ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 1 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Une généralisation des équations de Maggi et d'Appell

Uogólnienie równań Maggiego i Appella

Обобщение уравнений Мадджи и Аппелла

1. Introduction. La plupart des auteures ne considèrent que des systèmes mécaniques dont les liaisons dépendent uniquement des positions et du temps (systèmes *holonomes*) ou des positions, des vitesses et du temps (systèmes *non holonomes*). Jusqu'à présent quelques auteurs à peine ont considéré des systèmes dont les liaisons dépendent des positions, des vitesses, des accélérations et du temps (systèmes *non holonomes du deuxième ordre*), voir par exemple Przeborski [4] ou [5], p. 253 ff. et 315 ff. et Stäckel [6] (ce dernier ne les considére que d'une manière implicite).

Ce travail est consacré à la généralisation des équations de Lagrange, de Maggi et d'Appell aux systèmes dont les liaisons dépendent des dérivées des fonctions qui déterminent les positions d'un système par rapport au temps d'un ordre qui ne surpasse pas s (s est quelconque, mais fixe). Si, pour un système donné, le nombre s est le plus petit possible, nous dirons que la système est non holonome d'ordre s [1]). (pour $s = 0$ nous aurons des systèmes holonomes, pour $s = 1$ des systèmes non holonomes).

Bien qu'il soit aisé de donner des réalisations physiques pour de tels systèmes, (elles sont — il est vrai — pour la plupart assez artificielles, voir par exemple Tatarkiewicz [7]) ces systèmes n'ont pas d'importance pratique. Mais il nous semble que, tout de même, l'étude de tels systèmes n'est pas tout-à-fait dépourvue d'importance. De même que

[1]) Appell, [2], p. 5 nomme *„ordre d'un système non holonome"* une autre notion.

l'étude des systèmes non holonomes du 1[er] ordre met en évidence les particularités des systèmes holonomes, celle des systèmes non holonomes d'ordre s jette une nouvelle lumière sur les particularités des systèmes pour lesquels, $s=0$ ou $s=1$. Nous pouvons constater ainsi quelles sont les propriétés qui n'appartiennent qu'aux systèmes holonomes ($s=0$) ou non holonomes ($s=1$) et lesquelles de ces propriétés sont générales. Par exemple, nous verrons que les équations d'Appell ont un caractère beaucoup plus profond que les équations de Maggi (qui sont le résultat d'une élimination presque banale). Enfin, si les liaisons d'ordre $s \geqslant 2$ ne sont pas compatibles en général avec les fondements de la mécanique classique — comme le croient quelques auteurs — l'étude de tels systèmes pourra fournir l'unique moyen d'obtenir des exemples montrant cette contradiction.

C'est pourquoi nous nous bornerons aux systèmes de n points. Nous ferons aussi des suppositions très fortes sur la différentiabilité des fonctions considérées car il nous semble superflu d'entrer dans divers détails de nature non mécanique. Nous n'étudierons pas le nombre des constantes qui déterminent univoquement le mouvement de notre système. De même nous supposerons que la structure topologique des liaisons est la plus simple possible, et enfin nous nous bornerons à une classe particulière de liaisons dites *liaisons qui ne travaillent pas* (pour $s=0$, c'est-à-dire pour des liaisons holonomes, ce sont des liaisons sans frottement).

La méthode employée dans ce travail sera une méthode d'éliminations successives des multiplicateurs généralisés de Lagrange. Cette méthode montre ici sa portée extraordinaire.

Avant de procéder à l'exposition de nos résultats, nous introduisons un symbole nouveau $D^r f$ — ressemblant un peu à une différentielle totale d'ordre r. Il permettra de simplifier nos notations.

2. Une notation nouvelle. Soit une fonction g de $k+1$ variables $t, q_{01}, \dots, q_{0k}$ (vu les applications ultérieures nous employons des indices doubles).

$$g = g(t, q_{01}, \dots, q_{0k}).$$

Posons

$$D^0(t, q_{01}, \dots, q_{0k})\, g \underset{df}{=} g(t, q_{01}, \dots, q_{0k})$$

(2,1)
$$D^1(t, q_{01}, \dots, q_{0k};\ q_{01}^1, \dots, q_{0k}^1)\, g \underset{df}{=} \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial q_{0\nu}}\, q_{0\nu}^1$$

et par induction (il faut remplacer dans (2,1) le nombre k par $k(r+1)$)

$$(2,2)\qquad D^{r+1}(t, q_{01}, \ldots, q_{0k}; q_{01}^1, \ldots, q_{0k}^1, \ldots, q_{01}^r, \ldots, q_{0k}^r, q_{01}^{r+1}, \ldots, q_{0k}^{r+1})\, g \underset{df}{=}$$
$$= D^1(t, q_{01}, \ldots, q_{0k}, q_{01}^1, \ldots, q_{0k}^1, \ldots, q_{01}^r, \ldots, q_{0k}^r; q_{01}^1, \ldots, q_{0k}^1, q_{01}^{r+1}, \ldots, q_{0k}^{r+1})\, g^r$$

où

$$g^r = D^r(t, q_{01}, \ldots, q_{0k}; q_{01}^1, \ldots, q_{0k}^1, \ldots, q_{01}^r, \ldots, q_{0k}^r)\, g.$$

$D^r(t, q_{01}, \ldots, q_{0k}; q_{01}^1, \ldots, q_{0k}^r)\, g$ est une fonction de $k(r+1)+1$ variables.

Dans la suite, pour simplifier les notations nous allons supposer que 1° $q_{00} = t$, $q_{00}^1 = 1$ (ou bien que $\dot{q}_{00} = 1$) et $q_{00}^r = 0$ pour $r = 2, 3, \ldots$ — alors il n'y aura par lieu à dégager la variable t des variables $q_{00}, \ldots, q_{0k}$. 2° nous mettrons une lettre q_0^w pour un groupe entier des variables $q_{00}^w, q_{01}^w, \ldots, q_{0k}^w$ et q_0 pour $t, q_{01}, \ldots, q_{0k}$. Par exemple

$$g = g(q_0) = D^0(q_0)\, g$$

$$D^1(q_0; q_0^1)\, g = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\partial g}{\partial q_{0\nu}} q_{0\nu}^1$$

$$(2,3)\qquad D^2(q_0; q_0^1, q_0^2)\, g = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\mu=0}^{k} \frac{\partial^2 g}{\partial q_{0\nu}\, \partial q_{0\mu}} q_{0\nu}^1 q_{0\mu}^1 + \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\partial g}{\partial q_{0\nu}} q_{0\nu}^2 .$$

Parfois nous allons même écrire $D^r g$.

