ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 6 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur les polynomes dont tous les zéros sont réels

O wielomianach których wszystkie miejsca zerowe są rzeczywiste

О полиномах, которых все нули действительные

§ 1. S. Paszkowski a obtenu [3] des résultats très intéressants sur les polynomes dont tous les zéros sont réels. Son résultat principal peut s'énoncer de la manière suivante:

„Soit h un nombre compris entre 0 et 1. Si a et b ($a < b$) sont deux zéros consécutifs d'un polynome de n degré dont tous les zéros sont réels et α, β sont des points de l'intervalle (a, b) tels que

$$|f(\alpha)| = |f(\beta)| = Mh,$$

où M désigne le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b), alors

$$E(n, h) \leqslant \frac{\beta - \alpha}{b - a} \leqslant \sqrt{1 - h},$$

où $E(n, h)$ est la mesure de l'ensemble des points de l'intervalle $0 < x < 1$ où $x^{n-1}(1-x) \geqslant h(n-1)^{n-1} \cdot n^{-n}$.

La limitation supérieure est atteinte dans le cas du polynome du second degré, la limitation inférieure l'est dans le cas du polynome de degré n dont tous les zéros sont confondus aux points a et b, le zéro a étant simple et b étant $(n-1)$-uple (ou inversement)".

Dans ce travail, je me propose d'exposer (§§ 3—7) une démonstration de ce résultat qui est considérablement plus courte que celle de S. Paszkowski*) et, en outre, d'établir quelques propositions nouvelles (théorèmes I et II; cf. aussi remarques finales du § 8). La méthode employée s'apparente à celle que j'ai utilisée dans un travail antérieur [1].

*) Les considérations de Paszkowski ont d'ailleurs une valeur intrinsèque indépendante du théorème qui en résulte.

§ 2. Théorème I. *Supposons que a et b sont des zéros consécutifs d'un polynome $f(x)$ dont tous les zéros sont réels. Soit ξ l'abscisse de l'extremum (unique) de $f(x)$ contenu dans (a, b). Soit h un nombre compris entre 0 et 1 et M le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b). Si l'on a* $b-\xi \geqslant \xi - a$ et $|f(\beta)| = hM$, $\xi < \beta < b$, alors

$$\frac{\beta-\xi}{b-\xi} \leqslant \sqrt{1-h}, \tag{1}$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où $f(x)$ est du second degré. Lorsque $b-\xi < \xi - a$, cette proposition n'est pas toujours exacte.

Remarque. D'une manière analogue on aura évidemment

$$\frac{\xi-\alpha}{\xi-a} \leqslant \sqrt{1-h} \quad \text{si} \quad |f(\alpha)| = Mh, \quad a < \alpha < \xi \quad \text{et} \quad \xi - a > b - \xi.$$

Démonstration. Nous profiterons du fait que si $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$ a tous ses zéros réels, la dérivée logarithmique $f'(x)/f(x)$ est décroissante. dans tout intervalle compris entre deux zéros consécutifs, ce qui résulte immédiatement de la formule

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2},$$

où a_i sont les zéros de $f(x)$.

Nous pouvons supposer dans la démostration que $f(x)$ est positif dans l'intervalle (a, b) et que l'on a $\xi = 0$, donc $a < 0$ et $b > 0$, $b > |a|$. Considérons la parabole $y = q(x)$, de sommet au point $(0, M)$, qui coupe l'axe $0x$ aux points $x = -b$ et $x = +b$. Pour établir le théorème, il suffit de démontrer que dans l'intervalle ouvert $(0, b)$ on a $q(x) > f(x)$. En effet, dans le cas de la parabole, on a le signe d'égalité dans la relation (1) de l'énoncé I. Posons

$$\varphi(x) = \frac{f(x)(x+b)}{q(x)(x-a)}.$$

Les zéros du polynome $\varphi(x)$ sont ceux de $f(x)$, sauf $x = a$ et $x = b$. Evidemment, $\varphi(x)$ est positif dans l'intervalle $(0, b)$. En différentiant la relation

$$(x+b)f(x) = q(x)\varphi(x)(x-a)$$

on trouve

$$(x+b)f'(x) + f(x) = q'(x)\varphi(x)(x-a) + q(x)\varphi'(x)(x-a) + q(x)\varphi(x),$$

d'où, en posant $x=0$ et en tenant compte des égalités $f(0)=q(0)$, $f'(0)=q'(0)=0$, enfin en divisant par $f(0)$ on a:

