ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 10 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ADAM BIELECKI et JAN KISYŃSKI

Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

O zagadnieniu E. Goursata dla równania

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

О задачи Е. Гурса для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

Dans le cas bien simple de l'équation linéaire du type hyperbolique à deux variables indépendantes de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y) \tag{0,1}$$

la plupart des problèmes aux limites classiques, tels que le problème de Cauchy ou bien celui de Darboux, admettent une résolution immédiate grâce à la connaissance d'une intégrale générale

$$z = \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)\, d\eta \right\} d\xi + V(x) + W(y) \tag{0,2}$$

de l'équation (0,1). Cependant, dans le problème posé par E. Goursat, [1] et [2], où il s'agit de trouver une solution de l'équation (0, 1) admettant des valeurs données d'avance le long de deux courbes issues d'un point P_0 dans le plan xy et n'ayant pas d'autres points communs, la question de l'existence des fonctions $V(x)$ et $W(y)$ régulières et compatibles avec les conditions aux limites devient beaucoup plus compliquée.

Les trois possibilités essentielles suivantes peuvent se présenter: 1° les deux courbes dont il vient d'être question ne sont pas tangentes l'une à l'autre *), 2° ces deux courbes ont une tangente commune au point P_0, mais celle-ci n'est parallèle à aucune des deux familles de caractéristiques de l'équation (0, 1), c'est-à-dire des familles de droites $x = \text{const}$ ou $y = \text{const}$, 3° les deux courbes considérées sont tangentes au point P_0 à une caractéristique $x = \text{const}$ ou $y = \text{const}$. Dans le cas 1°, le plus facile, l'application de la méthode donnée par E. Goursat ne présente pas de difficultés, tandis que dans les deux autres cas, certaines précautions sont indispensables car les séries qui y interviennent ne sont convergentes que sous certaines conditions.

Nous nous proposons ici d'examiner tous les trois cas et d'établir certaines conditions suffisantes pour l'existence d'une solution du problème en question.

On exige d'habitude que les deux courbes, le long desquelles les solutions de l'équation (0,1) doivent admettre des valeurs données d'avance, ne soient nulle part tangentes aux caractéristiques. Nous n'allons pas introduire cette restriction, ce qui nous permettra d'englober dans nos raisonnements, comme cas particuliers, le problème de Darboux et celui de Picard.

Les résultats exposés dans cette note seront appliqués dans un autre travail de l'un des auteurs [3], où il sera question d'équations plus générales du type hyperbolique.

1. Hypothèses, notations et énoncé des problèmes

Nous convenons de dire qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est de classe $C^{(0)}$ dans un ensemble ouvert B, si elle est définie et continue partout dans cet ensemble. Si, en outre, la fonction $f(x, y)$ admet deux dérivées partielles du premier ordre continues partout dans B, la fonction $f(x, y)$ sera dite de classe $C^{(1)}$ dans B. Enfin, si la fonction $f(x, y)$ est de classe $C^{(1)}$ et si elle admet encore une dérivée mixte du second ordre $f''_{x,y}(x, y)$ définie et continue partout dans B, la fonction $f(x, y)$ sera appelée de classe $C^{(1^*)}$ dans B. Nous dirons qu'une fonction $f(x, y)$ est de classe $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ ou $C^{(1^*)}$ dans un ensemble arbitraire Z, si la fonction $f(x, y)$ peut être prolongée sur un ensemble ouvert B, con-

*) Ce cas à été étudié par E. Goursat [2] dans des conditions un peu plus restrictives (dans son *Cours d'Analyse Mathématique* [1] il n'a donné qu'une idée générale d'une résolution). D'autre part, le cas en question est englobé dans les théorèmes très généraux de Mlle Z. Szmydt, concernant l'équation non linéaire $s = f(x, y, z, p, q)$, cf. [4] et [5].

tenant l'ensemble Z, de telle façon qu'elle soit respectivement de classe $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ ou $C^{(1^*)}$ dans B **). Nous adopterons des conventions semblables pour les fonctions d'une seule variable indépendante.

Il nous sera commode de formuler une fois pour toutes certaines hypothèses dont nous nous servirons dans tout ce travail.

Hypothèse (H_0). Une fonction $f(x, y)$ est de classe $C^{(0)}$ dans un rectangle D défini par les inégalités:

$$(D) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant b;$$

deux courbes Γ_x et Γ_y, contenues dans ce rectangle et n'ayant comme point commun que l'origine des coordonnées (fig. 1), sont représentées par les équations

$$(\Gamma_x) \qquad y = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$(\Gamma_y) \qquad x = h(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ étant de classe $C^{(1)}$ dans les intervalles $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$ respectivement; on a donc

$$g(0) = h(0) = 0$$

et

$$0 \leqslant g(x) \leqslant b, \qquad 0 \leqslant h(y) \leqslant a.$$

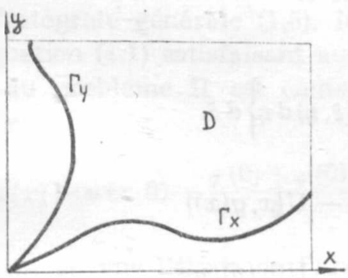

Fig. 1

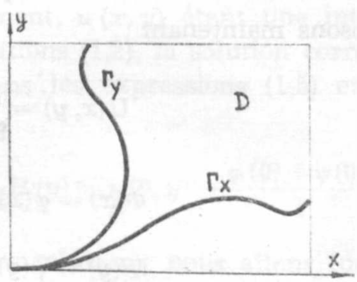

Fig. 2.

Hypothèse (H_0^*), **cas singulier.** Les fonctions $f(x, y)$, $g(x)$ et $h(y)$ jouissent des propriétés spécifiées dans l'hypothèse (H_0), avec la seule exception (fig. 2) que la fonction $h(y)$ ne doive pas nécessairement avoir une dérivée finie au point $y = 0$ ***).

**) Bien entendu, il est possible de donner une autre définition équivalente, où l'ensemble auxiliaire B n'interviendrait pas, mais nous n'allons pas discuter ces détails qui ne sont pas essentiels ici.

***) Il est évident que l'on pourrait ici échanger les rôles des variables indépendantes x et y ainsi que des fonctions $g(x)$ et $h(y)$, mais on n'obtiendrait alors rien d'essentiellement nouveau.

Hypothèse (K_0). Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont de classe $C^{(1)}$ dans les intervalles $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$ respectivement et $\varphi(0) = \psi(0)$.

Problème I (de E. Goursat). Trouver, dans les hypothèses (H_0) et (K_0) — ou bien (H_0^*) et (K_0) — une fonction $z = u(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle D, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\, \partial y} = f(x, y) \tag{1,1}$$

et aux conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u(x, g(x)) &= \varphi(x), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \\ u(h(y), y) &= \psi(y), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b. \end{aligned} \tag{1,2}$$

Nous verrons dans la suite que le problème I ainsi posé peut ne pas avoir de solutions, c'est-à-dire de solutions qui soient des fonctions de classe $C^{(1*)}$. Il sera donc indispensable de renforcer encore les hypothèses relatives aux fonctions données, afin d'assurer l'existence des solutions. Cependant, les hypothèses (H_0) et (K_0) — ou bien (H_0^*) et (K_0) — que nous venons d'introduire seront suffisantes dans les raisonnements concernant l'unicité des solutions du problème I.

Posons maintenant

$$U(x, y) = \int_0^x \left\{ \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta \right\} d\xi,$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - U(x, g(x)) \tag{1,3}$$

et

$$\Psi(y) = \psi(y) - \psi(0) - U(h(y), y); \tag{1,4}$$

nous aurons, dans les hypothèses (H_0) et (K_0) — ou bien (H_0^*) et (K_0),

$$\Phi(0) = \Psi(0) = 0, \qquad \Phi'(0) = \varphi'(0) \quad \text{et} \quad \Psi'(0) = \psi'(0).$$

L'intégrale générale de l'équation (1,1) ayant la forme bien connue

$$u(x, y) = U(x, y) + V(x) + W(y), \tag{1,5}$$

où $V(x)$ et $W(y)$ désignent deux fonctions indéterminées de classe $C^{(1)}$ dans $0 \leqslant x \leqslant a$ ou $0 \leqslant y \leqslant b$ respectivement, le problème I est tout à fait équivalent, dans les hypothèses (H_0) et (K_0) ou bien (H_0^*) et (K_0), au problème suivant, de forme plus simple:

