ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XII, 4 SECTIO A 1958

Z Seminarium Matematycznego I. Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

BARBARA KRZYŻ

Sur les fonctions en moyenne (ψ) p-valentes

O funkcjach (ψ) średnio p-listnych

О функциях (ψ) в среднем p-листных

1. Dans son travail [3] M. D. C. Spencer a introduit la notion de (ψ) p-valence en moyenne. Soit $\psi(r)$ une fonction non-décroissante et absolument continue, définie pour $r \geqslant 0$ et telle que $\psi(0) = 0$. Considérons une fonction $f(z)$ régulière dans le cercle-unité où elle prend $n(w) \geqslant n(re^{i\theta})$ fois la valeur $w = re^{i\theta}$ et posons

$$p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(re^{i\theta})\, d\theta .$$

On dit que la fonction $f(z)$ est en moyenne (ψ) p-valente dans le cercle-unité s'il existe un nombre positif p (non nécessairrement entier) tel qu'on a

$$\int_0^R p(r)\, d[\psi(r)] \leqslant p \int_0^R d\psi(r) = p\psi(R),$$

ou

$$\int_0^R [p - p(r)]\, \psi'(r)\, dr \geqslant 0 \tag{1.1}$$

pour tout $R > 0$. D'après (1.1) on voit que la condition $\psi(0) = 0$ peut être omise.

La condition (1.1) montre que les fonctions en moyenne p-valentes de M. Biernacki [1] c'est-à-dire telles que $p - p(r) \geqslant 0$ pour tout $r > 0$, sont toujours (ψ) p-valentes pour chaque fonction non-décroissante $\psi(r)$.

Deux espèces de (ψ) multi-valence en moyenne ont été étudiées en détail: la classe des fonctions en aire multi-valentes $(\psi(r)=\pi r^2)$ introduite par D. C. Spencer [3] et celle des fonctions de p-valence logarithmique $(\psi(r)=\log r, p(r)=p=\text{const}$ pour r assez petit). Cette dernière classe a été introduite par Garabedian et Royden [2]. Ils ont remarqué que la classe introduite par eux-mêmes est plus étendue que celle de D. C. Spencer.

Le but de ce travail est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes très simples qu'il faut imposer aux fonctions $\psi(r)$ et $\varphi(r)$ pour qu'une fonction en moyenne (ψ) p-valente quelconque soit aussi en moyenne (φ) p-valente.

2. Théorème. *Soient $\psi(r)$ et $\varphi(r)$ des fonctions continues, ainsi que leurs premières dérivées, définies pour $r\geqslant 0$, telles que $\psi'(r)>0$ pour $r\geqslant 0$, $\varphi'(r)\geqslant 0$ pour $r>0$ et $\varphi'(r)/\psi'(r)$ est à variation bornée dans tout intervalle fini.*

La condition nécessaire et suffisante pour que chaque fonction $f(z)$, régulière et en moyenne (ψ) p-valente dans le cercle-unié, soit aussi en moyenne (φ) p-valente est que $\varphi'(r)/\psi'(r)$ soit une fonction non-croissante.

Démonstration. La condition est suffisante. Suppose que $\varphi'(r)/\psi'(r)$ soit une fonction non-croissante. Posons $\Phi(r)=p-p(r)$.

D'après (1.1) on a

$$u(R)=\int_0^R \Phi(r)\psi'(r)\,dr\geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad R>0. \tag{2.1}$$

$\varphi'(r)/\psi'(r)$ étant une fonction mesurable bornée, nous voyons que

$$\Phi(r)\varphi'(r)=\Phi(r)\psi'(r)\cdot\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}$$

est une fonction sommable. En appliquant la formule d'intégration par parties ([4] p. 298) on a:

$$\int_0^R \Phi(r)\varphi'(r)\,dr=\int_0^R \Phi(r)\psi'(r)\cdot\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\,dr=\left[\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}u(r)\right]_0^R+\int_0^R u(r)\,d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]=$$

$$=\frac{\varphi'(R)}{\psi'(R)}u(R)+\int_0^R u(r)\,d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right],$$

où la dernière intégrale est prise au sens de Rieman-Stieltjes. Pour établir notre énoncé, il suffit de remarquer que $\varphi'(R)/\psi'(R)$ et $u(R)$ sont non-négatives et que $\{-\varphi'(r)/\psi'(r)\}$ est non-décroissante.