$$1=-a\varphi'(0)+\varphi(0).$$

Or,

$$\varphi(0)=-b/a, \qquad \text{donc} \qquad \varphi'(0)=\frac{b+a}{-a^2}<0\,.$$

Etudions maintenant le quotient

$$\frac{f(x)}{q(x)}=\frac{(x-a)\,\varphi(x)}{x+b}$$

dont la dérivée s'annule évidemment pour $x=0$, en vertu des relations $q'(0)=f'(0)=0$. Le numérateur $N(x)$ de la dérivée de ce quotient a pour expression:

$$N(x)=\varphi(x)\left[(x-a)(x+b)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+b+a\right], \tag{2}$$

donc l'expression entre crochets s'annule pour $x=0$; lorsque x croît à partir de 0 jusqu'à b cette expression décroît, car l'expression positive $(x-a)(x+b)$ croît et $\varphi'(x)/\varphi(x)$, négatif d'après ce qui précède pour $x=0$, décroît constamment. Il s'ensuit que l'expression entre crochets reste négative dans tout l'intervalle $(0, b)$. Donc $f(x)/q(x)$ décroît dans cet intervalle et, par suite, on y a $f(x)<q(x)$, ce qui achève la démonstration.

Il reste à établir que lorsque $b<|a|$ l'inégalité (1) n'est pas toujours valable. $N(x)$ étant l'expression écrite plus haut (formule (2)), on trouve aisément que

$$N'(0)=-ab\varphi''(0)+2b\varphi'(0). \tag{3}$$

Si $b<|a|$, on a $-ab>0$ et $\varphi'(0)=(b+a)/-a^2>0$, $\varphi(0)=-b/a>0$. Si les zéros de $\varphi(x)$ sont $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$, on a, d'autre part

$$\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}=2\sum_{\substack{s=1,\ldots,n-2\\ s\neq k}}\frac{1}{a_s a_k}$$

et cette expression peut être positive, ce qui a lieu, par exemple, lorsque b est le plus grand zéro de $f(x)$ (cf. le théorème II). D'après (3) on aura donc $N'(0)>0$ et par suite $f(x)>q(x)$ pour les petites valeurs positives de x. L'inégalité (1) n'est donc pas toujours valable.

§ 3. Nous établirons maintenant le

Théorème II. *Supposons que a soit le plus petit zéro de $f(x)$, qu'il soit simple* *) *et que a et b soient des zéros consécutifs. Si $M = \mathrm{Max}\,|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b), $0 < h < 1$ et $f(\alpha) = f(\beta) = hM$ $(a < \alpha < \beta < b)$, alors on a $\alpha + \beta \leqslant a + b$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où $f(x)$ est du second degré. En particulier, si $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$ on a $c \leqslant (a+b)/2$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque $f(x)$ est du 2 degré.*

Remarque. En remplaçant x par $-x$, on obtient évidemment des résultats analogues relatifs au cas où b est le plus grand zéro de $f(x)$: on a alors $\alpha + \beta \geqslant a + b$ et $c \geqslant (a+b)/2$.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $a < b \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_{n-3} \leqslant c$ tous les zéros de $f(x)$. Nous supposerons que $a < 0$, $b > 0$ et que $f(0) > 0$, $f'(0) = 0$, tandis que ξ_i désignera le zéro de $f'(x)$ situé dans l'intervalle $c_{i-1}\, c_i$ (en particulier $b \leqslant \xi_1 \leqslant c_1$, $c_{n-3} \leqslant \xi_{n-2} \leqslant c$). On peut aussi supposer que l'on a,

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{c}\right)(x-a)(b-x)\,p(x),$$

$$f'(x) = -kx \prod_{i=1}^{n-2} (\xi_i - x).$$

On a évidemment $k > 0$ et $p(x) > 0$ dans l'intervalle (a, b). Supposant que $f(\alpha) = f(\beta) = m$, nous faisons varier c et maintenons m fixé, α et β varient; on aura, d'autre part, pour x fixe

$$df = \frac{x}{c^2}(x-a)(b-x)\,p(x)\cdot dc. \tag{4}$$

D'autre part, des considérations géométriques montrent que l'on a:

$$d(\beta + \alpha) = -\frac{df(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{df(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

(dans les expressions $df(\alpha)$ et $df(\beta)$ on considère α et β comme fixés). On a donc, d'après (4),

$$d(\beta + \alpha) = \frac{dc}{kc^2}\left[\frac{(\beta - a)(b - \beta)\,p(\beta)}{\prod_{i=1}^{n-2}(\xi_i - \beta)} + \frac{(\alpha - a)(b - \alpha)\,p(\alpha)}{\prod_{i=1}^{n-2}(\xi_i - \alpha)}\right]. \tag{5}$$

*) L'exemple $f(x) = (x-a)^m\,(x-b)$ montre que si a n'est pas simple, le théorème II n'est plus exact.