Nous avons

$$(2,4)\qquad \frac{\partial^r}{\partial q_{0\nu}^r} D^r g = \frac{\partial g}{\partial q_{0\nu}} .$$

Le symbole $D^r g$ peut bien servir au calcul des dérivées totales des fonctions, par exemple

$$(2,5)\qquad \frac{d}{dt}\left[g(t, q_{01}, \ldots, q_{0k}) \Big|_{q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)} \right] = D^1 g \Big|_{q_{0\nu} = q_{0\nu}(t),\ q_{0\nu}^1 = \dot{q}_{0\nu}(t)}$$

et plus généralement

$$(2,6)\qquad \frac{d^r}{dt^r}\left[g \Big|_{q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)} \right] = D^r g \Big|_{q_{0\nu} = q_{0\nu}(t),\ q_{0\nu}^1 = \dot{q}_{0\nu}(t), \ldots, q_{0\nu}^r = q_{0\nu}^{(r)}(t)},$$

où

$$q_{0\nu}^{(w)}(t) = \frac{d^w}{dt^w} q_{0\nu}(t)$$

et le symbole

$$h \Big|_{q_{0\nu} = q_{0\nu}(t), \ldots} \qquad \text{ou bien} \qquad h \Big|$$

signifie qu'on a opéré une substitution.

I. LE SYSTÈME CONSIDÉRÉ

3. Les liaisons. Supposons que $P_1, \ldots, P_n$ forme un système de n points ayant des coordonnées $P_r = (x_{3r-2},\ x_{3r-1},\ x_{3r})$ et portant des masses $\tilde{m}_r$. Posons

$$\tilde{m}_r = m_{3r-2} = m_{3r-1} = m_{3r}.$$

Soient des fonctions

$$f_{\nu\mu} = f_{\nu\mu}(t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0, x_1^1, \ldots, x_{3n}^1, \ldots, x_1^\mu, \ldots, x_{3n}^\mu)$$

de $3n\mu+1$ variables, déterminées dans des ensembles $A_{\nu\mu}$. Nous allons supposer qu'elles ont au moins $s+1$ dérivées continues et que

$$\sum_{j=1}^{3n} \left| \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_j^\mu} \right| > 0$$

pour toutes ces fonctions.

Supposons que notre système de points soit assujetti aux liaisons

$$f_{\nu\mu}(t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0, x_1^1, \ldots, x_{3n}^1, \ldots, x_1^\mu, \ldots, x_{3n}^\mu) = 0 \tag{3,1}$$

où

$$\nu = 1, 2, \ldots, k(\mu-1) - k(\mu) \underset{df}{=} k_\mu$$

(3,2)

$$\mu = 0, 1, \ldots, s$$

et

$$3\,n \underset{df}{=} k(-1) \geqslant k(0) \geqslant k(1) \geqslant \ldots \geqslant k(s-1) \geqslant k(s) \geqslant 0. \tag{3,3}$$

C'est-à-dire que nous allons considérer que des systèmes de nombres $t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0, x_1^1, \ldots, x_{3n}^1, \ldots, x_1^\mu, \ldots, x_{3n}^\mu$ qui vérifient (3,1).

Soit $x_i = x_i(t)$ et posons

$$x_i^{(r)} = \frac{d^r}{dt^r} x_i(t).$$

Nous dirons que le mouvement $x_i = x_i(t)$ est conforme aux liaisons (3,1) si nous aurons pour chaque t

$$f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_{3n}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}, \ldots, x_1^{(\mu)}, \ldots, x_{3n}^{(\mu)}) = 0. \tag{3,4}$$

Nous n'allons pas supposer que pour chaque $\mu = 0, 1, \ldots, s$ l'ensemble des conditions

$$f_{\nu\mu} = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k_\mu$$

(qui est d'ordre μ) ne se laisse pas remplacer par un ensemble de conditions d'ordre inférieur à μ. Une telle supposition serait superflue pour le but que nous poursuivons.

De même nous n'allons pas supposer que s est l'ordre de notre système, c'est-à-dire nous admettons que (3,1) pourrait être équivalent à un système ne dépendant que de $t, x_r, \ldots, x_r^{(w)}$ où $w < s$.

Enfin, pour éviter des difficultés d'ordre topologique, nous allons supposer que les conditions

$$f_{\nu 0}(t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 3n - k(0) = k_0 \tag{3,5}$$

déterminent un ensemble de l'espace à $3n+1$ dimensions, homéomorphe à une sphère de dimension $k(0)+1$, (si $3n = k(-1) = k(0)$ cet ensemble est tout l'espace), que

$$f_{\nu 1}(t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0, x_1^1, \ldots, x_{3n}^1) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k(1) - k(0) = k_1 \tag{3,6}$$

ensemble avec (3,5) détermine un ensemble de l'espace à $6n+1$ dimensions (il sera en même temps un sous-ensemble du produit cartésien de l'ensemble déterminé par (3,5) et de l'espace à $3n$ dimension) homéomorphe à une sphère de dimension $k(0)+k(1)+1$ et que pour chaque $r = 2, 3, \ldots, s$ l'ensemble des conditions (3,1) pour $\mu = 0, 1, \ldots, r$ forme un ensemble de l'espace à $3n(r+1)+1$ dimensions homéomorphe à une sphère de dimension $k(0)+k(1)+\ldots+k(r)+1$.

Nous voyons que les conditions (3,5) constituent des liaisons holonomes de notre système, les liaisons (3,6) sont des liaisons non holonomes (ou pseudo-non holonomes si elles peuvent être intégrées) et (3,1) pour $\mu = 2, \ldots, s$ représentent des liaisons non holonomes d'ordre supérieur.

4. Les équations du mouvement. De l'axiome de la réaction des liaisons (voir par exemple Przeborski [4] ou [5], p. 259) il résulte que les liaisons (3,1) produisent des forces nommées réactions. Supposons que la réaction qui agit sur P_r ait les coordinnées $[R_{3r-2}, R_{3r-1}, R_{3r}]$. Enfin supposons qu'une force $[F_{3r-2}, F_{3r-1}, F_{3r}]$ est appliquée sur ce point. Alors les équations du mouvements seront

$$m_i x_i^2 = F_i + R_i \qquad i = 1, \ldots, 3n \tag{4,1}$$

où le nombre 2 est un indexe (et ne signifie pas la carré de x_i!).