Problème II. Etant données deux fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ de classe $C^{(1)}$ dans les intervalles $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$ respectivement et satisfaisant à la condition

$$\Phi(0) = \Psi(0) = 0, \tag{1,6}$$

trouver deux fonctions $G(x)$ et $H(y)$ de classe $C^{(1)}$ dans ces intervalles telles que

$$\begin{aligned} G(x) + H(g(x)) &= \Phi(x), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \\ G(h(y)) + H(y) &= \Psi(y), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \end{aligned} \tag{1,7}$$

et

$$G(0) = H(0) = 0. \tag{1,8}$$

Toute solution $u(x, y)$ du problème I s'obtient évidemment à partir d'une solution du problème II en faisant les substitutions

$$V(x) = G(x) + \frac{\varphi(0)}{2}, \qquad W(y) = H(y) + \frac{\psi(0)}{2} \tag{1,9}$$

dans l'intégrale générale (1,5). Inversement, $u(x, y)$ étant une intégrale de l'équation (1,1) satisfaisant aux conditions (1,2), la solution correspondante du problème II est contenue dans les expressions (1,5) et (1,9), à savoir:

$$G(x) = u(x, 0) - \frac{\varphi(0) + \psi(0)}{2} \quad \text{et} \quad H(y) = u(0, y) - \frac{\varphi(0) + \psi(0)}{2}.$$

Ayant en vue l'étude de l'unicité des solutions, nous allons formuler encore un problème, où les hypothèses seront un peu affaiblies:

Problème III. Etant données deux fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ définies et continues dans les intervalles $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$ respectivement et satisfaisant aux conditions (1,6), trouver deux fonctions $G(x)$ et $H(y)$ continues respectivement dans ces intervalles et vérifiant les équations (1.7) et (1,8) *).

*) On pourrait même renoncer à la continuité des fonctions $G(x)$ et $H(y)$ dans les intervalles $\langle 0, a \rangle$ et $\langle 0, b \rangle$ tout entiers; il suffirait de demander que ces fonctions soient continues seulement pour $x = 0$ et $y = 0$ respectivement et cette modification n'aurait pas d'influence sur les raisonnements du chapitre 3 où le problème III sera discuté en détail.

2. Fonctions $\lambda^i(x)$ et $\mu^i(y)$.

Posons (fig. 3) pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ et $i = 1, 2, \ldots$,

$$\lambda(x) = h(g(x)),$$

$$(2,1) \qquad \lambda^0(x) = x,$$

$$\lambda^i(x) = \lambda(\lambda^{i-1}(x)),$$

$$\mu(y) = g(h(y)),$$

$$(2,2) \qquad \mu^0(y) = y,$$

$$\mu^i(y) = \mu(\mu^{i-1}(y)).$$

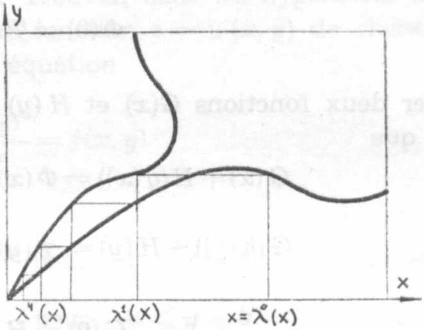

Fig. 3.

Nous allons énoncer plusieurs lemmes concernant ces fonctions, tout en conservant les hypothèses (H_0) et les notations déjà introduites dans le chapitre 1.

Lemme 1. *Lorsque* $0 < x \leqslant a$ *et* $y = g(x)$, *alors* $h(y) < x$; *lorsque* $0 < y \leqslant b$ *et* $x = h(y)$, *alors* $g(x) < y$.

En effet, si l'on avait par exemple $0 < x \leqslant a$, $y = g(x)$ et $h(y) \geqslant x$, on aurait $\lambda(x) = h(g(x)) \geqslant x$, d'où $\lambda(x) - x \geqslant 0$. D'autre part, il est évident que $\lambda(a) - a \leqslant 0$. Il existerait donc un $\bar{x}$ tel que $0 < \bar{x} \leqslant a$ et $\lambda(\bar{x}) - \bar{x} = 0$, c'est-à-dire

$$\bar{x} = h(\bar{y}), \quad \text{où} \quad \bar{y} = g(\bar{x}).$$

Mais ceci signifierait que les courbes Γ_x et Γ_y ont un point commun distinct de l'origine, contrairement à l'hypothèse (H_0).

Comme conséquence immédiate on a le lemme suivant:

Lemme 2. *Les suites* $\{\lambda^i(x)\}$ *et* $\{\mu^i(y)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *sont décroissantes pour* $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$; $\mu^i(0) = \lambda^i(0) = 0$.

Lemme 3. *Les deux suites* $\{\lambda^i(x)\}$ *et* $\{\mu^i(y)\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *tendent uniformément vers zéro lorsque i augmente indéfiniment.*

En effet, posons

$$\Lambda(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant x} \lambda(t).$$

La fonction $\Lambda(x)$ ainsi définie est évidemment continue et non décroissante pour $0 \leqslant x \leqslant a$; $\Lambda(0) = 0$.

Fixons un $x \in (0, a\rangle$. Puisque $\Lambda(x) = \lambda(\bar{x})$, où $0 \leqslant \bar{x} \leqslant x$, on a (cf. lemme 2) $\Lambda(x) = \lambda(\bar{x}) < \bar{x} \leqslant x$ pour $\bar{x} > 0$, ou bien $\Lambda(x) = \lambda(0) = 0 < x$; on a donc toujours

(2,3) $$\Lambda(x) < x \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant a.$$

Posons ensuite

$$\Lambda^0(x) = x \quad \text{et} \quad \Lambda^i(x) = \Lambda(\Lambda^{i-1}(x)) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

On démontre sans peine par induction que la suite $\{\Lambda^i(x)\}$ jouit des propriétés suivantes:

$$\Lambda^i(x) \leqslant \Lambda^{i-1}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

et

(2,4) $$0 \leqslant \lambda^i(x) \leqslant \Lambda^i(x) \leqslant \Lambda^i(\bar{x}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < \bar{x} \leqslant a \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

En particulier, la suite $\{\Lambda^i(a)\}$ est non croissante et, par conséquent, elle converge vers une limite $l \geqslant 0$. Mais, la fonction $\Lambda(x)$ étant continue, on a

$$\Lambda(l) = \Lambda(\lim_{i \to \infty} \Lambda^i(a)) = \lim_{i \to \infty} \Lambda^{i+1}(a) = l$$

et il résulte de (2,3) que la limite l ne peut être différente de zéro, c'est-à-dire

$$\lim_{i \to \infty} \Lambda^i(a) = 0$$

et par conséquent $\lambda^i(x) \to 0$ uniformément dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ tout entier, puisque, d'après (2,4), $0 \leqslant \lambda^i(x) \leqslant \Lambda^i(a)$.

Pour la seconde suite des fonctions $\{\mu^i(y)\}$ la démonstration est analogue.

Lemme 4. *Dans les hypothèses* (H_0) *du chapitre* 1 *on a toujours*

$$0 \leqslant T = g'(0) \cdot h'(0) \leqslant 1$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $\delta \leqslant a$, $\delta \leqslant b$, $|\lambda'(x) - T| < \varepsilon$ *lorsque* $0 \leqslant x \leqslant \delta$, *et* $|\mu'(y) - T| < \varepsilon$ *lorsque* $0 \leqslant x \leqslant \delta$.

Remarquons d'abord que $g'(0) \geqslant 0$ et $h'(0) \geqslant 0$, puisque les courbes Γ_x et Γ_y sont contenues, par hypothèse, dans le rectangle D; on a donc $T \geqslant 0$. Si l'on avait $T > 1$, on aurait $\lambda'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) > 1$ et, par conséquent, $\lambda(x) = \lambda(x) - \lambda(0) = x\,\lambda'(\Theta x) > x$, $0 < \Theta < 1$, pour des valeurs de la variable x assez voisines de zéro, en contradiction avec le lemme 2. Donc $T \leqslant 1$. Le reste est tout à fait évident.

Nous allons énoncer encore un lemme qui est une conséquence immédiate du lemme 4 et dans lequel interviendra une hypothèse additionnelle sur les courbes Γ_x et Γ_y.

Lemme 5. *Si $T = g'(0) \cdot h'(0) < 1$, c'est-à-dire si les courbes Γ_x et Γ_y ont des tangentes différentes au point $x = y = 0$, alors il existe deux nombres positifs $q < 1$ et $\delta \leqslant \min(a, b)$ tels que*

$$\left|\frac{d\lambda(x)}{dx}\right| \leqslant q < 1 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \delta$$

et

$$\left|\frac{d\mu(y)}{dy}\right| \leqslant q < 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta.$$

C a s s i n g u l i e r.

Les lemmes 1—3 subsistent évidemment dans le cas singulier correspondant à l'hypothèse (H_0^*), tandis que les lemmes 4 et 5 ne se conservent plus.