La condition est nécessaire. Supposons que les fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ remplissent les conditions précédentes sauf celle de la non-croissance de $\varphi'(r)/\psi'(r)$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux nombres α, β, $0<\alpha<\beta$ tels que $\varphi'(\alpha)/\psi'(\alpha)<\varphi'(\beta)/\psi'(\beta)$. Nous allons trouver une fonction $f(z)$ réguilière dans le cercle-unité qui, étant en moyenne (ψ) p-valente, n'est pas en même temps en moyenne (φ) p-valente.

D'abord remarquons qu'il existe une fonction non-négative $u(r)$, définie pour tout $r\geqslant 0$, continue ainsi que sa première dérivée, positive dans l'intervalle $(0, r_0)$ où $r_0>\beta$, s'annulant en dehors de cet intervalle (en particulier $u(0)=0$) et telle que

$$\int_0^{r_0} u(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]<0. \tag{2.2}$$

Pour établir son existence considérons une suite non-croissante quelconque $\{u_n(r)\}$ de fonctions continues ,ainsi que leurs premières dérivées, telle que

$$\begin{array}{llll} u_n(0)=u_n(r)=0 & & \text{pour} & r\geqslant r_0 \\ u_n(r)>0 & \text{et croissante} & \text{pour} & 0<r<\alpha \\ u_n(r)=1 & & \text{pour} & \alpha\leqslant r\leqslant\beta \\ u_n(r)>0 & \text{et décroissante} & \text{pour} & \beta<r<r_0 \end{array}$$

$$n=1,2,\ldots.$$

Admettons en outre que cette suite $\{u_n(r)\}$ converge vers zéro en dehors de l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Il est facile de voir que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{r_0} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]<0.$$

En effet, δ étant positif, arbitrairement choisi, on a

$$\int_0^{r_0} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]=\int_0^{\alpha-\delta} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]+\int_{\alpha-\delta}^{\alpha} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]+$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]+\int_{\beta}^{\beta+\delta} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]+\int_{\beta+\delta}^{r_0} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right].$$

Les integrales

$$\int_0^{\alpha-\delta} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right] \quad \text{et} \quad \int_{\beta+\delta}^{r_0} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]$$

tendent vers zéro, car la suite $u_n(r)$ converge vers zéro uniformément dans les intervalles $[0, \alpha-\delta]$ et $[\beta+\delta, r_0]$.

L'intégrale

$$\int_{\alpha-\delta}^{\alpha} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]$$

peut être évaluée de la manière suivante

$$\left|\int_{\alpha-\delta}^{\alpha} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]\right| < \operatorname*{Max}_{[\alpha-\delta,\alpha]} u_n(r) \cdot \overset{\alpha}{\underset{\alpha-\delta}{V}}\left(-\frac{\varphi'}{\psi'}\right) = \overset{\alpha}{\underset{\alpha-\delta}{V}}\left(-\frac{\varphi'}{\psi'}\right).$$

La fonction $-\varphi'(r)/\psi'(r)$ étant continue, la variation

$$\overset{\alpha}{\underset{\alpha-\delta}{V}}\left(-\frac{\varphi'}{\psi'}\right)$$

est une fonction continue de la variable δ alors

$$\lim_{\delta\to 0} \overset{\alpha}{\underset{\alpha-\delta}{V}}\left(-\frac{\varphi'}{\psi'}\right) = 0 .$$

Il est en est de même de l'intégrale

$$\int_{\beta}^{\beta+\delta} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right].$$

Ces deux intégrales peuvent donc être arbitrairement petites. Ensuite, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} u_n(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right] = \left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right]_{\alpha}^{\beta} < 0$$

indépendamment de n.