Définition. *Nous dirons que les liaisons ne travaillent pas dans un mouvement $x_i = x_i(t)$ s'il existe des fonctions du temps*

$$\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$$

telles que

$$R_i \Big|_{x_j^\sigma = x_j^{(\sigma)}(t)} = \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu}(t) \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^\mu} \Bigg|_{x_j^\sigma = x_j^{(\sigma)}(t)} \tag{4,2}$$

Si pour un w nous avons $k(w) = k(w-1)$, c'est-à-dire si $k_w = 0$ alors l'ensemble des conditions

$$f_{\nu w} = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 0$$

est vide et il faut écarter de (4,2) les termes correspondants. Cette remarque s'applique à toutes les formules que nous allons écrire dans la suite.

Remarquons que dans la formule (4,2) (comme dans tout ce travail) nous faisons une différence entre les variables x_j^σ et les dérivées $x_j^{(\sigma)} = x_j^{(\sigma)}(t)$.

De (4,1) et de (4,2) nous obtenons les équations de L a g r a n g e *de premier genre généralisées* (pour des liaisons qui ne travaillent pas):

$$(4,3) \qquad m_i x_i^2 = F_i + \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=0}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^\mu} \qquad i = 1, 2, \ldots, 3n.$$

Avec les conditions (3,1) elles déterminent le mouvement de notre système (pour $s \leqslant 2$ et $f_{\nu 2}$ linéaires par rapport à x_r^2 voir par exemple P r z e b o r s k i [4] ou [5], p. 269). Ces équations de mouvement (4,3) et (3,1) sont à comprendre comme il suit: nous cherchons des fonctions $x_r = x_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots, 3n$ et des fonctions $\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, s$ et telles qu'après la substitution

$$x_r^\mu = x_r^{(\mu)}(t), \qquad \lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$$

les équations (4,3) et (3,1) soient verifiées identiquement.

5. Une remarque sur le principe du travail virtuel. L'axiome des réactions des liaisons et la forme analytique (3,1) des liaisons ne déterminent pas univoquement les réactions. Il faut faire des suppositions supplémentaires — par exemple — supposer que les liaisons ne travaillent pas, admettent le frottement, ou comportent un asservissement etc. Nous nous bornons alors à une *classe de réalisations des liaisons*.

En fait, si nous supposons que les liasons ne travaillent pas, nous admettons la condition (4,2) qui est une hypothèse sur *direction des réactions*. Il est intéressant et d'une grande importance qu'avec cette hypothèse (4,1) et (4,3) déterminent univoquement les réactions (et non seulement leurs directions).

On peut se borner à cette classe de réalisations des liaisons d'une autre manière. Nous déterminons alors les directions des réactions d'une façon implicite à l'aide des déplacements virtuels généralisés qui leur sont orthogonaux.

En effet appelons les nombres $\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}$ déplacements virtuels généralisés s'ils vérifient les conditions

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{\mu}} \delta x_i = 0$$

pour ν, μ vérifiant (3,2).

Nous dirons que les liaisons ne travaillent pas si dans notre mouvement

$$\sum_{i=1}^{3n} [F_i - m_i \ddot{x}_i^{2}] \delta x_i = 0$$

pour chaque déplacement virtuel généralisé.

Cette définition (*Principe de d'Alembert généralisé*) est équivalent à la définition de la page 9, donc elle conduit évidemment aux mêmes équations (4,3).

Si les liaisons ne dépendent pas du temps et ne travaillent pas, alors le travail des forces des réactions est nul (donc si les forces appliquées F_i sont potentielles, alors pour notre système le principe de la conservation de l'énergie mécanique est vérifié).

6. Les liaisons paramétriques. Nous allons remplacer les liaisons (3,1) par des liaisons données paramétriquement.

En introduisant des paramètres $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}$ on peut avec nos hypothèses topologiques faire de sorte que les égalités

$$f_{\nu 0}(t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k_0 \tag{6,1}$$

soient équivalentes au système paramétrique

$$x_\nu^0 = \varphi_{\nu 0}(t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 3n \tag{6,2}$$

où $q_{0\nu}$ sont des paramètres holonomes (coordonnées de L a g r a n g e), c'est-à-dire que

$$f_{\nu 0}(t, x_1^0, \ldots, x_{3n}^0)\Big|_{x_\nu^0 = \varphi_{\nu 0}(t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)})} = 0\,. \tag{6,3}$$

L'ensemble des variables $q_{00}, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}$ où $q_{00} = t$ sera désigné par une seule lettre q_0.

Remarquons que si $k(0) = 3n$, c'est-à-dire si $k_0 = 0$, alors les conditions (6,1) sont vides et les conditions (6,2) pourront être mises sous la forme simple:

$$x_\nu^0 = q_{0\nu}\,.$$

Posons pour $r \geqslant 0$

(6,4) $$x_\nu^r = \varphi_{\nu 0}^{r0}(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^r) \underset{df}{=} D^r(q_0;\ q_0^1, \ldots, q_0^r)\, \varphi_{\nu 0}$$

où q_0^w désigne un groupe de nouvelles variables quelconques $q_{00}^w, q_{01}^w, \ldots, q_{0,k(0)}^w$ où $q_{00}^1 \equiv 1$ et $q_{00}^w \equiv 0$ pour $w > 1$.

Evidemment si $x_\nu^0 = x_\nu(t)$ est mouvement conforme aux liaisons (6,1), alors, vu (2,5) et (2,6), on a

(6,5) $$\dot{x}_\nu(t) = \varphi_{\nu 0}^{10} \Big|_{q_{0\sigma} = q_{0\sigma}(t),\ q_{0\sigma}^1 = \dot{q}_{0\sigma}(t)}$$

et

(6,6) $$\ddot{x}_\nu(t) = \varphi_{\nu 0}^{20} \Big|_{q_{0\sigma} = q_{0\sigma}(t),\ q_{0\sigma}^1 = \dot{q}_{0\sigma}(t),\ q_{0\sigma}^2 = \ddot{q}_{0\sigma}(t)}$$

où $q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)$ est le même mouvement en coordonnées de L a g r a n g e.