3. Unicité des solutions

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème III du point de vue de l'unicité des solutions. Les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ seront supposées continues dans les intervalles $\langle 0, a\rangle$ et $\langle 0, b\rangle$ respectivement. Quant aux fonctions $g(x)$ et $h(y)$, nous admettrons qu'elles satisfont aux hypothèses (H_0) ou bien (H_0^*).

Lemme 6. *Si un couple de fonctions continues $G(x)$ et $H(y)$ est une solution du problème* III, *celles-ci satisfont aux équations*

$$G(x) = G(\lambda(x)) + \sigma(x), \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{3,1}$$

$$H(y) = H(\mu(y)) + \tau(y), \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{3,2}$$

où

$$\sigma(x) = \Phi(x) - \Psi(g(x)), \qquad \tau(y) = \Psi(y) - \Phi(h(y)), \tag{3,3}$$

$\lambda(x)$ et $\mu(y)$ étant les fonctions définies dans le chapitre 1, *formules* (2,1) *et* (2,2).

La démonstration est immédiate.

Lemme 7. *Si une fonction $G(x)$ resp. $H(y)$ vérifie l'équation* (3,1) *resp.* (3,2) *et si elle satisfait à la condition $\lim_{x\to 0} G(x) = G(0) = 0$ resp. $\lim_{y\to 0} H(y) = H(0) = 0$, alors*

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(\lambda^i(x)) \tag{3,4}$$

respectivement

$$H(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau(\mu^i(y)) \tag{3,5}$$

et ces séries sont uniformément convergentes dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ resp. $\langle 0, b\rangle$.

En effet, il vient par exemple de l'équation (3,1) que la fonction $G(x)$ vérifie, pour $k=1, 2, \ldots$, l'équation

$$G(x)=G(\lambda^k(x))+\sum_{i=0}^{k-1}\sigma(\lambda^i(x))$$

dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. Lorsque k croît indéfiniment, $\lambda^k(x)$ tend uniformément vers zéro (lemme 3), d'où

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sigma(\lambda^i(x))=\lim_{k\to\infty}\{G(x)-G(\lambda^k(x))\}=G(x)$$

uniformément dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$.

Lemme 8. *Si l'une des séries* (3,4) *ou* (3,5) *est uniformément convergente, l'autre l'est aussi et elles représentent les solutions des équations* (3,1) *et* (3,2) *aussi bien que celles des équations* (1,7) *et* (1,8) *du chapitre* 1, *c'est-à-dire prises ensemble elles constituent une solution du problème* III.

En effet, supposons par exemple que la série (3,4) soit uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. Alors il est clair qu'elle satisfait à l'équation (3,1) et que la série

$$\text{(3,6)}\qquad -\sum_{i=0}^{\infty}\sigma(\lambda^i(h(y)))=-\sum_{i=0}^{\infty}\{\Phi(h(\mu^i(y)))-\Psi(\mu^{i+1}(y))\}$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$.

D'autre part, la série

$$\text{(3,7)}\qquad \sum_{i=0}^{\infty}\{\Psi(\mu^i(y))-\Psi(\mu^{i+1}(y))\}=\Psi(y)-\lim_{i\to\infty}\Psi(\mu^{i+1}(y))=\Psi(y)$$

converge aussi uniformément dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$ (lemme 3) et il en est de même de la série (3,5) qui s'obtient par l'addition des séries (3,6) et (3,7). La série (3,5) vérifie donc l'équation (3,2).

Pour achever la démonstration du lemme (8) il suffit de substituer les séries (3,4) et (3,5) dans les équations (1,8) et (1,7), en tenant compte des identités (3,3), soit

$$G(x)+H(g(x))=\sum_{i=0}^{\infty}\sigma(\lambda^i(x))+\sum_{i=0}^{\infty}\tau(\mu^i(g(x)))=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\{\Phi(\lambda^i(x))-\Psi(g(\lambda^i(x)))\}+\sum_{i=0}^{\infty}\{\Psi(\mu^i(g(x)))-\Phi(h(\mu^i(g(x))))\}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\{\Phi(\lambda^i(x))-\Phi(\lambda^{i+1}(x))\}=\Phi(x)-\lim_{i\to\infty}\Phi(\lambda^{i+1}(x))=\Phi(x).$$

Remarque. Les lemmes 6-8 subsistent dans le cas singulier, c'est-à-dire dans l'hypothèse (H_0^*) prise au lieu de (H_0).

Les résultats de ce chapitre peuvent être recueillis dans les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Dans les hypothèses* (H_0) *ou bien* (H_0^*) *chacun des problèmes* I, II *ou* III *n'admet qu'une solution au plus.*

Théorème 2. *Si, dans les hypothèses* (H_0) *ou bien* (H_0^*) *le problème* II *admet, pour un couple de fonctions* $\Phi(x)$ *et* $\Psi(y)$ *de classe* $C^{(1)}$, *une solution* $G(x)$ *et* $H(y)$ *et si ces dernières fonctions ne sont pas toutes les deux de classe* $C^{(1)}$ *dans l'intervalles* $0 \leqslant x \leqslant a$ *resp.* $0 \leqslant y \leqslant b$, *alors le problème correspondant* I, *c'est-à-dire celui dans lequel les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $\psi(y)$ *satisfont aux équations* (1,3) *et* (1,4), *n'admet aucune solution.*

En effet, si le problème I possédait une solution, on en obtiendrait, comme on le sait, une solution de classe $C^{(1)}$ du problème II, et ce dernier ne pourrait avoir d'autres solutions en vertu du théorème 1.

4. Exemples et renforcement des hypothèses

Exemple 1. Soit $a = b = 1$, $h(y) = y$, $g(x) = \lambda(x) = \mu(x) = x/(x+1)$, $f(x, y) = 0$, $\varphi(x) = 0$ et $\psi(y) = y$. Ainsi, les hypothèses (H_0) et (K_0) sont vérifiées, mais le problème I n'a pas de solutions. En effet, dans ce cas on a — cf. les formules (1,3), (1,4), (2,1), (2,2) et (3,3) —

$$\sigma(x) = -\frac{x}{x+1}, \qquad \tau(y) = y, \qquad \lambda^i(x) = \frac{x}{ix+1}, \qquad \mu^i(y) = \frac{y}{iy+1}.$$

Les séries (3,4) et (3,5) qui prennent ici la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x}{(i+1)x+1}, \qquad \sum_{i=0} \frac{y}{iy+1}$$

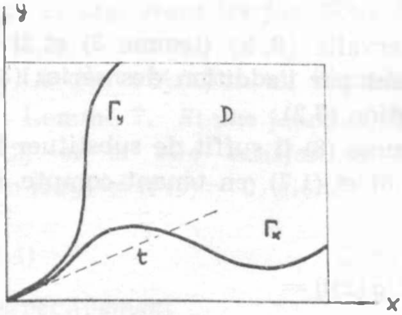

Fig. 4

sont divergentes. Il en résulte (cf. lemmes 6 et 7) qu'il ne peut exister aucune solution du problème I, ce qu'on pouvait prévoir directement, puisque dans le cas envisagé aucune fonction $u(x, y)$ ayant une différentielle finie au point $x = y = 0$ ne serait évidemment compatible avec les conditions aux limites.

Le sens géométrique de cet exemple est bien simple. Dans le cas (fig. 4) où les courbes Γ_x et Γ_y ont une tangente t commune au point $x = y = 0$ on ne peut, évidemment, pas donner d'avance le long de ces courbes des valeurs tout à fait arbitraires à une fonction $u(x, y)$ qui doit être de classe $C^{(1*)}$, en tant que solution du problème I. C'est pourquoi l'idée s'impose de formuler une hypothèse supplémentaire relative aux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ qui figurent dans les conditions aux limites (1,2).

Hypothèse (K_1). Une fonction $\chi(x, y)$, définie sur la somme de deux courbes $\Gamma_x+\Gamma_y$ par les égalités

$$\chi(x, y)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{sur} \quad \Gamma_x \\ \psi(y) & \text{sur} \quad \Gamma_y\end{cases}$$

est de classe $C^{(1*)}$, c'est-à-dire la fonction $\chi(x, y)$ peut être prolongée sur un ensemble ouvert B de points contenant ces deux courbes de telle façon que la fonction $\chi(x, y)$ ainsi prolongée soit de classe $C^{(1*)}$ dans B.

Nous pouvons évidemment admettre que l'ensemble B contient le rectangle D.

