ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 5 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki I. Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur une fonctionnelle définie sur les ovales

O pewnym funkcjonale określonym na owalach

Об одном функционале, определенном на выпуклых фигурах

1. M. Biernacki a énoncé l'hypothèse suivante:

Si $P(\varphi)$ désigne l'aire du rectangle circonscrit à l'ovale plan R, dont un côté fait avec une direction fixe l_0 l'angle φ, et si S désigne l'aire de l'ovale R, alors on a l'inégalité

$$\frac{S}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\,d\varphi} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Pour établir cette inégalité nous prouverons d'abord que

$$\int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\,d\varphi = 4\int\limits_0^{2\pi} h(\varphi)\,h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi$$

où $h(\varphi)$ désigne la fonction d'appui, c'est-à-dire si M est un point intérieur de R, alors $h(\varphi)$ est la distance du point M à la droite d'appui de R perpendiculaire à la direction qui fait avec la direction l_0 l'angle φ.

Observons que $P(\varphi) = d(\varphi)\,d(\varphi+\pi/2)$, où $d(\varphi)$ désigne la largeur de l'ovale R dans la direction φ. (Les notions bien connues de droite d'appui, de fonction d'appui et de largeur sont définies dans [1] respectivement pp. 4, 24, 51). De là on obtient

$$\int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d(\varphi)\,d\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} [h(\varphi)+h(\varphi+\pi)]\left[h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$+h\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)\Bigg]\,d\varphi=\int_0^{2\pi}h(\varphi)h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi+\int_0^{2\pi}h\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)h(\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\int_0^{2\pi}h(\varphi+\pi)\,h\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)d\varphi+\int_0^{2\pi}h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)h(\varphi+\pi)\,d\varphi=4\int_0^{2\pi}h(\varphi)h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi.$$

Maintenant soit M le centre du plus grand cercle inscrit dans R et r son rayon. Dans ce cas on a l'inégalité

$$[r-h(\varphi)]\left[r-h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$h(\varphi)\,h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\geqslant r\,h(\varphi)+r\,h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-r^2$$

d'où

$$\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi\geqslant r\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,d\varphi+r\int_0^{2\pi}h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi-2\pi r^2=2rL-2\pi r^2$$

où

$$L=\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,d\varphi$$

est périmètre de R. De là

$$\frac{S}{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\varphi)\,d\varphi}=\frac{2\pi S}{4\displaystyle\int_0^{2\pi}h(\varphi)h\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi}\leqslant\frac{\pi S}{4(rL-\pi r^2)}.$$

En tenant compte de l'inégalité bien connue [2] p. 61 établie par Bonnesen:

$$S\leqslant rL-\pi r^2$$

on peut donner à notre inégalité la forme

$$\frac{S}{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\varphi)\,d\varphi}\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

2. De l'inégalité démontrée ci-dessus on déduit aisément une inégalité établie par Bieberbach [1] p. 76 pour les ovales plans, à savoir

$$\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{S}{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}d(\varphi)d\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi}\geqslant\frac{2\pi S}{\displaystyle\int_0^{2\pi}D^2\,d\varphi}=\frac{S}{D^2}$$

où D désigne le diamètre de l'ovale.

3. L'inégalité démontrée dans 1. entraîne aussi immédiatement une inégalité due à Hayashi [1] p. 81, en effet

$$\frac{\pi}{4} \geqslant \frac{S}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d(\varphi)\, d\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) d\varphi} \geqslant \frac{2\pi S}{D\int\limits_0^{2\pi} d(\varphi)\, d\varphi} = \frac{2\pi S}{2DL}$$

donc

$$DL \geqslant 4S.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bonnesen T. und Fenchel W. *Theorie der konvexen Körper*, Chelsea. Publ. Co., New York 1948.

[2] Bonnesen T. *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gautier-Villars, Paris 1929.

Streszczenie

W pracy tej dowodzi się, że

$$\frac{S}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

gdzie $P(\varphi)$ oznacza pole prostokąta opisanego na owalu R, którego bok tworzy z ustalonym kierunkiem kąt φ, a S oznacza pole owalu R.

Резюме

В этой работе доказано, что

$$\frac{S}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

где $P(\varphi)$ обозначает площадь прямоугольника, описанного на выпуклой фигуре R, которого сторона образует с зафиксированным направлением угол φ, а S обозначает площадь выпуклой фигуры R.