Posons pour $\mu \geqslant 0$

(6,7) $$f_{\nu\mu}^1(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^\mu) \underset{df}{=} f_{\nu\mu} \Big|_{x_\sigma^r = \varphi_{\sigma 0}^{r0}(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^r)}.$$

Au système de conditions

$$f_{\nu\mu}(t, x_r^0, x_r^1, \ldots, x_r^\mu) = 0$$

(où ν, μ vérifient (3,2)) exprimé dans les variables $x_r^0, \ldots, x_r^s$ équivaut le système composé de (6,2) et de

$$f_{\nu\mu}^1(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^\mu) = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots, s.$$

Il est exprimé dans les variables $q_0, q_0^1, \ldots, q_0^s$.

En introduisant de nouvaux paramètres $q_{01}, \ldots, q_{1,k(1)}$ on peut avec nos hypothèsese topologiques, faire de sorte que l'égalité

$$f_{\nu 1}^1 = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

soit équivalente au système paramétrique

(6,8) $$q_{0\nu}^1 = \varphi_{\nu 1}(q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)}) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k(0).$$

Les coordonnées $q_{1\nu}$ sont des *paramètres non holonomes de* 1^er^ *rang* (en pourrait les appeler *coordonnées de* M a g g i — voir A m a l d i, L e v i - C i v i t à [1], p. 382, ou P r z e b o r s k i [5], p. 331). Nous allons les désigner aussi par une lettre q_1.

On choisit le plus souvent ces paramètres de manière que

$$(6,9) \qquad \varphi_{\nu 1}(q_0, q_1) \equiv q_{0\nu} \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \ldots, k(1)$$

(alors les $q_{1\nu}$ pour $\nu = k(1)+1, \ldots, k(0)$ seront déterminées univoquement). Cette supposition n'est pas nécéssaire. Elle paraît avantageuse dans les applications aux équations du mouvement, car il suffit alors de substituer dans les équations $q_{1\nu} = \dot{q}_{0\nu}(t)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, k(1)$. Mais alors $\varphi_{\nu 1}$ pour $\nu = k(1)+1, \ldots, k(0)$ ont le plus souvent une forme trés compliquée et conduisent à de calculs pénibles. (Le choix (6,9) des variables de M a g g i correspond au choix $x_\nu = q_{0\nu}$ pour les systèmes holonomes, c'est-à-dire correspond au cas dans lequel nous considérons des équations aux coordonnées naturelles. $x_1, \ldots, x_{3n}$ et non pas aux coordonnées de L a g r a n g e).

Posons pour $r \geqslant 0$

$$\bar{\varphi}^{r1}_{\nu 1}(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^r, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^r) \underset{df}{=} D^r(q_0, q_1; q_0^1, q_1^1, \ldots, q_0^r, q_1^r)\, \varphi_{\nu 1}$$

et définissons $\varphi^{r1}_{\nu 1}$ par induction. Soit $\varphi^{01}_{\nu 1} = \bar{\varphi}^{01}_{\nu 1}$, c'est-à-dire $\varphi^{01}_{\nu 1} = \varphi_{\nu 1}$ et supposons que nous ayons défini $\varphi^{01}_{\nu 1}, \ldots, \varphi^{w-1,1}_{\nu 1}$. Admettons alors

$$q_{0\nu}^{w+1} = \varphi^{w1}_{\nu 1}(q_0, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^w) \underset{df}{=} \bar{\varphi}^{w1}_{\nu 1}\Big|_{q_{0\nu}^r = \varphi^{r-1,1}_{\nu 1}(q_0, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^{r-1})}$$

(où $r = 0, 1, \ldots, w-1$).

Posons enfin

$$\varphi^{w1}_{\nu 0}(q_0, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^{w-1}) \underset{df}{=} \varphi^{w0}_{\nu 0}(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^w)\Big|_{q_{0\nu}^r = \varphi^{r-1,1}_{\nu 1}(q_0, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^{r-1})}.$$

Evidemment, si $x_r^0 = x_r(t)$ est un mouvement conforme aux liaisons $f_{\nu 0} = 0$, $f_{\nu 1} = 0$ alors

$$x_r(t) = \varphi_{r0}\Big|_{q_{0i} = q_{0i}(t)}$$

$$\dot{x}_r(t) = \varphi^{11}_{r0}\Big|_{q_{0i} = q_{0i}(t),\; q_{1i} = q_{1i}(t)}$$

où $q_{0i} = q_{0i}(t)$ et $q_{1i} = q_{1i}(t)$ est le même mouvement $x_r^0 = x_r(t)$ exprimé en coordonnées de L a g r a n g e et de M a g g i respectivement.

7. Les liaisons paramétriques — suite. Procédons maintenant par induction. Supposons que nous ayons défini les paramètres $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, \ldots, q_{w1}, \ldots, q_{w,k(w)}$ et les paramètres auxiliaires q_{ij}^r, les fonctions $\varphi_{\nu 0}, \ldots, \varphi_{\nu w}$; $\bar{\varphi}^{ri}_{\nu j}$ et $\varphi^{ri}_{\nu j}$ pour $j = 0, 1, \ldots, w$ et enfin $f^1_{\nu\mu}, \ldots, f^w_{\nu\mu}$.

Posons

(7,1) $$f^{w+1}_{\nu\mu}(q_0, q_1, \dots, q_w, q^1_w, \dots, q^{\mu-w}_w) \underset{df}{=} f^w_{\nu\mu} \Big|_{q^r_{w-1,\nu} = \varphi^{r-1,w}_{\nu w}}.$$

Alors $f^{w+1}_{\nu\mu} = 0$ sera équivalent à $f^v_{\nu\mu} = 0$ et à $q^1_{w-1,\nu} = \varphi_{\nu w}$.

En introduisant de nouveaux paramètres $q_{w+1,1}, \dots, q_{w+1,k(w+1)}$ (que nous allons parfois désigner par une lettre q_{w+1}) on peut avec nos hypothèses topologiques, faire de sorte que les conditions

$$f^{v+1}_{\nu,w+1} = 0$$

soient équivalentes aux équations

$$q^1_{w\nu} = \varphi_{\nu,w+1}(q_0, \dots, q_w, q_{w+1}).$$

C'est-à-dire nous aurons

$$f^{w+1}_{\nu,w+1} \Big|_{q^1_{w\nu} = \varphi_{\nu,w+1}(q_0,\dots,q_{w+1})} = 0.$$

Si $k(w) - k(w+1) = k_{w+1} = 0$ alors l'ensemble des conditions $f^{w+1}_{\nu,w+1} = 0$ est vide, et nous pouvons poser

(7,2) $$\varphi_{\nu,w+1}(q_0, \dots, q_w) = q_{w+1,\nu} \qquad \nu = 1, 2, \dots, k(w+1).$$