L'énoncé de l'hypothèse (K_1) peut cependant être un peu affaibli, à savoir:

Hypothèse (K_1'). Il existe une fonction $\chi(x, y)$ de classe C^1 dans D telle que

$$\chi(x, g(x))=\varphi(x), \qquad \chi(h(y), y)=\psi(y)$$

et que l'on a, dans D,

$$\begin{aligned}&|\chi_x'(x, y)-\chi_x'(x, \bar{y})| \leqslant L|\bar{y}-y|, \\ &|\chi_y'(\bar{x}, y)-\chi_y'(x, y)| \leqslant L|\bar{x}-x|.\end{aligned} \tag{4,1}$$

L'exemple suivant montre que la condition (4,1) est indispensable.

Exemple 2. Le rectangle D et les fonctions $f(x, y)$, $g(x)$ et $h(y)$ seront les mêmes que dans l'exemple 1. Il n'est pas difficile de construire (nous omettrons les détails) une fonction $\chi(x, y)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $\quad \chi(x, y)=(x^2-y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ pour $0<x\leqslant 1$, $\dfrac{x}{x+1}\leqslant y\leqslant x$,

2° $\quad \chi(x, 0)=\chi_y'(x, 0)=0$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$,

3° $\quad \chi(0, y)=\chi_x'(0, y)=0$ pour $0\leqslant y\leqslant 1$,

4° les fonctions $\chi(x, y)$, $\chi_x'(x, y)$, $\chi_y'(x, y)$ sont définies et continues dans le rectangle D tout entier,

5° la dérivée du second ordre $\chi_{xy}''(x, y)$ existe dans le rectangle D tout entier et elle est continue partout, à l'exception du point $x=y=0$.

On constate facilement que

$$\chi''_{xy}(0,0)=0$$

et

$$\chi''_{xy}(x,x)=\frac{2\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x},\qquad \text{pour}\quad 0<x\leqslant 1.$$

Il s'ensuit que la dérivée $\chi''_{xy}(x,y)$ n'est pas bornée dans le voisinage de l'origine. Ceci suffit déjà pour que le problème I n'ait aucune solution. En effet, remarquons que les équations (3,1) et (3,2) du lemme 6, chapitre 3, prennent ici la forme

$$G(x)=G\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}x^2\sin^2\frac{\pi}{x},$$

$$H(y)=H\left(\frac{y}{y+1}\right)-\frac{y^2+2y}{(y+1)^2}y^2\sin^2\frac{\pi}{x}$$

et elles admettent une solution continue dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$

$$G(x)=x^2\sin^2\frac{\pi}{x},\quad H(y)=-y^2\sin^2\frac{\pi}{x}. \tag{4,2}$$

En vertu des lemmes 6—8, chapitre 3, ces dernières fonctions représentent une solution du problème III avec des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ convenablement choisies, mais les fonctions (4,2) n'ont pas de dérivées au point $x=y=0$ et, par conséquent, d'après le théorème 2 du chapitre précédent le problème I n'admet pas de solutions dans le cas envisagé.

Les hypothèses (H_0), (K_0) et (K_1), ou (K_1'), prises ensemble n'assurent pas encore, comme nous le verrons dans le chapitre 7, l'existence de solutions régulières du problème I dans tous les cas possibles et certaines hypothèses supplémentaires sur les fonctions $g(x)$ et $h(y)$, c'est-à-dire sur les courbes Γ_x et Γ_y, seront encore nécessaires.

On peut renforcer les conditions (H_0) de diverses manières. Nous allons distinguer trois alternatives relativement assez simples qui, bien entendu, n'épuiseront pas toutes les possibilités.

Hypothèse (H_1). Les fonctions

$$\frac{d}{dx}\lambda^i(x)=\prod_{j=0}^{i-1}\lambda'(\lambda^j(x)),\qquad \text{où}\quad i=1,2,\ldots,$$

sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $(0,a)$.

Hypothèse (H_2). Il existe une constante positive $\delta \leqslant a$ telle que

$$\lambda'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant \delta.$$

Hypothèse (H_3).

$$0 \leqslant T = h'(0) \cdot g'(0) < 1.$$

Il est bien clair que l'on pourrait en obtenir deux nouvelles alternatives en échangeant les rôles des fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(y)$. Il est aussi évident que l'hypothèse (H_3), la plus forte, implique (H_2) et que celle-ci implique, à son tour, l'hypothèse (H_1), la plus faible. L'hypothèse (H_3) est d'autant plus forte qu'elle contient non seulement (H_2) et (H_1), mais aussi (K_1), ce que nous verrons dans le chapitre suivant (théorème 3, remarque).

Dans le cas singulier, correspondant à l'hypothèse (H_0^*), nous adopterons une hypothèse supplémentaire un peu plus forte que (H_1).

Hypothèse (H_1^*). Il existe une constante positive M telle que respectivement dans les intervalles $0 < x \leqslant a$ et $0 < y \leqslant b$ et pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ les dérivées des fonctions $\lambda^i(x)$ et $\mu^i(y)$ sont continues et remplissent les inégalités suivantes:

$$\left| \frac{d}{dx} \lambda^i(x) \right| \leqslant M, \qquad \left| \frac{d}{dy} \mu^i(y) \right| \leqslant M,$$

et, en outre,

$$\lim_{y \to 0} \{y\, h'(y)\} = 0. \tag{4,3}$$

Remarque. On pourrait remplacer ces dernières conditions par les suivantes, plus fortes mais plus simples: les fonctions $d\lambda^i(x)/dx$ sont continues et bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $(0, a\rangle$ et la dérivée $h'(y)$ est monotone au sens large dans un voisinage du point $y = 0$.

En effet, on aurait alors, dans un certain voisinage de zéro,

$$h(y) = h(y) - h(0) = h'(\Theta y) \cdot y \geqslant h'(y) \cdot y, \qquad 0 < \Theta < 1,$$

et

$$h'(\mu^i(y)) \frac{d}{dy} \mu^i(y) = \frac{d}{dy} h(\mu^i(y)) = \left\{ \frac{d}{dx} \lambda^i(x) \right\}_{x = h(y)} \cdot h'(y),$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dy} \mu^i(y) \right| \leqslant \sup_{(0, a\rangle} \left| \frac{d}{dx} \lambda^i(x) \right| \leqslant M$$

dans un certain voisinage de zéro.

5. Existence des solutions dans le cas le plus simple

Théorème 3. *Dans les hypothèses* (H_0), (H_3) et (K_0) *le problème I admet une et une seule solution*

$$u(x,y)=\int_0^x\left\{\int_0^y f(\xi,\eta)\,d\eta\right\}d\xi+G(x)+H(y)+\frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2},$$

où

$$G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sigma(\lambda^i(x)),$$

$$H(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\tau(\mu^i(y)),$$

(5,1) $$\sigma(x)=\varphi(x)-\psi(g(x))+\int_x^{\lambda(x)}\left\{\int_0^{g(x)} f(\xi,\eta)\,d\eta\right\}d\xi,$$

(5,2) $$\tau(y)=\psi(y)-\varphi(h(y))+\int_y^{\mu(y)}\left\{\int_0^{h(y)} f(\xi,\eta)\,d\xi\right\}d\eta,$$

$$\lambda^0(x)=x,\qquad \mu^0(y)=y,$$

$$\lambda^i(x)=h(g(\lambda^{i-1}(x)))\quad et\quad \mu^i(y)=g(h(\mu^{i-1}(y))),$$

pour $i=1,2,\ldots$ *Les fonctions* $G(x)$, $H(x)$,

$$G'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\sigma(\lambda^i(x))$$

et

$$H'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\tau(\mu^i(y))$$

sont continues dans les intervalles $\langle 0,a\rangle$ *et* $\langle 0,b\rangle$ *respectivement, les séries qui les représentent sont uniformément convergentes dans ces intervalles et elles ont des majorantes géométriques convergentes* *).

*) Localement, dans un rectangle $0\leqslant x\leqslant\alpha$, $0\leqslant y\leqslant\beta$ suffisamment petit, où $\alpha\leqslant a$, $\beta\leqslant b$, l'existence d'une solution du problème I est, dans les hypothèses (H_0), (H_3) *et* (K_0), une conséquence immédiate d'un théorème dû à Mlle Z. Szmydt, [4], théorème 2, p. 582. Cependant, ce théorème ne pourrait pas être appliqué au rectangle $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ tout entier sans certaines hypothèses additionnelles, eu égard à la restriction contenue dans les inégalités 10 [4], p. 582.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu des hypothèses (H_0) et (K_0) il existe un nombre positif M tel que

$$(5,3)\qquad \begin{aligned} &|g'(x)| \leqslant M \quad \text{et} \quad |\varphi'(x)| \leqslant M \quad \text{dans} \quad \langle 0, a \rangle, \\ &|h'(y)| \leqslant M \quad \text{et} \quad |\psi'(y)| \leqslant M \quad \text{dans} \quad \langle 0, b \rangle \end{aligned}$$

et $|f(x, y)| \leqslant M$ dans D.

