ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. X, 7 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ADAM BIELECKI

Remarque méthodologique sur le second théorème de la moyenne

Uwaga metodologiczna o drugim twierdzeniu o średniej

Методологическое замечание относительно второй теоремы о среднем

La formule classique du calcul intégral

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

où la fonction $g(x)$ est supposée bornée et monotone dans l'intervalle (a, b), s'obtient immédiatement, d'une manière bien connue, de la formule d'intégration par parties et du premier théorème de la moyenne, si l'on admet que les fonctions envisagées sont continues et, de plus, la seconde d'elles, $g(x)$ a une dérivée continue. Cette méthode se généralise en utilisant des moyens plus fins de la théorie des fonctions de variables réelles (cf. [3] ou bien [4]). Dans la théorie de l'intégrale de Riemann on utilise d'habitude un procédé consistant à subdiviser l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et on s'appuie sur le lemme d'Abel pour les sommes finies (voir p. ex. [1] ou [2]). Nous allons indiquer une autre alternative qui semble assez maniable et n'exige que des moyens bien simples.

Admettons qu'une fonction $f(x)$ soit bornée et intégrable (R) *) et qu'une fonction $g(x)$ soit monotone et bornée dans l'intervalle ouvert (a, b). Nous pouvons admettre que ces fonctions sont nulles en dehors de cet intervalle et que M et N désignent deux constantes telles que $|f(x)| \leqslant M$ et $|g(x)| \leqslant N$ partout. Enfin, nous allons poser

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{2}$$

*) C'est-à-dire d'après la définition de l'intégrale donnée par Riemann.

Nous aurons

$$J_n = n\int_a^b \left\{F(x) - F\left(x-\frac{1}{n}\right)\right\} g(x)\,dx =$$

$$= n\int_a^{b-1/n} F(x)\left\{g(x) - g\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\}dx + n\int_{b-1/n}^{b} F(x)\,g(x)\,dx,$$

d'où, en vertu du premier théorème de la moyenne, pour n suffisamment grand

$$J_n = F(\xi_n)\,n\int_a^{b-1/n}\left\{g(x) - g\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\}dx + F(\eta_n)\,n\int_{b-1/n}^{b} g(x)\,dx,$$

où $a < \xi_n < b - 1/n < \eta_n < b$ et la fonction $g(x)$ conserve son signe dans l'intervalle ouvert $(b-1/n, b)$. La dernière égalité peut s'écrire (cf. 2)

$$J_n = \int_a^{\xi_n} f(x)\,dx\cdot n\int_a^{a+1/n} g(x)\,dx + \int_{\xi_n}^{\eta_n} f(x)\,dx\cdot n\int_{b-1/n}^{b} g(x)\,dx. \tag{3}$$

La suite $\{\xi_n\}$ étant bornée, nous pouvons en extraire une suite partielle $\{\xi_{m(i)}\}$, $i=1,2,\ldots$, convergente vers une limite $\xi\in\langle a,b\rangle$ et de (3) il s'ensuit que

$$\lim_{i\to\infty} J_{m(i)} = g(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b-0)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx, \tag{4}$$

où $g(a+0) = \lim\limits_{a<x\to a} g(x)$ et $g(b-0) = \lim\limits_{b>x\to b} g(x)$.

D'autre part, d'après (2) on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - J_n\right| = n\left|\int_a^b\left\{\int_0^{1/n}[f(x) - f(x-\tau)]\,d\tau\right\}g(x)\,dx\right| =$$

$$= n\left|\int_0^{1/n}\left\{\int_a^b [f(x) - f(x-\tau)]\,g(x)\,dx\right\}d\tau\right| =$$

$$= n\left|\int_0^{1/n}\left\{\int_a^{b-\tau} f(x)[g(x) - g(x+\tau)]\,dx + \int_{b-\tau}^{b} f(x)\,g(x)\,dx\right\}d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant Mn\int_0^{1/n}\left\{\left|\int_a^{b-\tau}[g(x) - g(x+\tau)]\,dx\right| + N\tau\right\}d\tau =$$

$$= Mn\int_0^{1/n}\left\{\left|\int_a^{a+\tau} g(x)\,dx - \int_{b-\tau}^{b} g(x)\,dx\right| + N\tau\right\}d\tau \leqslant Mn\int_0^{1/n} 3N\tau\,d\tau = \frac{3MN}{2n}$$

et, par conséquent,

(5) $$\lim_{n\to\infty} J_n = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Les égalités (4) et (5) entraînent (1).