On admet pour $r \geqslant 0$

$$\bar{\varphi}^{r,w+1}_{\nu,w+1} \underset{df}{=} D^r(q_0, \dots, q_{w+1}; q^1_0, \dots, q^1_{w+1}, \dots, q^r_0, \dots, q^r_{w+1})\, \varphi_{\nu,w+1}$$

(l'ensemble des variables $q^j_{w+1,1}, \dots, q^j_{w+1,k(w+1)}$ sera parfois désigné par un symbole q^j_{w+1}) et on définit $\varphi^{r,w+1}_{\nu,w+1}$ par une induction supplémentaire. Soit

$$\varphi^{0,w+1}_{\nu,w+1} = \bar{\varphi}^{0,w+1}_{\nu,w+1} \qquad \text{(c'est-à-dire} \qquad \varphi^{0,w+1}_{\nu,w+1} = \varphi_{\nu,w+1})$$

et supposons que nous ayons défini $\varphi^{0,w+1}_{\nu,w+1}, \dots, \varphi^{r-1,w+1}_{\nu,w+1}$. Admettons alors

$$\varphi^{r,w+1}_{\nu,w+1}(q_0, q_1, \dots, q_w, q_{w+1}, q^1_{w+1}, \dots, q^r_{w+1}) \underset{df}{=} \bar{\varphi}^{r,w+1}_{\nu,w+1} \Big|_{q^j_{i\nu} = \varphi^{j-1,w+1}_{\nu,i+1}}.$$

Posons enfin

$$\varphi^{r,w+1}_{\nu j} = \varphi^{rw}_{\nu j} \Big|_{q^l_{wi} = \varphi^{l-1,w+1}_{i,w+1}} \qquad \text{pour} \qquad j = 0, 1, \dots, w$$

ce qui achève notre définition par induction.

Remarquons que nous avons

(7,3) $$f^{w+1}_{\nu w}(q_0, q_1, \dots, q_w) = 0.$$

Si nous introduisons encore les variables $q_{-1,\nu}$ et les fonctions $q_{-1,\nu}= =q_{-1,\nu}(t)$ à l'aide des équations

$$x_\nu^1 = q_{-1,\nu} \quad \text{et} \quad \dot{x}_\nu(t) = q_{-1,\nu}(t)$$

alors nous voyons que $\varphi_{\nu j}^{rw}$ est une fonction des variables $q_0, \ldots, q_w$, $q_w^1, \ldots, q_w^{r+j-w}$ qui représente après la substitution des fonctions du temps $q_{i\mu} = q_{i\mu}(t)$, $q_{iw}^r = q_{iw}^{(r)}(t)$ la $r+1$-ième dérivée de la ν-ième coordonnée de la fonction $q_{j-1}(t)$, c'est-à-dire que

$$q_{j-1,\nu}^{(r+1)}(t) = \varphi_{\nu j}^{rw}(t, q_0, \ldots, q_w, q_w^1, \ldots, q_w^{r+j-w}) \Big| \; q_{i\mu} = q_{i\mu}(t),\ q_{iw}^u = q_{iw}^{(u)}(t).$$

Notre notation serait plus conséquente si nous avions désigné par $q_{w\nu}^0$ (pour $w = -1, 0, 1, \ldots, s$) les variables que nous avons désigné par $q_{w\nu}$. Nous aurions alors une famille de trois paramètres des symboles $q_{j\nu}^i$.

Nous pourrions alors plus facilement faire une distinction entre les nombres $q_{w\nu}^0$ et les fonctions du temps $q_{w\nu}^{(0)}(t) = q_{w\nu}(t)$ (de même que nous faisons ici entre $q_{j\nu}^i$ et $q_{j\nu}^{(i)} = q_{j\nu}^{(i)}(t)$ pour $i > 0$). Nos notations étant assez compliquées (et les variables $q_{w\nu}$ étant employées le plus souvent), il nous semblait superflu d'introduire une complication de plus.

8. Un paradoxe apparent. Considérons un système holonome ayant comme liaisons les conditions $f_{\nu 0} = 0$ et un système non holonome (composé des mêmes points) ayant comme liaisons $f_{\nu 0} = 0$ et $f_{\nu 1} = 0$. Nous aurons pour le second $s = 1$. Vu (3,3) en a donc $k(1) < k(0)$. Il pourrait sembler paradoxal qu'un système holonome de $k(0)$ degrés de liberté infinitésimale dépende de $k(0)$ paramètres $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}$ et un système non holonome ayant seulement $k(1)$ degrés de liberté infinitésimale (et $k(0)$ degrés de liberté intégrale, où $k(1) < k(0)$) dépende d'un plus grand nombres de paramètres, à savoir $k(0) + k(1)$ paramètres $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)}$.

Cependant il n'en est rien, si nous considérons le mouvement dans l'espace des configurations à $6n+1$ dimensions. Le système holonome a alors $2k(0)$ degrés de liberté ($k(0)$ degrés de liberté intégrale et $k(0)$ degrés de liberté infinitésimale qu'il faut ajouter) déterminés par les paramètres *quelconques* $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{01}^1, \ldots, q_{0,k(0)}^1$. Cependant le système non holonome n'a alors que $k(0)+k(1) < 2k(0)$ degrés de liberté déterminés par les paramètres quelconques $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)}$. Ici les paramètres $q_{0\nu}^1$ *ne sont pas quelconques*, mais ils sont déterminés par (6,8).

Le même raisonnement s'applique aux systèmes de l'ordre s quelconque — il faut alors considérer l'espace des configurations à $6ns+1$ dimensions.