En vertu de l'hypothèse (H_3) il existe, d'après le lemme 5 (chapitre 2), une constante positive $q < 1$ telle que $|\lambda'(x)| \leqslant q$ pour $0 \leqslant x \leqslant \delta$ et $|\mu'(y)| \leqslant q$ pour $0 \leqslant y \leqslant \delta$, où $\delta \leqslant \min(a, b)$ est une constante positive. D'après le lemme 3 (chapitre 2) il existe un entier positif N tel que

$$0 \leqslant \lambda^i(x) \leqslant \delta \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mu^i(y) \leqslant \delta \quad \text{pour} \quad i = N, N+1, N+2, \ldots .$$

Il s'ensuit (cf. aussi lemme 2, chapitre 2) que pour $i = N+j$, $j = 1, 2, \ldots$, on a

$$(5,4)\qquad \left| \frac{d}{dx} \lambda^i(x) \right| \leqslant q^j \left| \frac{d}{dx} \lambda^N(x) \right| \leqslant q^j M^{2N}$$

et

$$(5,5)\qquad 0 \leqslant \lambda^i(x) = \lambda^j(\lambda^N(x)) - \lambda^j(0) \leqslant q^j \cdot \delta$$

pour $0 \leqslant x \leqslant a$ et, pareillement,

$$(5,6)\qquad \left| \frac{d}{dy} \mu^i(y) \right| \leqslant q^j \left| \frac{d}{dy} \mu^N(y) \right| \leqslant q^j M^{2N}$$

et

$$(5,7)\qquad 0 \leqslant \mu^i(y) \leqslant q^j \cdot \delta$$

pour $0 \leqslant y \leqslant b$, d'où l'on obtient, d'après (5,1) - (5,7),

$$\begin{aligned} |\sigma(\lambda^i(x))| &\leqslant |\varphi(\lambda^i(x)) - \varphi(0)| + |\psi(g(\lambda^i(x))) - \psi(0)| + \\ &+ \int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)} \left\{ \int_0^{g(\lambda^i(x))} |f(\xi, \eta)| \, d\eta \right\} d\xi \leqslant \\ &\leqslant M \lambda^i(x) + M^2 \lambda^i(x) + M b \lambda^i(x) \leqslant M^* q^j \end{aligned}$$

où M^* est une constante positive, et, pareillement,

$$|\tau(\mu^i(y))| \leqslant M^{**} q^j,$$

où M^{**} est une constante positive. On a donc

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \sigma(\lambda^i(x)) \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} M^* q^j, \qquad \sum_{i=N+1}^{\infty} \tau(\mu^i(y)) \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} M^{**} q^j,$$

c'est-à-dire les séries (5,1) et (5,2) ont des majorantes géométriques et, par conséquent, elles sont uniformément convergentes; cela suffit, en vertu du lemme 8 (chapitre 3), pour qu'elles représentent une solution du problème III.

Considérons maintenant les séries que l'on obtient en les dérivant terme à terme.

On a, d'après (5,1) - (5,5),

$$\sigma'(x) = \varphi'(x) - \psi'(g(x)) \cdot g'(x) + \left| \int_0^{g(x)} f(\lambda(x), \eta)\, d\eta \right| \lambda'(x) -$$

$$- \int_0^{g(x)} f(x, \eta)\, d\eta + \left| \int_x^{\lambda(x)} f(g(x), \eta)\, d\eta \right| \cdot g'(x),$$

d'où

$$|\sigma'(x)| \leqslant M + M^2 + Mb \cdot M^2 + Mb + Mb \cdot M = M'$$

et pareillement

$$|\tau'(y)| \leqslant M'',$$

M' et M'' étant deux constantes positives. Il en résulte, d'après (5,4) et (5,6), que l'on a pour $i = N + j$, $j = 1, 2, \ldots$,

$$\left| \frac{d\sigma(\lambda^i(x))}{dx} \right| \leqslant M^{2N} \cdot M' \cdot q^j \quad \text{et} \quad \left| \frac{d\,\tau(\mu^i(y))}{dy} \right| \leqslant M^{2N} \cdot M'' \cdot q^j,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{d}{dx}\, \sigma(\lambda^i(x)) \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{M^{2N} \cdot M'}{q^N} \cdot q^i$$

et

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{d}{dy}\, \tau(\mu^i(y)) \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{M^{2N} \cdot M''}{q^N} \cdot q^i.$$

Ceci entraîne la convergence uniforme des séries qui représentent les dérivées $G'(x)$ et $H'(y)$ et leur continuité. Les fonctions $G(x)$ et $H(y)$, étant de classe $C^{(1)}$ respectivement dans les intervalles $\langle 0, a \rangle$ et $\langle 0, b \rangle$, constituent une solution non seulement du problème III, mais aussi du problème II, et une solution du problème I s'en obtient immédiatement. L'unicité de la solution est déjà assurée par le théorème 1 du chapitre 3. Le théorème 3 se trouve ainsi complètement démontré.

Remarque. Comme la solution $u(x, y)$ satisfait aux conditions (1,2) du chapitre 1 et qu'elle est de classe $C^{(1^*)}$, nous voyons que dans ce cas la condition (K_1) est remplie; celle-ci est donc une conséquence nécessaire des hypothèses (H_0), (K_0) et (H_3).

Cas particuliers

I. (Problème de P i c a r d). Dans les hypothèses (H_0) et (K_0), si $g(x) \equiv 0$ dans $\langle 0, a \rangle$, l'hypothèse (H_3) résulte directement de l'hypothèse (H_0) et le problème I admet une seule solution

$$u(x, y) = \int_0^y \left\{ \int_{h(y)}^x f(\xi, \eta)\, d\xi \right\} d\eta + \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(h(y)). \tag{5,8}$$

II. (Problème de D a r b o u x). Si, de plus, $h(y) \equiv 0$ dans $\langle 0, b \rangle$, le problème I devient trivial. Alors

$$u(x, y) = \int_0^y \left\{ \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi \right\} d\eta + \varphi(x) + \psi(y) - \frac{\varphi(0) + \psi(0)}{2}.$$

Dans ces deux cas particuliers, la résolution directe du problème s'obtient immédiatement.

6. Existence des solutions dans le cas où les courbes Γ_x et Γ_y sont tangentes

Dans le cas où la condition (H_3) n'est pas remplie, la question de l'existence des solutions du problème I devient assez délicate. En vertu du lemme 4 (chapitre 2) on a dans ce cas

$$g'(0) \cdot h'(0) = 1$$

lorsque l'hypothèse (H_0) est remplie, ou bien

$$g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad h'(0) = +\infty$$

dans l'hypothèse (H_0^*). Les courbes Γ_x et Γ_y sont alors tangentes l'une à l'autre au point $x = y = 0$. Dans ce cas, nous ne pourrons pas nous passer des hypothèses supplémentaires introduites dans le chapitre 4.

Théorème 4. *Dans les hypothèses* (H_0), (H_1) *et* (K_1') *il existe toujours une solution et une seule du problème* I (problème généralisé de E. G o u r s a t), *à savoir*

$$u(x, y) = \int_0^x \left\{ \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta \right\} d\xi + Ax + By + C + G(x) + H(y), \tag{6,1}$$

où (cf. hypothèse (K_1'), chapitre 4)

$$A = \chi_x'(0, 0), \qquad B = \chi_y'(0, 0), \qquad C = \chi(0, 0), \tag{6,2}$$

$$(6,3)\qquad G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sigma(\lambda^i(x)),\qquad H(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\tau(\mu^i(y)),$$

$$\lambda^0(x)=x,\qquad \lambda^i(x)=h(g(\lambda^{i-1}(x)))\quad pour\quad i=1,2,\ldots,$$

$$\mu^0(y)=y,\qquad \mu^i(y)=g(h(\mu^i(y)))\quad pour\quad i=1,2,\ldots,$$

$$\sigma(x)=\chi(x,g(x))-\chi(\lambda(x),g(x))+A(\lambda(x)-x)+\int_x^{\lambda(x)}\left\{\int_0^{g(x)}f(\xi,\eta)\,d\eta\right\}d\xi,$$

$$\tau(y)=\chi(h(y),y)-\chi(h(y),\mu(y))+B(\mu(y)-y)+\int_y^{\mu(y)}\left\{\int_0^{h(y)}f(\xi,\eta)\,d\xi\right\}d\eta.$$

La fonction $u(x,y)$ est de classe $C^{(1*)}$ dans D. Les séries (6,3) qui représentent les fonctions $G(x)$ et $H(y)$, ainsi que les séries obtenues en les dérivant terme à terme

$$(6,4)\qquad G'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\sigma(\lambda^i(x))$$

et

$$(6,5)\qquad H'(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dy}\tau(\mu^i(y))$$

sont uniformément convergentes dans les intervalles $0\leqslant x\leqslant a$ et $0\leqslant y\leqslant b$ respectivement.