L'expression entre parenthèses est évidemment positive, donc si c croît, il en est de même de $(\alpha+\beta)$. La valeur primitive de $\alpha+\beta$ est donc moindre que celle qui correspond au cas où $c=\infty$. On remplacera ensuite $(1-x/c)\,(x-a)\,(b-x)\,p(x)$ par $(1-x/c_{n-3})\,(x-a)\,(b-x)\,p_1(x)$ et on poursuivra le même raisonnement que tout à l'heure. Finalement on aboutira à un polynome du second degré, et dans ce cas on a l'égalité $\alpha+\beta=a+b$.

§ 4. Nous allons maintenant établir les inégalités de Paszkowski. Nous ferons tout d'abord la remarque suivante:

Si l'on considère l'ensemble des polynomes dont tous les zéros sont réels et dont le degré ne dépasse pas n, il existe parmi ces polynomes des polynomes extrémaux pour lesquels les bornes inférieure et supérieure du rapport $(\beta-\alpha)/(b-a)$ (cf. l'énoncé du § 1) *sont atteintes.*

En effet, nous pouvons toujours considérer une suite de polynomes $f(x)$ de l'ensemble considéré, pour laquelle le rapport considéré tend vers l'une des bornes en question. On peut supposer que les polynomes de cette suite on deux zéros, soit a et b, fixés, tandis que les autres zéros, variables, se trouvent toujours en dehors de l'intervalle $a<x<b$ et que, par exemple, la somme des carrés des coefficients du polynome est égale à 1. De la suite considérée on peut évidemment extraire une suite partielle qui tendra uniformément dans tout intervalle fini vers une limite qui sera un polynome de l'ensemble considéré et pour lequel la borne inférieure resp. supérieure du rapport $(\beta-\alpha)/(b-a)$ sera atteinte.

Nous allons étudier les propriétés d'un polynome extrémal.

Nous verrons, en premier lieu, *qu'il est impossible que deux zéros du polynome extrémal, soit c_1 et c_2, soient situés en dehors de l'intervalle* $a\leqslant x\leqslant b$.

Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi. En admettant toujours que $a<0<b$ et que $f(x)$ atteint son maximum dans (a,b) au point $x=0$, on pourra écrire

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{c_1}\right)\left(1-\frac{x}{c_2}\right)p(x), \tag{6}$$

où $p(x)$ est positive dans $(a<x<b)$. Nous allons faire varier simultanément c_1 et c_2 de manière que la somme $1/c_1+1/c_2$ reste constante, les signes de dc_1 et de dc_2 seront donc toujours différents. D'après (6) on aura, en tenant compte de la relation $c_1^{-2}\,dc_1+c_2^{-2}\,dc_2=0$,

$$d\,f(x)=\frac{c_1-c_2}{c_1\,c_2^3}\,x^2\,p(x)\,d\,c_2\,. \tag{7}$$

En choisissant convenablement le signe de dc_2 on pourra faire en sorte que le second membre de (7) soit constamment positif ou constamment négatif dans les intervalles $a < x < 0$ et $0 < x < b$. Il en résulte que si $m = f(\alpha) = f(\beta)$ est fixe, $\beta - \alpha$ augmentera dans le premier cas et diminuera dans le second.

Cependant le rapport

$$\frac{f(\alpha)}{M} = \frac{f(\beta)}{M} = \frac{m}{M} = h$$

(M désigne le maximum de $f(x)$ dans (a, b)) peut aussi changer et, pour qu'il reprenne sa valeur, il faut modifier m de manière que le rapport m/M reste constant, ce qui conduit à la formule

$$dm = \left(\frac{m}{M}\right) dM, \tag{8}$$

dans laquelle dM désigne l'accroissement de M qui résulte de la formule (7). Il en résulte une nouvelle variation de $(\beta - \alpha)$; cependant cette variation supplémentaire est — comme on le voit géométriquement — du même ordre infinitésimal que dm, donc d'après les formules (8) et (7) d'ordre infinitésimal supérieur à celui de dc_2 et, par suite, supérieur à l'augmentation ou la diminution de $\beta - \alpha$ que nous avons considérée en premier lieu *). Ainsi, en choisissant convenablement le signe de dc_2, suffisamment petite en valeur absolue, nous pourrions augmenter ou diminuer $(\beta - \alpha)$ en contradiction avec la définition du polynome extrémal.

Maintenant, nous étudierons séparément les cas des bornes supérieure et inférieure.

Borne supérieure du rapport $(\beta - \alpha)/(b - a)$.