9. Quelques identités. Vu (6,7) et (6,4) nous avons

$$\frac{\partial f^1_{\nu 0}}{\partial q_{0i}} = \sum_{j=0}^{3n} \frac{\partial f_{\nu 0}}{\partial x^0_j}\Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial q_{0i}} = 0. \tag{9,1}$$

De (6,7) il s'ensuit que pour $\mu > 0$

$$\frac{\partial f^1_{\nu\mu}}{\partial q^{\mu}_{0i}} = \sum_{j=0}^{3n} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x^{\mu}_j}\Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi^{\mu 0}_{j0}}{\partial q^{\mu}_{0i}}.$$

Mais il résulte de (6,4) et (2,4) que

$$\frac{\partial \varphi^{\mu 0}_{j0}}{\partial q^{\mu}_{0i}} = \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial q_{0i}}.$$

Donc

$$\frac{\partial f^1_{\nu\mu}}{\partial q^{\mu}_{0i}} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x^{\mu}_j}\Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial q_{0i}}. \tag{9,2}$$

D'une manière semblable nous obtenons de (7,2)

$$\frac{\partial f^{w+1}_{\nu w}}{\partial q_{wi}} = \sum_{j=1}^{k(w-1)} \frac{\partial f^{w}_{\nu w}}{\partial q^1_{w-1,j}}\Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi_{jw}}{\partial q_{wi}} = 0 \tag{9,3}$$

et de (7,1) pour $\mu > w$

$$\frac{\partial f^{w+1}_{\nu\mu}}{\partial q^{\mu-w}_{wi}} = \sum_{j=1}^{k(w-1)} \frac{\partial f^{w}_{\nu w}}{\partial q^{\mu-w+1}_{w-1,j}}\Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi^{\mu-w,w}_{jw}}{\partial q^{\mu-w}_{wi}}.$$

Mais, pour chaque l

$$\frac{\partial \varphi^{lw}_{jw}}{\partial q^{l}_{wi}} = \frac{\partial \bar{\varphi}^{l}_{jw}}{\partial q^{l}_{wi}} = \frac{\partial \varphi_{jw}}{\partial q_{wi}}$$

donc

$$\frac{\partial f^{w+1}_{\nu\mu}}{\partial q^{\mu-w}_{wi}} = \sum_{j=1}^{k(w-1)} \frac{\partial f^{w}_{\nu\mu}}{\partial q^{\mu-w+1}_{w-1,j}}\Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi_{jw}}{\partial q_{wi}}. \tag{9,4}$$

Si nous admettons $q^1_{-1\nu} = x^0_\nu$ alors les formules (9,1) et (9,2) deviennent des cas particuliers de (9,3) et de (9,4).

Dans le cas où $k_w = 0$, nous avons posé $\varphi_{\nu w} \equiv q_{w\nu}$ donc

$$\frac{\partial \varphi_{jw}}{\partial q_{wi}} = \delta_{ij} \tag{9,5}$$

où δ_{ij} est le symbole δ de Kronecker.

10. Les forces généralisées. Introduisons la définition par recurrence

$$Q_i^{-1} = F_i$$

$$\text{(10,1)} \qquad Q_i^j = \sum_{r=1}^{k(j-1)} Q_r^{j-1} \Big| \cdot \frac{\partial \varphi_{rj}}{\partial q_{ji}}\,.$$

où grace à la substitution opérée dans le second membre, la force Q_i^j doit être une fonction de $q_0, \ldots, q_{j-1}, q_j, q_j^1, \ldots$.

Pour $k = -1$ les Q_i^{-1} sont lese coordonnées des forces de Newton.

Pour $k = 0$ nous obtenons

$$\text{(10,2)} \qquad Q_i^0 = \sum_{r=1}^{3n} F_r \Big|_{x_\nu^\mu = \varphi_{\nu 0}^{\mu 0}(q_0, q_0^1, \ldots, q_0^\mu)} \cdot \frac{\partial \varphi_{r0}}{\partial q_{0i}}$$

c'est-à-dire des forces de Lagrange (elles sont des fonctions des variables de Lagrange et de leurs dérivées).

Pour $k = 1$ nous obtenons

$$\text{(10,3)} \qquad Q_i^1 = \sum_{r=1}^{k(0)} Q_r^0 \Big|_{q_{0r}^\mu = \varphi_{\nu 1}^{\mu-1,1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial q_{1i}} =$$

$$= \sum_{r=1}^{k(0)} \sum_{w=1}^{3n} \left| F_w \Big|_{x_\nu^\mu = \varphi_{\nu 0}^{\mu 0}} \cdot \frac{\partial \varphi_{w0}}{\partial q_{0r}} \right| \Bigg|_{q_{0\beta}^\alpha = \varphi_{\beta 1}^{\alpha-1,1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial q_{1i}}$$

c'est-à-dire des expressions qu'on pourrait appeler forces de Maggi (elles sont des fonctions des variables de Lagrange, des variables de Maggi et des dérivées des variables de Maggi).

Pour $j > 1$ l'expression Q_i^j généralise la notion de la force de Maggi (et la notion de la force de Lagrange).

II. LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE ET DE MAGGI

11. Les équations de Lagrange du second genre généralisées. Multiplions les équations de Lagrange du premier genre (4,3) par

$$\frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}}$$

et sommons les par rapport à i

(11,1) $$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i^2 \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} = \sum_{i=1}^{3n} F_i \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} + \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=1}^{k_0} \lambda_{\nu 0} \frac{\partial f_{\nu 0}}{\partial x_i^0} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} + $$

$$+ \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\mu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^\mu} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} \qquad j = 1, 2, \ldots, k(0).$$

Substituons dans (11,1) les variables $q_{0\mu}, q^1_{0\mu}, \ldots$, pour $x^0_\nu, x^1_\nu, \ldots$. Vu (6,4), (10,2), (9,1) et (9,2) nous avons

(11,2) $$\sum_{i=1}^{3n} m_i \varphi^{20}_{i0}(q_0, q_0^1, q_0^2) \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} = Q_j^0 + \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f^1_{\nu\mu}}{\partial q^\mu_{0j}} \qquad j = 1, 2, \ldots, k(0).$$

Nous allons transformer le premier membre de (11,2). Vu (6,4) et (2,3) nous aurons

(11,3) $$\sum_{i=1}^{3n} m_i \varphi^{20}_{i0} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{j0}} = \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=0}^{k(0)} \sum_{\mu=0}^{k(0)} m_i \frac{\partial^2 \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu} \partial q_{0\mu}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} q^1_{0\nu} q^1_{0\mu} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=1}^{k(0)} m_i \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} q^2_{0\nu}.$$

De (6,5) il s'ensuit que le potentiel cinétique [2]) en coordonnées généralisées q_0 (c'est-à-dire la fonction de $2k(0)+1$ variables $t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q^1_0, \ldots, q^1_{0,k(0)}$ qui donne après la substitution $q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)$, $q^1_{0\nu} = \dot{q}_{0\nu}(t)$, la fonction de temps appelée énergie cinétique) a la forme

$$T(q_0, q_0^1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i (x_i^1)^2 \Big|_{x^1_\nu = \varphi^{10}_{\nu 0}} = \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=0}^{k(0)} \sum_{\mu=0}^{k(0)} \frac{m_i}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\mu}} q^1_\nu q^1_\mu.$$