Si l'on admet les hypothèses (H_0^*) et (H_1^*) au lieu de (H_0) et (H_1), tout cela subsiste, sauf la convergence uniforme de la série (6,5). Dans ce cas singulier, la série (6,5) converge presque uniformément dans l'intervalle $(0,b\rangle$, ouvert à gauche. Néanmoins, la dérivée de la fonction $H(y)$ qui s'exprime dans ce cas par la formule

$$(6,6)\qquad H'(y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dy}\tau(\mu^i(y)) & pour\quad 0<y\leqslant b\\ 0 & pour\quad y=0\end{cases}$$

est encore continue dans tout l'intervalle fermé $\langle 0,b\rangle$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit

$$(6,7)\qquad U(x,y)=\int_0^x\left\{\int_0^y f(\xi,\eta)\,d\eta\right\}d\xi,$$

(6,8). $$\Omega(x, y) = \chi(x, y) - U(x, y) - Ax - By - C,$$

(6,9) $$N = \max_D |\Omega'_x(x, y)|$$

et

$$\sigma(x) = \Omega(x, g(x)) - \Omega(\lambda(x), g(x)),$$

$$\tau(y) = \Omega(h(y), y) - \Omega(h(y), \mu(y)).$$

Alors la série

(6,10) $$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma(\lambda^i(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \{\Omega(\lambda^i(x), g(\lambda^i(x))) - \Omega(\lambda^{i+1}(x), g(\lambda^i(x)))\}$$

admet une majorante (cf. (6,9))

$$\sum_{i=0}^{\infty} N\{\lambda^i(x) - \lambda^{i+1}(x)\} = N[x - \lim_{i\to\infty} \lambda^i(x)] = Nx$$

uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, en vertu du lemme 3 (chapitre 2). On prouve d'une façon tout à fait analogue que la seconde série (6,3) est uniformément convergente dans $\langle 0, b\rangle$. D'après les lemmes 6—8 (chapitre 3), les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ constituent la solution unique du système d'équations fonctionnelles

$$G(x) + H(g(x)) = \Omega(x, g(x)),$$

$$G(h(y)) + H(y) = \Omega(h(y), y),$$

d'où, d'après (6,1), (6,7) et (6,8),

$$u(x, g(x)) = \chi(x, g(x)),$$

$$u(h(y), y) = \chi(h(y), y).$$

Il nous reste donc à prouver la convergence des séries (6,4) et (6,5). La première d'elles est la somme des trois suivantes:

(6,11) $$\sum_{i=0}^{\infty} \{\Omega'_x(\lambda^{i+1}(x), g(\lambda^{i+1}(x))) - \Omega'_x(\lambda^{i+1}(x), g(\lambda^i(x)))\} \frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x),$$

(6,12) $$\sum_{i=0}^{\infty} \{\Omega'_y(\lambda^i(x), g(\lambda^i(x))) - \Omega'_y(\lambda^{i+1}(x), g(\lambda^i(x)))\} \frac{d}{dx} g(\lambda^i(x))$$

et

(6,13) $$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Omega'_x(\lambda^i(x), g(\lambda^i(x))) \cdot \frac{d}{dx}\lambda^i(x) - \Omega'_x(\lambda^{i+1}(x), g(\lambda^{i+1}(x))) \cdot \frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x) \right\}.$$

En vertu de l'hypothèse (H_1), ou bien (H_1^*), nous pouvons admettre que, pour $0 < x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ et $i = 0, 1, 2, \ldots$, on a

$$|f(x,y)| \leqslant M, \qquad \left|\frac{d}{dx}\lambda^i(x)\right| \leqslant M \quad \text{et} \quad \left|\frac{d}{dy}g(x)\right| \leqslant M.$$

Il s'ensuit, d'après (4,1), que les séries (6,11) et (6,12) ont une majorante commune

$$\sum_{i=0}^{\infty} M^* \{\lambda^i(x) - \lambda^{i+1}(x)\} = M^* x, \quad \text{où} \quad M^* = (L+M)M^2,$$

qui converge uniformément dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. La série (6,13) peut s'écrire sous la forme

$$\Omega'_x(x, g(x)) - \lim_{i\to\infty} \left\{\Omega'_x(\lambda^i(x), g(\lambda^i(x))) \cdot \frac{d}{dx}\lambda^i(x)\right\} = \Omega'_x(x, g(x)).$$

La convergence uniforme résulte ici du fait que, d'après (6,8) et (6,2), on a

$$\lim_{x,y\to 0} \Omega'_x(x,y) = 0,$$

et du lemme 3 (chapitre 2). Nous avons ainsi démontré que la série (6,4), étant la somme des séries (6,11) - (6,13), est uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a\rangle$.

D'autre part, il est facile de vérifier que, pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, les fonctions $\sigma(\lambda^i(x))$ sont continues dans $\langle 0, a\rangle$, qu'elles s'annulent pour $x = 0$ et que leurs dérivées tendent vers zéro lorsque $x \to 0$. Il s'ensuit que ces dérivées existent et s'annulent au point $x = 0$. Donc, la série (6,4) est uniformément convergente dans tout l'intervalle fermé $\langle 0, a\rangle$ et ses termes sont continus.

La série (6,5) peut être mise, dans l'hypothèse (H_0), sous la forme d'une somme des deux séries

$$-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dy} \{\Omega(h(\mu^i(y)), \mu^{i+1}(y)) - \Omega(h(\mu^{i+1}(y)), \mu^{i+1}(y))\}$$

et

$$(6,14) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \left\{\frac{d}{dy}\Omega(h(\mu^i(y)), \mu^i(y)) - \frac{d}{dy}\Omega(h(\mu^{i+1}(y)), \mu^{i+1}(y))\right\}.$$

La première peut s'écrire

$$-\sum_{i=0}^{\infty} \left\{\frac{d}{dx}\sigma(\lambda^i(x))\right\}_{x=h(y)} \cdot h'(y) = -G'(h(y)) \cdot h'(y)$$

et elle est uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$, puisque la fonction $h'(y)$ est bornée. La série (6,14) est égale à

$$\frac{d}{dy}\Omega(h(y), y) - \lim_{j\to\infty}\left\{\left[\frac{d}{dz}\Omega(\lambda(z), g(z))\right]_{z=\lambda^j(h(y))}\cdot\frac{d}{dy}\lambda^j(h(y))\right\}$$

et elle converge uniformément dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$, puisque le module

$$\left|\frac{d}{dy}\lambda^i(h(y))\right| \leq M\cdot|h'(y)|$$

est borné et, d'après (6,2) et (6,8),

$$\lim_{y\to 0}\left\{\frac{d}{dy}\Omega(h(y), y)\right\} = 0\,.$$

Dans le cas singulier, c'est-à-dire dans les hypothèses (H_0^*) et (H_1^*), la fonction $h'(y)$ n'est plus nécessairement bornée — elle peut devenir infinie pour $y=0$ — c'est pourquoi nous sommes obligés d'utiliser une autre méthode de raisonnement.

Considérons les trois séries suivantes:

$$(6,15)\qquad S_1 = \sum_{i=0}^{\infty}\{\Omega_y'(h(\mu^{i+1}(y)), \mu^{i+1}(y)) - \Omega_y'(h(\mu^i(y)), \mu^{i+1}(y))\}\cdot\frac{d}{dy}\mu^{i+1}(y),$$

$$(6,16)\qquad S_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\{\Omega_x'(h(\mu^i(y)), \mu^i(y)) - \Omega_x'(h(\mu^i(y)), \mu^{i+1}(y))\}\cdot\frac{d}{dy}h(\mu^i(y))$$

et

$$(6,17)\qquad S_3 = \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\Omega_y'(h(\mu^i(y)), \mu^i(y))\frac{d}{dy}\mu^i(y) - \Omega_y'(h(\mu^{i+1}(y)), \mu^{i+1}(y))\frac{d}{dy}\mu^{i+1}(y)\right\}$$

dont la somme est égale à la série (6,5) lorsque ces séries sont convergentes.

Les fonctions $d\mu^i(y)/dy$ où $i=0, 1, \ldots$, étant bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $(0, b\rangle$, d'accord avec l'hypothèse (H_1^*) (cf. chapitre 4), nous pouvons admettre que

$$\left|\frac{d}{dy}\mu^i(y)\right| \leq M$$

Alors la série (6,15) a une majorante

$$(6,18)\qquad \sum_{i=0}^{\infty}(L+M)M\{h(\mu^i(y)) - h(\mu^{i+1}(y))\} = (L+M)Mh(y)$$

uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$.