§ 5. Il résulte de ce qui précède que le polynome extrémal qui correspond à la borne supérieure en question possède au plus un zéro c différent de a et b. De plus, on voit aisément que si, par exemple, $c > b$ *le zéro a doit être nécessairement simple*. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait reprendre les raisonnements du § 4 en y posant $c_1 = a$, $c_2 = c$; si $dc > 0$, la formule (7) montre que $df(x)$ serait non négative, d'où on

*) Il est clair que le maximum M de $f(x)$ est atteint après la variation de c_1 et de c_2 au point ξ satisfaisant à l'inégalité $|\xi| < \varepsilon$, où ε est arbitrairement petit, pourvu que $|dc_i|$ soient assez petites. La formule (7) montre alors que dM sera très petite par rapport à dc_2.

obtiendrait, comme tout à l'heure, la conclusion que $d(\beta-\alpha)>0$. Il en résulte que l'on pourra écrire

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{c}\right)^{r}(x-a)(b-x)^{q},$$

où r et q sont des nombres naturels et $c>0$. Si ξ est le zéro de $f'(x)$ situé dans l'intervalle (b, c), on aura

$$f'(x)=-\frac{n}{c}x\left(1-\frac{x}{c}\right)^{r-1}(b-x)^{q-1}(\xi-x),$$

où n est le degré de l'équation. On trouve, en procédant comme au § 3, les formules suivantes, analogues à (4) et (5):

$$df(x)=\frac{x}{c^2}\left(1-\frac{x}{c}\right)^{r-1}(x-a)(b-x)^{q}\,dc, \tag{9}$$

$$d(\beta-\alpha)=\frac{dc}{nc}\left|\frac{(\beta-a)(b-\beta)}{\xi-\beta}-\frac{(\alpha-a)(b-\alpha)}{\xi-\alpha}\right|. \tag{10}$$

Or, d'après le théorème II, on a $\alpha+\beta<a+b$, donc $(a+b)(\beta-\alpha)>\beta^2-\alpha^2$, c'est-à-dire $(\beta-a)(b-\beta)>(\alpha-a)(b-\alpha)$; d'autre part, on a évidemment $\xi-\beta<\xi-\alpha$, donc l'expression entre crochets est positive et $d(\beta-\alpha)>0$ si $dc>0$. Si M est le maximum de $f(x)$ dans (a, b), on a aussi $dM>0$; on voit cependant, comme au § 4, que ceci ne change pas le résultat $d(\beta-\alpha)>0$. Ainsi donc, *tous les zéros du polynome extrémal se confondent aux points a et b*. Or les zéros a et b doivent être simples. En effet, si les zéros a et b étaient tous les deux multiples, on pourrait reprendre les raisonnements du § 4 en posant $c_1=a$, $c_2=b$ (ces deux zéros étant considérés comme simples) et si a, par exemple, était simple et b multiple, on pourrait reprendre les raisonnements de ce paragraphe en posant $c=b$ (le zéro b étant considéré comme simple). Par conséquent, le polynome extrémal est du second degré, d'où l'on déduit immédiatement la limite $\sqrt{1-h}$ de l'énoncé de Paszkowski.

Borne inférieure du rapport $(\beta-\alpha)/(b-a)$.

§ 6. D'après le § 4, le polynome extrémal possède, cette fois aussi, au plus un zéro c différent de a et b, on peut donc poser

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{c}\right)^{r}(x-a)^{p}(b-x)^{q},$$

où l'on a, par exemple, $a < b < c$. On en déduit, en posant

$$f'(x) = \frac{-nx}{c}\left(1-\frac{x}{c}\right)^{r-1}(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}(\xi-x), \qquad b<\xi<c,$$

et

$$h(x,\xi) = \frac{(x-a)(b-x)}{\xi-x}. \qquad [h(x,\xi)>0 \quad \text{dans} \quad (a,b)]$$

les formules suivantes, analogues à (9) et (10):

$$(11) \qquad df(x) = \frac{rx}{c^2}\left(1-\frac{x}{c}\right)^{r-1}(x-a)^p(b-x)^q\,dc,$$

$$(12) \qquad d(\beta-a) = \frac{r\,dc}{nc}\,[h(\beta,\xi)-h(a,\xi)].$$

Si $h(\beta,\xi)-h(a,\xi)\neq 0$, on aboutit immédiatement à une contradiction, car en choisissant convenablement le signe de dc, on aura $d(\beta-a)<0$, tandis que M (le maximum de $f(x)$ dans $a<x<b$) ne peut qu'augmenter *). Supposons donc que $h(\beta,\xi)-h(a,\xi)=0$ et, en considérant c comme variable indépendante, calculons la différentielle de $h(\beta,\xi)-$ $-h(a,\xi)$. On trouve que cette différentielle est égale à

$$(13) \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(\beta,\xi)(d\beta-da)+\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\beta,\xi)-\frac{\partial h}{\partial x}(a,\xi)\right]da+$$
$$+\left[\frac{\partial h}{\partial \xi}(\beta,\xi)-\frac{\partial h}{\partial \xi}(a,\xi)\right]d\xi.$$