Si nous introduisons la fonction

(11,4) $$C(\xi_1, \ldots, \xi_{3n}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i (\xi_i)^2,$$

[2]) Le nom de potentiel cinétique est parfois réservé à la fonction de Lagrange — c'est-à-dire à la somme du pontentiel cinétique selon la définition donnée ci-dessus et du potentiel. La terminologie employée par nous semble plus rationelle, mettant en évidence l'analogie des relations: potentiel cinétique — énergie cinétique et potentiel — énergie potentielle

alors nous aurons

$$T = \mathcal{C}\Big|_{\xi_\nu = \varphi^{10}_{\nu 0}(q_0, q_1)}$$

Nous avons pour $j = 1, 2, ..., k(0)$

(11,5) $$\frac{\partial T}{\partial q_{0j}} = \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=0}^{k(0)} \sum_{\mu=0}^{k(0)} m_i \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu}\, \partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\mu}} q^1_{0\nu}\, q^1_{0\mu}$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial q^1_{0j}} = \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=0}^{k(0)} m_i \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu}} q^1_\nu .$$

Calculons l'expression

$$D^1(q_0, q^1_0; q^1_0, q^2_0)\, \frac{\partial T}{\partial q^1_{0j}} = \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=0}^{k(0)} \sum_{\mu=0}^{k(0)} m_i \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}\, \partial q_{0\nu}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\mu}} q^1_\nu\, q^1_\mu +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=0}^{k(0)} \sum_{\mu=0}^{k(0)} m_i \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu}\, \partial q_{0\nu}} q^1_\nu\, q^1_\mu + \sum_{i=1}^{3n} \sum_{\nu=1}^{k(0)} m_i \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0\nu}} q^2_{0\nu} .$$

Vu (11,3) et (11,5) nous avons

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\, \varphi^{20}_{\nu 0} \cdot \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial q_{0j}} = D^1(q_0, q^1_0; q^1_0, q^2_0)\, \frac{\partial T}{\partial q^1_{0j}} - \frac{\partial T}{\partial q_{0j}} .$$

Donc vu (11,2)

(11,6) $$D^1 \frac{\partial T}{\partial q^1_{0j}} - \frac{\partial T}{\partial q_{0j}} = Q^0_j + \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f^1_{\nu\mu}}{\partial q^\mu_{0j}} \qquad j = 1, 2, ..., k(0).$$

Ce sont des *équations de Lagrange du second genre généralisées.* Avec les liaisons

(11,7) $$f^1_{\nu\mu}(q_0, q^1_0, ..., q^\mu_0) = 0 \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, ..., k_\mu \\ \mu = 1, 2, ..., s \end{array}$$

elles déterminent les mouvements du système en coordonnées de L a g r a n g e (et si l'on ajoute à (11,7) les équations (6,2) elles déterminent les mouvements du système en coordonnées naturelles $x^0_1, ..., x^0_{3n}$).

Les équations du mouvement (11,6) sont à comprendre comme il suit: nous cherchons des fonctions $q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k(0)$ et des fonctions $\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$ et telles qu'après la substitution

$$q^r_{0\nu} = q^{(r)}_{0\nu}(t), \qquad \lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$$

(où nous avons posé $q^0_{0\nu} = q_{0\nu}$ et $q^{(0)}_{0\nu}(t) = q_{0\nu}(t)$) les équations (11,6) et (11,7) soient vérifiées identiquement.

Après une substitution appropriée des fonctions du temps et en employant la formule (2,5) nous pouvons obtenir des équations ayant la forme analogique à la forme usuelle des équations de Lagrange (c'est-à-dire des équations différentielles):

$$(11,8) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial q^1_{0j}}\Big|\right] - \frac{\partial T}{\partial q_{0j}}\Big| = Q^0_j\Big| + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu}(t)\frac{\partial f^1_{\nu\mu}}{\partial q^\mu_{0j}}\Big| \qquad j = 1, 2, \ldots, k(0)$$

avec les liaisons

$$(11,9) \qquad f^1_{\nu\mu}\Big| = 0 \qquad \begin{array}{l}\nu = 1, 2, \ldots, k_\mu\\ \mu = 1, 2, \ldots, s\end{array}$$

où $|$ désigne la substitution des fonctions du temps

$$q^\mu_{0j} = q^{(\mu)}_{0j}(t).$$

D'ordinaire on ommet le symbole de la substitution des fonctions du temps, mais alors la formule (11,8) sans commentaires approriés n'a pas du sens (specialement la dérivation par rapport au temps).

La méthode exposée dans ce paragraphe peut évidemment être employée quand il n'y a que des liaisons holonomes ($s = 0$). Elle conduit alors des équations de Lagrange du premier genre aux équations de Lagrange du second genre. Vu l'absence des liaisons $f_{\nu\mu} = 0$ pour $\mu > 0$ les calculs sont alors très simples — c'est la méthode la plus simple qui permet d'obtenir les équations de Lagrange du second genre à partir des équations de Lagrange du premier genre. Elle n'est pas employée dans les traités de Mécanique, car leurs auteurs préfèrent déduire les équations de Lagrange du second genre directement du principe du travail virtuel (voir par exemple Appell [3], p. 317 ff.). Les calculs sont alors semblables, mais un peu plus compliqués. Les causes de cette préférence sont multiples. Par exemple il est alors plus facile de dissimuler les difficultés topologiques qui se présentent lorsqu'on passe des liaisons implicites $f_{\nu 0} = 0$ aux liaisons paramétriques $x^0_\nu = \varphi_{\nu 0}(q_0)$.

Remarquons enfin que les équations de L a g r a n g e du second genre généralisées avec multiplicateurs sont connues depuis longtemps pour $s=1$ (voir par exemple A p p e l l [3], p. 375) et pour $s=2$ quand les $f_{\nu 2}$ sont linéaires par rapport à x_ν^2 (voir P r z e b o r s k i [4] ou [5], p. 321).