Comme

$$\left|\frac{d}{dy}h(\mu^i(y))\right| = \left|\frac{d}{dy}\lambda^i(h(y))\right| = \left|\left[\frac{d}{dx}\lambda^i(x)\right]_{x=h(y)}\cdot h'(y)\right| \leqslant M\cdot|h'(y)|,$$

la série (6,16) est majorée par la série

$$(6{,}19)\qquad \sum_{i=0}^{\infty}(L+M)M|h'(y)|\{\mu^i(y)-\mu^{i+1}(y)\} = (L+M)M|h'(y)|y$$

presque uniformément convergente dans l'intervalle $(0, b\rangle$ ouvert à gauche. La troisième série (6,17) peut s'écrire

$$S_3 = \Omega_y'(h(y), y) - \lim_{i\to\infty}\left\{\Omega_y'(h(\mu^i(y)), \mu^i(y))\frac{d}{dy}\mu^i(y)\right\},$$

d'où

$$(6{,}20)\qquad S_3 = \Omega_y'(h(y), y)$$

dans l'intervalle $(0, b\rangle$, et la convergence est uniforme en vertu du lemme 3. Nous voyons que la série (6,5) est presque uniformément convergente dans l'intervalle $(0, b\rangle$, donc elle représente la dérivée $H'(y)$. Des formules (6,18) - (6,20) il vient que cette dérivée satisfait à l'inégalité

$$|H'(y)| \leqslant (L+M)M\{h(y)+|h'(y)|y\} + |\Omega_y'(h(y), y)|,$$

d'où

$$\lim H'(y) = 0.$$

Mais il s'ensuit que $H'(0)=0$ et la dérivée $H'(y)$, représentée dans ce cas par la formule (6,6), est continue dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$ tout entier.

Cas particulier (Problème singulier de Picard).

Supposons (fig. 5) que $g(x)\equiv 0$ pour $0\leqslant x\leqslant a$ et que la fonction $h(y)$ soit de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $0<y\leqslant b$ et qu'elle jouisse des propriétés suivantes:

$$0\leqslant h(y)\leqslant a \quad \text{pour} \quad 0\leqslant y\leqslant b,$$

$$\lim_{y\to 0} h(y) = h(0) = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}[y\,h'(y)] = 0 \ ^{*)}.$$

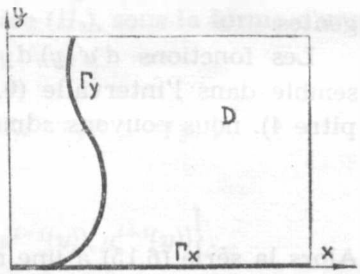

Fig. 5.

Supposons, de plus, que l'hypothèse (K_1) soit remplie.

*) Cette condition est évidemment vérifiée, par exemple, dans le cas où la fonction $h'(y)$ tend vers l'infini positif en croissant au sens large.

Alors, les hypothèses (H_0^*) et (H_1^*) étant vérifiées, nous obtenons, en vertu du théorème 4, une solution du problème I qui s'exprime par la formule (5,8). Dans ce cas, le sens de la condition (4,3) est bien clair, car on a

$$H'(y) = y \cdot h'(y)\left\{\chi''_{xy}(h(y), \Theta y) - \frac{1}{y}\int_0^y f(h(y), \eta)\, d\eta\right\} - \int_0^{h(y)} f(\xi, y)\, d\xi + \\ + \chi'_y(h(y), y) - B\,.$$

7. Encore un exemple

La rôle de l'hypothèse (H_1) dans la démonstration du théorème 4 (chapitre 6) est bien évidente, néanmoins la question reste encore ouverte si cette hypothèse est bien indispensable pour la validité de ce théorème. Or, nous allons donner encore un exemple qui nous permettra de mettre en évidence le sens géométrique de la condition (H_1) et de montrer qu'elle n'est pas superflue.

Exemple 3. Posons, dans le rectangle D défini par les inégalités $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$,

$$f(x, y) = 0$$

et

(7,1) $$u(x, y) = G(x) - G(y),$$

où

(7,2) $$G(x) = \begin{cases} x^5 \left|\sin \dfrac{\pi}{x}\right| & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1 \; {}^{*}), \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0, \end{cases}$$

et admettons que

(7,3) $$h(y) = y \quad \text{et} \quad \psi(y) = 0 \quad \text{dans} \quad \langle 0, 1 \rangle.$$

Les fonctions $g(x)$ et $\varphi(x)$ vont être déterminées plus tard.

Nous aurons, dans le rectangle D_n, défini par les inégalités

$$\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant y \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{où} \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$u(x, y) = (-1)^{n-1}\left(x^5 \sin\frac{\pi}{x} + y^5 \sin\frac{\pi}{y}\right),$$

$$u'_x(x, y) = (-1)^{n-1}\left(5\, x^4 \sin\frac{\pi}{x} - \pi\, x^3 \cos\frac{\pi}{x}\right),$$

*) On pourrait prendre, plus généralement, un exposant entier $p \geqslant 5$, d'ailleurs arbitraire.

$$u_y'(x,y) = (-1)^{n-1}\left(5\,y^4 \sin\frac{\pi}{y} - \pi\, y^3 \cos\frac{\pi}{y}\right),$$

(7,4) $$|u_x'(x,y)| < 9\,x^3 \quad \text{et} \quad |u_y'(x,y)| < 9\,y^3.$$

Ceci posé, désignons par $g(x)$ une fonction, facile à construire (nous laissons de côté les détails), de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ et jouissant des propriétés suivantes:

(7,5) $$g(0) = 0, \quad \frac{x}{2x+1} \leqslant g(x) \leqslant \frac{2x}{x+2},$$

(7,6) $$g'(0) = 1, \quad \frac{1}{(1+x)^3} \leqslant g'(x) \leqslant (1+x)^3$$

et

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \quad g'\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

On constate sans peine que la fonction

(7,7) $$\varphi(x) = u(x, g(x)), \quad \text{où} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

sera de classe $C^{(1)}$, bien que la fonction $u(x,y)$ n'ait pas de dérivées pour $x = 1/m$ et $y = 1/n$, m, $n = 1, 2, \ldots$ Cela tient à ce que la dérivée de la fonction superposée (7,7) s'annule aux points critiques $x = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ En outre on a, d'après (7,4), (7,6) et (7,7),

(7,8) $$|\varphi(x)| \leqslant 2\,x^5, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad |\varphi'(x)| < 81\,x^3$$

et, d'après (7,1) et (7,3),

$$u(h(y), y) = u(y, y) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Les fonctions $f(x,y)$, $g(x)$, $h(y)$, $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ satisfont ainsi aux conditions (H_0) et (K_0) et les fonctions $G(x)$ et $-G(y)$ représentent une solution du problème correspondant III. Cependant, elles ne sont pas de classe $C^{(1)}$ n'ayant pas de dérivées aux points $x = 1/m$ et $y = 1/n$, m, $n = 1, 2, \ldots$, et par conséquent, en vertu du théorème 2 (chapitre 3), il n'existe pas de solution du problème I correspondant aux fonctions $f(x,y)$, $g(x)$, $h(y)$, $\varphi(x)$ et $\psi(y)$. Nous allons encore montrer que la condition (K_1) du chapitre 4 subsiste pourtant dans le cas envisagé.

Soit, en effet, dans D

(7,9) $$\chi(x,y) = \begin{cases} (x-y)\dfrac{\varphi(x)}{x-g(x)} & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

On constate sans peine cf. (7,5), (7,6), (7,8) et (7,9) que

$$\chi(x, g(x)) = \varphi(x), \qquad \chi(h(y), y) \equiv 0 \equiv \psi(y),$$

$$|\chi(x, y)| \leqslant 6\,|x-y|\,x^3, \qquad \chi(0, y) = 0,$$

$$|\chi_x'(x, y)| \leqslant 6\,x^3 + 369\,|x-y|\,x, \qquad \chi_x(0, y) = 0,$$

$$|\chi_y'(x, y)| \leqslant 6\,x^3, \qquad \chi_y'(0, y) = 0,$$

$$|\chi_{xy}''(x, y)| \leqslant 369\,x, \qquad \chi_{xy}''(0, y) = 0,$$

et on voit ainsi que la fonction $\chi(x, y)$ est de classe $C^{(1^*)}$ dans D et qu'elle satisfait bien à la condition (K_1) du chapitre 4.