Or, $d\beta-da=0$ d'après l'hypothèse que nous avons faite; on constate d'autre part aisément que $h(x,\xi)$, considérée comme fonction de x, possède un seul extrémum dans l'intervalle (a,b). Il en résulte, en tenant compte de l'égalité $h(\beta,\xi)=h(a,\xi)$, que $\partial h/\partial x(\beta,\xi)<0$ et $\partial h/\partial x(a,\xi)>0$. La même égalité prouve que $\partial h/\partial\xi(\beta,\xi)-\partial h/\partial\xi(a,\xi)<0$, car on a

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = \frac{-h}{\xi-x}$$

et $\xi-\beta<\xi-a$. Supposons, par exemple, que $dc>0$; d'après la formule (12) on a $da>0$; enfin, on aura $d\xi>0$, car

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{r}{\xi-c}+\frac{p}{\xi-a}+\frac{q}{\xi-b}=0,$$

*) En effet, la différence entre M et $f(x)$ est, pour les petites valeurs de x, de l'ordre de x^2, tandis que $df(x)$ est d'après (11) du même ordre que $x.dc$, donc si x est suffisamment petit et le signe de dc convenablement choisi, $f(x)$ dépassera M.

donc aussi

$$-\left|\frac{r}{(\xi-c)^2}+\frac{p}{(\xi-a)^2}+\frac{q}{(\xi-b)^2}\right|d\xi+\frac{r}{(\xi-c)^2}dc=0\,.$$

Ainsi, la différentielle (13) de $h(\beta,\xi)-h(a,\xi)$ est de signe contraire à celui de dc; il en résulte, en tenant compte de la formule (12), que si l'on modifie c convenablement la différence $(\beta-a)$ va diminuer, en contradiction avec la définition du polynome extrémal. Ainsi *tous les zéros du polynome extrémal sont concentrés aux points a et b.*

§ 7. On peut évidemment supposer que $a=0$ et $b=2$, le polynome extrémal pourra donc s'écrire

$$f(x)=x^p(2-x)^q, \qquad p+q=n,$$

où l'on peut admettre, sans nuire à la généralité, que $p\geqslant q$. En posant $p-q=kn$, $(0\leqslant k\leqslant 1)$, on pourra écrire

$$f(x)=x^{\frac{(k+1)n}{2}}\cdot(2-x)^{\frac{(1-k)n}{2}}.$$

En supposant que $f(w)=f(z)=hM$, $(0<w<z<2)$, où M est le maximum de $f(x)$ dans l'intervalle $(0,2)$ et h est fixé, nous allons généraliser le problème en supposant que k est une variable continue qui varie dans tout intervalle $0<k<1$. On va voir que $(z-w)$ *est une fonction décroissante de k; il en résulte que le minimum de $(z-w)$ est atteint lorsque $k=(n-2)/n$, c'est-à-dire $p=n-1$, $q=1$;* ceci conduit immédiatement à la limitation de S. Paszkowski citée au § 1.

On trouve sans peine que le maximum M de $f(x)$ est atteint pour $x=k+1$ et que

$$M=(1+k)^{\frac{(1+k)n}{2}}(1-k)^{\frac{(1-k)n}{2}}$$

z et w vérifient donc l'équation

$$x^{k+1}(2-x)^{1-k}=h^{\frac{2}{n}}(1+k)^{1+k}\cdot(1-k)^{1-k}. \tag{14}$$

En considérant les logarithmes des deux membres de (14) et en différentiant on trouve sans peine que

$$\frac{d(z-w)}{dk}=g(z,k)-g(w,k), \tag{15}$$

où

$$g(x,k)=\frac{x(2-x)}{2}\cdot\frac{\log\dfrac{x}{2-x}-\log\dfrac{1+k}{1-k}}{x-(k+1)}. \tag{15'}$$

Puisque $f(x)$ atteint son maximum au point $x=1+k$, on a toujours $z>1+k$ et $w<1+k$. *Supposons, en premier lieu, que* $w\geqslant 1$. En remarquant que le second facteur dans l'expression de $g(x,k)$ est le rapport des accroissements finis et que le premier facteur de cette expression est l'inverse de la dérivée de $\log x/(2-x)$ on constate que $g(z,k)<1$ et $g(w,k)>1$, donc que $d(z-w)/dk<0$. *Nous allons maintenant supposer, dans tout ce qui suit, que* $w<1$. Remarquons d'abord que *l'on a* $z+w>2$. Cette inégalité est évidente pour h suffisamment voisin de 1; si elle cessait d'être vraie pour des valeurs moindres de h, on aurait, pour une valeur convenable de h, $z+w=2$. Or, d'après (14) on a $z^{k+1}(2-z)^{1-k}=$ $=w^{k+1}(2-w)^{1-k}$, donc aussi $z^{k+1}(2-z)^{1-k}=(2-z)^{k+1}z^{1-k}$, c'est-à-dire $z^{2k}=(2-z)^{2k}$ et $z=1$, ce qui n'est pas possible, car $z>1+k$.