La formule de Bonnet

(6) $$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a+0)\cdot \int_a^{\xi} f(x)\, dx$$

se rapportant au cas où la fonction $g(x)$ est positive et non croissante ou bien négative et non décroissante dans l'intervalle (a, b), s'obtient encore plus facilement. On a dans ce cas

$$J_n = n\int_a^b F(x)\left\{g(x) - g\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\} dx =$$

$$= F(\xi_n)\cdot n \int_a^b \left\{g(x) - g\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\} dx = \int_a^{\xi_n} f(x)\, dx \cdot n \int_a^{a+1/n} g(x)\, dx\,,$$

d'où

$$\lim_{i\to\infty} J_{m(i)} = g(a+0)\cdot \int_0^{\xi} f(x)\, dx\,,$$

et

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - J_n\right| = n\left|\int_0^{1/n}\left\{\int_a^b f(x)\, |g(x) - g(x+\tau)|\, dx\right\} d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant Mn\int_0^{1/n}\left|\int_a^b |g(x) - g(x+\tau)|\, dx\right| d\tau = Mn\int_0^{1/n}\left|\int_a^{a+\tau} g(x)\, dx\right| d\tau \leqslant \frac{MN}{2n}\,.$$

Le raisonnement est encore valable dans le cas plus général où la fonction $f(x)$ est supposée intégrable (L) **). Si elle n'était pas bornée il suffirait, pour obtenir la formule (1), d'exécuter un passage facile à la limite. En effet, on pose dans ce cas

$$f_\mu(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leqslant \mu\,, \\ 0\,, & \text{si } f(x) = 0\,, \end{cases}$$

**) C'est-à-dire d'après la définition due à Lebesgue.

pour $\mu = 1, 2, \ldots$. Alors, en appliquant la formule de la moyenne (1) aux fonctions $f_\mu(x)$, on a

$$\int_a^b f_\mu(x)\, g(x)\, dx = g(a+0) \int_a^{\xi_\mu} f_\mu(x)\, dx + g(b-0) \int_{\xi_\mu}^b f_\mu(x)\, dx$$

et on parvient à (1) si l'on admet p. ex. que $\xi = \limsup_{\mu \to \infty} \xi_\mu$.

La méthode que nous venons d'exposer permet ainsi de démontrer le second théorème de la moyenne (1) dans l'hypothèse que la fonction $f(x)$ soit intégrable (R) ou (L) et que la fonction $g(x)$ soit monotone et bornée dans l'intervalle (a, b). Si la fonction $g(x)$ est positive et non croissante ou bien négative et non décroissante on obtient pareillement la formule (6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carathéodory C., *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig u. Berlin 1918, p. 612—616.

[2] Goursat E., *Cours d'Analyse Mathématique*, vol. I.

[3] Riesz F. et Sz.-Nagy B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952, p. 119.

[4] Saks S., *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwów, 1937, p. 104.

Streszczenie

Stosując pewne przekształcenia całkowe można elementarnie na drodze rachunkowej otrzymać drugie twierdzenie o średniej dla całek Riemanna lub Lebesgue'a przy założeniu całkowalności funkcji $f(x)$, oraz monotoniczności i ograniczoności funkcji $g(x)$. Nie stosuje się zwykłej metody podziału przedziału całkowania i nie korzysta się z lematu Abela dla sum.

Резюме

Применяя некоторую интегральную трансформацию можно элементарно вычислительным путём получить вторую теорему о среднем для интегралов Риманна или Лебега при предположении интегрируемости функци $f(x)$, а при том монотонности и ограниченности функции $g(x)$. Не применяется обычного метода деления промежутка интегрирования и не пользуемся леммою Абеля для сумм.