Par conséquent, pour $n = N$ assez grand, on a

$$\int_0^{r_0} u_N(r)\, d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right] < 0 .$$

Il suffit maintenant de poser $u(r) = u_N(r)$. La fonction $u(r)$ remplit toutes les conditions demandées, en particulier, la condition (2.2).

Maintenant nous allons déterminer une fonction $f(z)$ qui sera régulière et en moyenne (ψ) p-valente dans le cercle-unité, sans être en moyenne (φ) p-valente.

Considérons la fonction $u'(r)/\psi'(r)$. Elle est évidemment continue pour $r \geqslant 0$, positive dans le voisinage de $r = 0$, et elle s'annule pour $r \geqslant r_0$. Posons $p_1 = \sup\limits_{r \in [0, r_0]} u'(r)/\psi'(r)$ et prenons $p > p_1$.

Soit $p(r) = p - u'(r)/\psi(r)$. On voit que $p(r) > 0$ pour tout $r > 0$. Soit S la surface de Riemann composé de tous les arcs C_r: $|w| = r$, $-\pi p(r) < \arg w < \pi p(r)$ $(r > 0)$. S étant simplement connexe, il existe une fonction régulière $f(z)$ qui représente conformément le cercle-unité sur S.

Si $n(re^{i\theta})$ désigne le nombre des racines de l'équation $f(z) = re^{i\theta}$, on a évidemment:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{C_r} 1\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\,2\pi p(r) = p(r).$$

Ensuite, pour une telle fonction $f(z)$ nous avons:

$$\int_0^R |p - p(r)|\,\psi'(r)\,dr = \int_0^R \frac{u'(r)}{\psi'(r)}\,\psi'(r)\,dr = u(R) \geqslant 0$$

pour tout $R > 0$ et d'après la formule d'intégration par parties

$$\int_0^R [p - p(r)]\,\varphi'(r)\,dr = \int_0^R u'(r)\,\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\,dr = \int_0^R u(r)\,d\left[-\frac{\varphi'(r)}{\psi'(r)}\right] < 0$$

pour $R = r_0$.

Cela signifie que la fonction $f(z)$ est en moyenne (ψ) p-valente mais n'est pas en moyenne (φ) p-valente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki, M., *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, Bull. Sci. Math., **70** (1946), p. 61-76.

[2] Garabedian, P. R. and Royden, H. L., *The one-quarter theorem for mean univalent function*, Ann. of Math., **59** (1951), p. 310-324.

[3] Spencer, D. C., *A function-theoretic identity*, Ann. Journal of Math. **65** (1949), p. 147-160.

[4] Saks, S., *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930.

Streszczenie

W pracy tej zajmuję się porównaniem klas funkcji regularnych i (ψ) średnio p-listnych w sensie D. C. Spencera, i otrzymuję warunek konieczny i dostateczny na to, by funkcja (ψ) średnio p-listna była jednocześnie funkcją (φ) średnio p-listną. Warunkiem tym, przy odpowiednich założeniach co do funkcji $\psi(r)$ i $\varphi(r)$, jest by stosunek $\varphi'(r)/\psi'(r)$ był funkcją nierosnącą.

Резюме

В этой работе я занимаюсь сравнением классов регулярных функций (ψ) в среднем p-листных в смысле Д. Ц. Спенсера и получаю условие необходимое и достаточное для того, чтобы функция (ψ) в среднем p-листная была одновременно функцией (φ) в среднем p-листной. Это условие при подходящих предположениях относительно функций $\psi(r)$ и $\varphi(r)$, состоит в том, чтобы $\varphi'(r)/\psi'(r)$ было новозрастающей функцией.