1° Je vais établir l'inégalité

$$(*)\qquad \frac{d(z-w)}{dk}<0$$

d'abord pour les petites valeurs de k. Pour $k=0$ on a

$$g(x,0)=\frac{x(2-x)}{x-1}\log\frac{x}{2-x},$$

expression évidemment positive pour $0<x<2$ et symétrique par rapport à la droite $x=1$. Pour établir l'inégalité $(*)$ dans le cas où $k=0$ il suffit donc, en vertu de (15) et de l'inégalité $z+w>2$, de montrer que $g(x)=$ $=g(x,0)$ est décroissante dans l'intervalle $1<x<2$. Or, on trouve en posant $x=1+t$ $(0<t<1)$ que

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{2}{(1-t^2)\log\dfrac{1+t}{1-t}}-\frac{1+t^2}{t(1-t^2)},$$

tandis qu'en intégrant l'inégalité évidente $1/(1-t^2)>(1-t^2)/(1+t^2)^2$ on trouve que $\log(1+t)/(1-t)>2t/(1-t^2)$; il en résulte que $g'(x)<0$.

2° Pour montrer que l'inégalité $d(z-w)/dk<0$ subsiste lorsque k croît, il suffit d'établir l'inégalité $d^2(z-w)/dk^2<0$. Or, il résulte de (15) que l'on a

$$\frac{d^2(z-w)}{dk^2}=[g_z(z,k)\,g(z,k)+g_k(z,k)]-[g_w(w,k)\,g(w,k)+g_k(w,k)]$$

ou, en tenant compte de l'expression (15′) de $g(x,k)$,

$$\frac{d^2(z-w)}{dk^2}=\varphi(z)-\varphi(w),\tag{21}$$

où l'on a posé

$$(16)\qquad \varphi(x)=\frac{x(2-x)\left[\log\dfrac{x}{x-2}-\log\dfrac{1+k}{1-k}\right]}{2[x-(1+k)]^2}+$$
$$+\frac{x(2-x)[-x^2+2(1+k)x-2(1+k)]\left[\log\dfrac{x}{x-2}-\log\dfrac{1+k}{1-k}\right]^2}{2[x-(1+k)]^3}-$$
$$-\frac{x(2-x)}{(1-k^2)[x-(1+k)]}.$$

On voit sans peine que le trinome $-x^2+2(1+k)x-2(1+k)$ est négatif pour tout valeur réelle de x; puisque $1+k<z<2$, il en résulte que lorsque $x=z$, le premier des trois termes de l'expression (16) de $\varphi(x)$ est positif, tandis que les deux autres sont négatifs. Au contraire, puisque $w<1+k$, lorsque $x=w$ le premier terme de $\varphi(x)$ est négatif et les deux autres sont positifs. Pour montrer que $\varphi(z)-\varphi(w)<0$ il suffira donc de prouver que pour toute valeur x des intervalles $0<x<1$ et $1+k<x<2$, le premier terme de l'expression (16) est égal ou plus petit en valeur absolue que le deuxième, c'est-à-dire que l'on a

$$(17)\qquad |x^2-2(1+k)x+2(1+k)|\cdot\left|\frac{\log\dfrac{x}{2-x}-\log\dfrac{1+k}{1-k}}{x-(1+k)}\right|\geqslant 1$$

dans ces intervalles. Or, on trouve sans peine que l'on a $x^2-2(1+k)x+$ $+2(1+k)\geqslant 1-k^2$ pour toute valeur de x, l'égalité n'ayant lieu que pour $x=1+k$. D'autre part, le deuxième facteur de (17) représente le rapport des accroissements de la fonction $\log x/(2-x)$, dont la dérivée $2/x(2-x)$ est supérieure ou égale à $2/(1-k^2)$ dans l'intervalle $1+k<x<2$, donc le premier membre de (17) est supérieur ou égal à 2 dans cet intervalle. Dans l'intervalle $0<x<1$ on a $x^2-2(1+k)x+2(1+k)>1$ et $2/x(2-x)>2$, donc l'inégalité (17) est encore vérifiée et ceci achève la démonstration.