Quant à la condition (H_1) — chapitre 4 — elle n'est évidemment pas remplie. En effet, on a

$$\lambda(x) = g(x)$$

et

$$\frac{d}{dx}\,|\lambda^i(x)| = \prod_{j=0}^{i-1} \lambda'(\lambda^j(x)),$$

et pour $x = 1/n$ cette dérivée est égale au produit

$$\left|\prod_{j=0}^{i-1}\left(1 + \frac{1}{n+j}\right)\right|^3$$

qui augmente indéfiniment avec i.

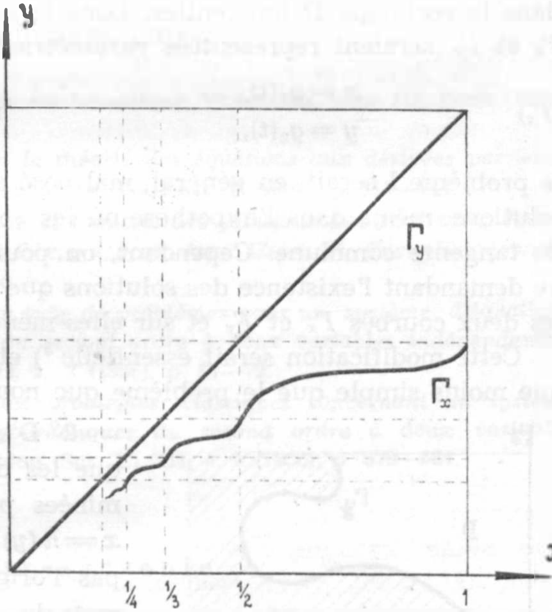

Fig. 6

Remarque 1. Dans le cas considéré, la dérivée $g'(x) = \lambda'(x)$ n'est monotone dans aucun voisinage du point $x = 0$ et la direction de la tangente à la courbe Γ_x oscille autour de la direction $y = x$ lorsque x tend vers zéro (fig. 6). Au contraire, il est manifeste que, si la fonction $\lambda(x)$ était monotone au sens large, on aurait $\lambda'(x) < 1$ dans ce voisinage, d'où la condition (H_2), plus forte que (H_1) — cf. chapitre 4.

Remarque 2. Dans l'exemple que nous venons de considérer on avait $\chi_{xy}''(x, y) = f(x, y) = 0$ pour $x = y = 0$. Ceci montre bien que la compatibilité des valeurs de ces fonctions au point d'intersection des courbes

Γ_x et Γ_y n'est pas essentielle et qu'elle ne facilite pas le problème de la recherche d'une solution.

Nous renonçons à une discussion détaillée des hypothèses (H_1^*) relatives au cas singulier.

8. Remarques finales

Le problème dont nous nous sommes occupés revient, en somme, à chercher une fonction de la forme $G(x)+H(y)$ coïncidant avec une fonction donnée le long de deux courbes Γ_x et Γ_y issues d'un point. Diverses modifications d'un tel problème peuvent s'imposer. Nous allons en signaler quelques unes.

1° Nous avons demandé que la solution de l'équation (0,1) fût définie dans le rectangle D tout entier. Dans le cas plus général où les courbes Γ_x et Γ_y seraient représentées paramétriquement

$$(\Gamma_x)\quad \begin{aligned} x&=g_1(t),\\ y&=g_2(t),\end{aligned} \qquad\qquad (\Gamma_y)\quad \begin{aligned} x&=h_1(t),\\ y&=h_2(t),\end{aligned}$$

le problème I serait, en général, mal posé et il pourrait ne pas exister de solutions, même dans l'hypothèse où les courbes Γ_x et Γ_y n'auraient pas de tangente commune. Cependant, on pourrait modifier le problème en ne demandant l'existence des solutions que dans la région D^* située entre les deux courbes Γ_x et Γ_y et sur elles-mêmes (fig. 7).

Cette modification serait essentielle *) et elle semble intéressante, bien que moins simple que le problème que nous venons de discuter.

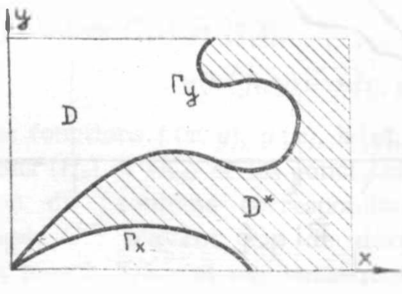

Fig. 7.

2° D'autre part, on pourrait supposer que les deux courbes Γ_x et Γ_y déterminées par les équations $y=g(x)$ et $x=h(y)$ ont comme point commun non pas l'origine, c'est-à-dire un des sommets du rectangle D, mais un point dans l'intérieur de celui-ci. Un exemple donné par Mlle Sophie Szmydt ,([4] p. 72) montre bien qu'un tel problème serait, en général, mal posé.

3° On peut aussi tenter de généraliser l'équation différentielle elle-même, ce qui change considérablement le caractère essentiel du problème. Une recherche dans cette direction a été entreprise récemment par l'un

*) Dans ce cas, l'intégrale générale ne s'exprime plus, en général, par la formule (0,2).

des auteurs de la présente note [3]; il y est question de l'équation non linéaire $u''_{xy}(x, y) = f(x, y, u(x, y), u'_x(x, y), u'_y(x, y))$. En utilisant la méthode bien connue du point fixe, due à J. Schauder, on y obtient certains résultats relatifs au problème de E. Goursat, même dans le cas où les courbes Γ_x et Γ_y ont une tangente commune.

4° Les difficultés qui se présentent dans l'étude du problème I suggèrent l'idée que les solutions généralisées (non nécessairement de classe $C^{(1*)}$) sont ici plus adéquates au caractère de l'équation différentielle et des conditions au limites. Une discussion des solutions qui pourraient encore être des fonctions généralisées ne saurait pourtant pas trouver place dans les cadres assignés au sujet classique de cette note.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Goursat E., *Cours d'analyse mathématique*, V^e édition, tome III, Paris (1942), p. 123—125.

[2] — *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 6 (1904), p. 117—144.

[3] Kisyński J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **11** (1957), sous presse.

[4] Szmydt Z., *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 2 (1956), p. 67—72.

[5] — *Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 9 (1956), p. 579—584.

Streszczenie

Zadania Cauchy'ego, Darboux i Picarda dla równania (0,1) rozwiązuje się bardzo łatwo dzięki znajomości całki ogólnej (0,2). Trudniejsze jest zadanie Goursata [1], [2], gdzie zadaje się z góry wartości rozwiązania na dwu łukach, rozłącznych z wyjątkiem wspólnego początku. Sam Goursat [2] podał szeregi przedstawiające rozwiązanie pod pewnymi dość mocnymi warunkami odnośnie kształtu i wzajemnego położenia łuków, wykluczając, między innymi, ich styczność, co jest założeniem bardzo istotnym. Już ten prosty typ zadania można jednak potraktować nieco ogólniej tak, że klasyczne problemy Darboux i Picarda stają się szczególnymi przypadkami.

W przypadku styczności łuków rozwiązalność gwarantują pewne dodatkowe założenia, dotyczące kształtu i położenia tych łuków (szczególnie delikatny jest podprzypadek, gdy wspólna styczna ma kierunek charakterystyczny), a ponadto i sposobu, w jaki zadaje się wartości rozwiązania na tych łukach. Żąda się mianowicie, aby to były wartości jakiejś funkcji klasy $C^{(1)}$, której pochodne spełniały by warunek Lipschitza. Trzy przykłady wyjaśniają znaczenie tych dodatkowych założeń.

Bez porównania prostszy jest problem jednoznaczności rozwiązań, którą już zapewniają założenia znacznie słabsze.

Резюме

Задачи Коши, Дарбу и Пикара для уравнения (0,1) решаются очень легко благодаря знанию общего интеграла (0,2); более трудна задача Гурса [1], [2], где задаются наперёд значения решения на двух дугах раздельных за исключением общего начала. Сам Гурса [2] дал ряды, представляющие решения при некоторых довольно сильных условиях относительно формы и взаимного положения дуг, исключая, между прочим, их взаимное соприкасание, что является очень существенным условием. Однако, уже этот простой тип задачи можно потрактовать несколько общее, так что классические задачи Дарбу и Пикара становятся частными случаями.

В случае соприкасания дуг разрешимость гарантирована некоторыми добавочными предположениями относительно формы и положения их (особенно тонок случай, когда общая касательная имеет одно из характеристических направлений); и сверх того предположениями относительно способа, каким задаются значения решений на этих дугах. Именно, требуется, чтобы это были значения некоторой функции класса $C^{(1)}$ с производными, исполняющими условие Липшица.

Три примера объясняют сущность этих добавочных условий.

Несравненно проще проблема единственности решений, которую гарантируют гораздо более слабые условия.