont certains mouvements sont libres et les autres ne le sont pas.

Par exemple, si les liaisons sont $x_1 = 0$, le champ des forces appliquées est $[0, x_2, 1]$ et les liaisons ont une réalisation sans frottement, alors seulement les mouvements ayant comme conditions initiales $x_1(t_1) = 0$, $x_2(t_1) = 0$ sont des mouvements libres.

D. Tous les mouvements d'une pendule phérique sont non libres.

E. Les liaisons d'un point

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 - c_1 = 0$$

(où c_1 est une constante arbitraire) sont *équivalentes*. Soit un champ de forces $[0, 0, 1]$. Supposons que les liaisons ont une réalisation sans frottement. Alors notre système (formé d'un point) sera pseudo-libre et exécutera les mêmes mouvements que le système assujetti seulement aux liaisons banales et sollicité par le même champ de forces $[0, 0, 1]$. Cependant en changeant le champ de forces en $[1, 0, 0]$ nous obtiendrons deux systèmes n'ayant plus les mêmes mouvements et (le système non libre ne sera plus pseudo-libre).

Dans chaque mouvement les conditions initiales détermineront la constante c_1.

F. Soient des liaisons (unilatérales) $\boldsymbol{L}$: $x_1 \leqslant 0$. Alors pour chaque mouvement tel que $x_1(t) < 0$ les liaisons $\boldsymbol{L}$ n'agissent pas.

G. Les liaisons $x_1 < 0$ sont un exemple des liaisons qui n'agissent pas pour chaque mouvement compatible avec eux.

8. Soit un système libre. Si nous introduisons comme liaisons des intégrales prémières du système primitif, nous n'obtiendrons que des mouvements libres (pour des conditions initiales qui doivent évidemment être compatibles avec les liaisons). C'est-à-dire que le nouveau système ainsi obtenu est pseudo-libre.

De même si nous considérons un système holonome et si nous introduisons comme liaisons supplémentaires des intégrales prémières du système primitif nous n'obtiendrons que des mouvements holonomes (pour des conditions initiales qui doivent évidemment être aussi compatibles avec les nouvelles liaisons). Si les intégrales prémières employées comme liaisons forment des conditions non holonomes, nous allons obtenir ainsi un système pseudo-holonome.

9. Considérons comme exemple le système non holonome donné par M. Bottema [1]. Soit un disc horizontal D qui peut tourner autour d'un axe vertical I et soit un point matériel P qui doit se mouvoir sur ce disc. Ces liaisons $\boldsymbol{L}^{(1)}$ peuvent s'exprimer par des conditions ne comportant pas des dérivées, donc elles sont holonomes. En plus, supposons que le moment de la quantité de mouvement est constant (M. Bottema suppose même qu'il est égal à zéro). Cette liaison $\boldsymbol{L}^{(2)}$ — comme l'a démontré M. Bottema — est non holonome.

Supposons que les forces appliquées sont des forces intérieures du système et supposons que les liaisons ne travaillent pas, ce qui implique que les liaisons holonomes $\boldsymbol{L}^{(1)}$ sont sans frottement (il n'y a pas de frottement entre l'axe I et le disc D et entre le disc D et le point P).

Alors du Théorème du moment de la quantité du mouvement et des résultats du numéro précédent il s'ensuit que tous les mouvements (ayant les conditions initiales compatibles avec les liaisons) sont des mouvements holonomes. Donc le système est *pseudo-holonome* [1]).

[1]) M. H. D. Block dans le compte rendu du travail de M. Bottema au *Math. Rev.* **17** (1956), p. 203 construit une autre définition que la nôtre des liaisons et des liaisons non holonomes. (De cette définition il s'ensuit que les liaisons non holonomes de l'exemple de M. Bottema ne sont pas du tout des liaisons dans le sens de M. Block). La définition de M. Block — qui est sans défaut du point de vue de la logique — pourrait être acceptée comme base de la théorie des liaisons. Malheuresement elle a un caractère metamathématique (elle emploie des propositions sur propositions mathématiques et non des propositions sur des objets mathématiques); en plus elle met en avant les forces et les conditions initiales et ne définit les liaisons qu'en fonction des forces et des conditions initiales. Il nous semble qu'en mettant en avant les liaisons nous avons obtenu une notion qui est plus proche de la notion intuitive (et employée en pratique) des systèmes libres et des systèmes holonomes.