§ 8. Compléments et remarques.

1. P. Erdös et T. Grünwald ont montré ([2], théorème III) que si a et b sont deux zéros consécutifs d'un polynome $f(x)$ dont tous les zéros sont réels et M est le maximum de $f(x)$ dans (a, b), l'aire comprise entre la courbe $y=f(x)$ et les droites $y=0$, $x=a$ et $x=b$ est inférieure ou égale à $2/3\,[(b-a)M]$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où $f(x)$ est du second degré (dans ce dernier cas on aboutit à la formule de

quadrature d' Archimède). Ce théorème résulte immédiatement de l'inégalité

$$\frac{\beta-a}{b-a}\leq\sqrt{1-h}$$

de S. Paszkowski. En effet, d'après cette inégalité l'aire en question est inférieure ou égale à

$$(b-a)\int_0^M\sqrt{1-\frac{y}{M}}\,dy=\frac{2}{3}(b-a)M.$$

On déduit de la même manière de mon théorème du § 2 la proposition suivante:

Si a et b sont des zéros consécutifs d'un polynome dont tous les zéros sont réels et c est le point de l'intervalle (a, b) où $f(x)$ atteint son maximum M dans cet intervalle et si $b-c\geqslant c-a$, l'aire limitée par l'axe Ox, les droites $x=c$ et $x=b$ et la courbe $y=f(x)$ est plus petite ou égale à $2/3\,[(b-c)M]$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où $f(x)$ est du second degré.

2. Supposons que, a et b $(a<b)$ étant des zéros consécutifs de $f(x)$, ce polynome possède $(p-1)$ zéros plus grands ou égaux à b et $(q-1)$ zéros plus petits ou égaux à a, $(p+q=n)$. Il résulte des considérations du § 6 que h étant fixé, le minimum du rapport $(\beta-a)/(b-a)$, où $f(\alpha)=f(\beta)=hM$, $M=max|f(x)|$ dans $a<x<b$, est atteint lorsque q zéros de $f(x)$ se confondent au point a et p zéros se confondent au point b *).

3. La limitation supérieure du rapport $(\beta-a)/(b-a)$ qui vient d'être obtenue ne dépend pas du degré du polynome $f(x)$ et ne peut être améliorée en fixant ce degré, par contre la limitation inférieure de ce rapport dépend essentiellement du degré n, car elle s'évanouit lorsque $n\to\infty$.

On peut se demander dans quelle mesure les résultats obtenus peuvent s'étendre aux polynomes ayant des zéros complexes. Le théorème de Weierstrass sur l'approximation d'une fonction continue par les polynomes montre que, dans le cas général, toutes les limitations obtenues doivent dépendre essentiellement du degré du polynome.

4. Le problème considéré dans cet article s'étend d'une façon naturelle aux fonctions de plusieurs variables de la manière suivante:

Considérons le polynome

$$f(x_1,\ldots,x_k)=\prod_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ik}x_k+b_i).$$

*) Je dois cette remarque à M. Adam Bielecki.

La surface $f(x_1, ..., x_k) = 0$ partage l'espace en domaines polyédriques convexes et il est aisé de voir qu'un tel domaine D borné contient un extrémum de $f(x_1, ..., x_k)$ et un seul *); soit M la valeur de $|f(x_1, ..., x_k)|$ en ce point. Si h est un nombre fixé, $0 < h < 1$, les points de D où $|f(x_1, ..., x_k)| \geqslant hM$ constituent un domaine d. Les volumes de D et d étant respectivement V et v, il s'agit de chercher des limitations supérieure et inférieure du rapport v/V qui ne dépendent que de h et de n, ou même de h seulement. Il résulte de ce qui précède que la limitation supérieure est probablement atteinte lorsque $n = k+1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki M., *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires*. Bull. Intern. Acad. Pol. Sc. Lettres, série A, 1927, p. 542—685.

[2] Erdös P. and Grünwald, T. *On polynomials with only real roots*, Annals of Mathem. 40 (1939) p. 537—548.

[3] Paszkowski S., *Sur les polynomes dont tous les zéros sont réels* (en polonais). Ann. Polon. Math. 5.

Streszczenie

Podaję nowy, stosunkowo krótki dowód twierdzenia S. Paszkowskiego: „Niech $0 < h < 1$. Jeśli a i b $(a < b)$ są kolejnymi miejscami zerowymi wielomianu stopnia n, którego wszystkie miejsca zerowe są rzeczywiste, α i β $(\alpha < \beta)$ takimi punktami przedziału (a, b), że

$$|f(\alpha)| = |f(\beta)| = Mh,$$

gdzie M oznacza maximum $|f(x)|$ w (a, b), to jest

$$E(n, h) \leqslant \frac{\beta - \alpha}{b - a} \leqslant \sqrt{1 - h},$$

gdzie $E(n, h)$ jest miarą zbioru punktów przedziału $0 < x < 1$, gdzie $x^{n-1}(1-x) \geqslant h(n-1)^{n-1}n^{-n}$. Granica górna jest osiągnięta gdy $n = 2$, granica dolna w przypadku gdy wszystkie miejsca zerowe wielomianu są skoncentrowane w a i b, przy czym a np. jest miejscem zerowym pojedyńczym, a b $(n-1)$-krotnym".

*) S'il y avait deux extréma dans D, soit A et B, $f(x_1, ..., x_k)$ se réduirait, le long de la droite AB, à un polynome d'une seule variable dont tous les zéros seraient réels et qui aurait deux extréma entre deux zéros consécutifs.

Ponadto udawadniam twierdzenia następujące:

I. Niech a i b będą kolejnymi miejscami zerowymi wielomianu $f(x)$, którego wszystkie miejsca zerowe są rzeczywiste, a ξ odciętą jedynego extremum $f(x)$ zawartego w (a, b). Niech dalej M oznacza maximum $|f(x)|$ w (a, b), a h dowolną liczbę przedziału $0 < h < 1$. Jeśli $b - \xi \geqslant \xi - a$ i $|f(\beta)| = hM$, $\xi < \beta < b$, to

$$\frac{\beta - \xi}{b - \xi} \leqslant \sqrt{1-h},$$

przy czym znak równości zachodzi jedynie w przypadku gdy $f(x)$ jest drugiego stopnia. Jeśli $b - \xi < \xi - a$, to twierdzenie to nie jest zawsze prawdziwe.

II. Jeśli a jest najmniejszym, a przy tym pojedyńczym miejscem zerowym $f(x)$, a i b miejscami zerowymi kolejnymi tegoż wielomianu, $M = max\ |f(x)|$ w (a, b), $0 < h < 1$ i $f(\alpha) = f(\beta) = hM$, $(a < \alpha < \beta < b)$, to jest $\alpha + \beta \leqslant a + b$, przy czym znak równości zachodzi tylko wówczas, gdy $f(x)$ jest drugiego stopnia. W szczególności, jeśli $f'(c) = 0$, $(a < c < b)$ to jest $c \leqslant (a+b)/2$ ze znakiem $=$ tylko gdy $f(x)$ jest drugiego stopnia.

Резюме

Я даю новое, сравнительно короткое доказательство теоремы С. Пашковского: „Пусть $0 < h < 1$. Если a и b $(a < b)$ последовательные нули полинома степени n, которого все нули действительны, α и β $(\alpha < \beta)$ такие точки отрезка (a, b), что

$$|f(\alpha)| = |f(\beta)| = Mh,$$

где M обозначает максимум $|f(x)|$ на отрезке (a, b) то

$$E(n, h) \leqslant \frac{\beta - \alpha}{b - a} \leqslant \sqrt{1-h},$$

где $E(n, h)$ обозначает меру множества точек интервала $0 < x < 1$, для которых $x^{n-1}(1-x) \geqslant h\,(n-1)^{n-1} n^{-n}$.

Верхний предел достигается когда $n=2$; нижний предел —, когда все нули полинома сконцентрированы в a и b, причём например, может быть a нуль однократный, а b $(n\text{-}1)$-кратный".

Сверх того я доказываю следующие теоремы:

I. Пусть a и b последовательные нули полинома $f(x)$, которого все нули действительные, а ξ абсцисса единственного екстремума $f(x)$, заключающегося в (a, b). Пусть M обозначает максимум $|f(x)|$ в (a, b), а h произвольное число интервала $0 < h < 1$. Если $b - \xi \geqslant \xi - a$ и $|f(\beta)| = hM$, $\xi < \beta < b$, то

$$\frac{\beta - \xi}{b - \xi} \leqslant \sqrt{1 - h},$$

причём знак равенства имеет место только в случае, когда $f(x)$ второй степени. Если $b - \xi < \xi - a$, то эта теорема не всегда справедлива.

II. Если a самый меньший, а притом однократный нуль $f(x)$, a и b последовательные нули этого же полинома, $M = max\,|f(x)|$ в (a, b), $0 < h < 1$ и $f(\alpha) = f(\beta) = hM$, $(a < \alpha < \beta < b)$, то $\alpha + \beta \leqslant a + b$, причём знак равенства имеет место только тогда, когда $f(x)$ второй степени. В частности, если $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$, то $c \leqslant (a + b)/2$ со знаком равенства исключительно для $f(x)$ второй степени.