M. Bottema fait une approximation des mouvements de son système à l'aide d'un système holonome. Vu les résultats du no. 6 tous les mouvements de ce système peuvent être plongés dans un champ des mouvements d'un système holonome, donc ils sont exactement (et non seulement approximativent) des mouvements d'un système holonome se mouvant sous l'influence des mêmes forces. Cette remarque rend peu intéressante l'étude du système de M. Bottema.

Si l'on admet, dans l'exemple de M. Bottema, que des forces extérieures sont appliquées, alors la réalisation des liaisons exigera (en général) des liaisons comportant un asservissement. Cet exemple nous montre que la réalisation des liaisons peut dépendre effectivement du choix des forces appliquées. Il est à remarquer que le système ainsi obtenu fournira (en général) des mouvements non holonomes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bottema, O., *Note on a non holonomic system*, Quart. Appl. Math. **13** (1955), p. 191-192.

[2] Przeborski, A., *Die allgemeisten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeit. **36** (1933), p. 184-194.

[3] Tatarkiewicz, K., *Une généralisation des équations de Maggi et d'Appell*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska (A) **10** (1956), p. 5-32.

Streszczenie

Praca ma na celu uściślenie pojęć: więzów, więzów holonomicznych i więzów anholonomicznych oraz wyodrębnienie dwóch klas układów: pseudoswobodnych i pseudoholonomicznych. W klasach tych znajdą się pewne układy, o które toczyły się ostatnio polemiki, czy są one, czy też nie są układami holonomicznymi.

Jeśli w pewnym przedziale czasu ruch układu skrępowanego pewnymi więzami i zdeterminowany przez pewne warunki początkowe (zgodne z więzami) odbywa się pod wpływem danych sił przy danej realizacji więzów (więzy beztarciowe, tarciowe, regulujące itd.) w ten sam sposób, jak gdyby układ był swobodnym i działały nań te same siły, to mówimy że dany *ruch układu jest swobodny*.

Może się zdarzyć, że układ jest skrępowany więzami, lecz mimo to każdy jego ruch (zgodny z więzami) pod wpływem pewnych sił i przy danej realizacji więzów jest swobodny. Mówimy, iż wtedy *układ jest pseudoswobodny*.

Na przykład każdy ruch punktu, który ma się poruszać bez tarcia po pewnej stałej płaszczyźnie, pod wpływem sił leżących w tejże płaszczyźnie jest ruchem swobodnym (mimo iż mamy do czynienia z układem nie swobodnym). Jest to więc przykład układu pseudoswobodnego.

Podobnie definiuje się *ruchy holonomiczne* i *układy* (anholonomiczne) *pseudoholonomiczne*. Podane są przykłady takich ruchów i takich układów.

Резюме

Эта работа имеет целью уточнить понятия связей, связей голономных и неголономных, а также выделить два класса систем: псевдосвободных и псевдо-голономных. К этим классам принадлежат некоторые системы, относительно которых велись в последнее время полемики, являются ли они голономными системами, или нет.

Если в некотором интервале времени движение системы подверженной некоторым связям, и определённое некоторыми начальными условиями (совместными со связями), происходит под действием данных сил при данном реализировании связей (связи без трения, с трением, регулирующие и т. д.) таким самым образом, как-будто бы система была свободна, и на неё действовали бы те же самые силы, то говорим, что данное движение системы свободно.

Может случиться, что система подвержена связям, но несмотря на это каждое её движение (согласное со связями) под действием некоторых сил и при данном реализировании связей свободно. Говорим, что тогда система псевдо-свободна.

Например, всякое движение точки, которая вынуждена двигаться без трения по некоторой неподвижной плоскости, под действием сил, лежащих в этой же плоскости, есть движение свободное (несмотря на то, что имеем дело с системой несвободной). Это пример системы псевдо-свободной.

Подобным образом определяется движения голономные и системы (неголономные) псевдо-голономные. Приведены примеры таких движений и таких систем.