12. Les équations de Maggi généralisées avec multiplicateurs. En passant de (4,3) à (11,6) nous avons éliminé un certain nombre de multiplicateurs (les multiplicateurs $\lambda_{\nu 0}$). Nous allons encore en éliminer d'autres. Multiplions (11,6) par

$$\frac{\partial \varphi_{ji}}{\partial q_{1i}}$$

et sommons par rapport à j. Nous obtenons des équations analogues à (11,1)

$$\sum_{j=1}^{k(0)} \left[D^1 \frac{\partial T}{\partial q_{0j}^1} - \frac{\partial T}{\partial q_{0j}} \right] \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}} = \sum_{j=1}^{k(0)} Q_j^0 \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k(0)} \sum_{\nu=1}^{k_1} \lambda_{\nu 1} \frac{\partial f_{\nu 1}^1}{\partial q_{0j}^1} \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1j}} + \sum_{j=1}^{k(0)} \sum_{\mu=2}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^1}{\partial q_{0j}^\mu} \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}} .$$

Faisons la substitution

$$q_{0\nu}^r = \varphi_{\nu 1}^{r-1,1}(q_0, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^{r-1}) \qquad r = 1, 2, \ldots .$$

Vu (10,3), (9,3) et (9,4) nous obtenons pour $w=1$

$$(12,1) \qquad \sum_{j=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}} \cdot \left[D^1 \frac{\partial T}{\partial q_{0j}^1} - \frac{\partial T}{\partial q_{0j}} \right] \Bigg|_{q_{0\nu}^r = \varphi_{\nu 1}^{r-1,1}} = \qquad j = 1, 2, \ldots, k(1).$$

$$= Q_j^1 + \sum_{\mu=2}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^2}{\partial q_{1j}^{\mu-1}} .$$

Ce sont des *équations de Maggi généralisées avec multiplicateurs.* Avec les liaisons

$$(12,2) \qquad f_{\nu\mu}^2(q_0, q_1, q_1^1, \ldots, q_1^{\mu-1}) = 0 \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots, k_\mu \\ \mu = 2, 3, \ldots, s \end{array}$$

elles déterminent les mouvement du système en coordonnées de L a g r a n g e $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}$ et de M a g g i $q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)}$ (ou bien en coordonnées de L a g r a n g e si l'on ajoute à (12,2) les équations (6,8) et en coordonnées naturelles $x_1^0, \ldots, x_{3n}^0$ si l'on ajoute les équations (6,8) et (6,2)).

Les équations du mouvement (12,1) sont à comprendre comme il suit: nous cherchons des fonctions $q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)$ $\nu = 1, 2, \ldots, k(0)$, $q_{1\nu} = q_{1\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k(1)$ et $\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$ et telles qu'après la substitution

$$q_{0\nu} = q_{0\nu}(t), \qquad q_{1\nu}^{\mu} = q_{1\nu}^{(\mu)}(t), \qquad \lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$$

les équation (12,1) et (12,2) soient vérifiées identiquement.

Les équations (12,1) et (12,2) sont du même type que les équations (11,6) et (11,7). Après une substitution des fonctions du temps et en employant la formule (2,5), nous pouvons obtenir des équations ayant la forme analogique à la forme usuelle des équations de Maggi (c'est-à-dire des équation différentielles).

13. Les équations de Maggi généralisées sans multiplicateurs. Les équations (12,1) généralisent les équations de Maggi pour des liaisons d'ordre quelconques. Elles contiennent des multiplicateurs, mais si $k_0 > 0$ leur nombre est plus petit que dans les équations (11,6).

Le même procédé appliqué encore $s - 1$ fois permet d'éliminer tous les multiplicateurs. Dans ce but il suffit, en effet, de multiplier (12,1) $s - 1$ fois par

$$\frac{\partial \varphi_{jw}}{\partial q_{wi}}$$

pour $w = 2, 3, \ldots, s$ respectivement, d'éxécuter les substitutions nécessaires et d'appliquer chaque fois les formules (10,1), (9,3) et (9,4). On obtient ainsi des équations de Maggi *généralisées sans multiplicateurs*

$$\text{(13,1)} \quad \sum_{i_s=1}^{k(s-1)} \cdots \sum_{i_1=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{i_s, s}}{\partial q_{sj}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}, s-1}}{\partial q_{s-1, i_s}} \cdots \frac{\partial \varphi_{i_1 2}}{\partial q_{2 i_2}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i_1 1}}{\partial q_{1 i_2}} \cdot \qquad j = 1, 2, \ldots, k(s).$$

$$\cdot \left[D^1 \frac{\partial T}{\partial q_{0i_1}^1} - \frac{\partial T}{\partial q_{0i_1}} \right] \Bigg|_{q_{j\nu}^r = \varphi_{\nu, j+1}^{r-1, s}(q_0, \ldots, q_s)} = Q_j^s$$

Ces équations déterminent le mouvement de notre système en coordonnées généralisées $q_0, q_1, \ldots, q_s$ sans conditions supplémentaires.

On peut obtenir (13,1) sous une forme qui est apparemment plus simple. Posons

$$\tilde{f}_{K(r)+\nu, s}(t, x_\mu^0, x_\mu^1, \ldots, x_\mu^s) = D^{s-r} f_{\nu r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, s$$

où

$$K(r) = k(0) - k(r-1) \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, \ldots, s.$$

Alors les conditions (3,1) entraînent les conditions

$$(13,2)\qquad \begin{array}{ll} f_{\nu 0} = 0 & \nu = 1, 2, \dots, k_0 = 3n - k(0) \\ \tilde{f}_{is} = 0 & i = 1, 2, \dots, k(0) - k(s). \end{array}$$

L'ensemble des conditions (13,2) sera encore de la forme (3,1).

Soit

$$\tilde{f}^1_{is}(q_0, q^1_0, \dots, q^s_0) = \tilde{f}_{is}\Big|_{x^{\mu}_{\nu} = \varphi^{\mu 0}_{\nu 0}}$$

Alors les conditions (13,2) seront équivalentes aux conditions

$$\begin{array}{ll} x^0_\nu = \varphi_{\nu 0}(q_0) & \nu = 1, 2, \dots, 3n \\ \tilde{f}^1_{is} = 0 & i = 1, 2, \dots, k(0) - k(s). \end{array}$$

Vu (7,2) ces conditions seront équivalentes aux conditions paramétriques

$$(13,3)\qquad \begin{array}{ll} x^0_\nu = \varphi_{\nu 0}(t, q_{01}, \dots, q_{0,k(0)}) & \nu = 1, 2, \dots, 3n \\ q^1_{0\nu} = \tilde{\varphi}_{\nu 0} = \bar{q}_{1\nu} & \nu = 1, 2, \dots, k(0) \\ \bar{q}^1_{w-1,\nu} = \tilde{\varphi}_{\nu w} = \bar{q}_{w\nu} & w = 2, 3, \dots, s-1 \\ & \nu = 1, 2, \dots, k(0) \end{array}$$

$$\bar{q}^1_{s-1,\nu} = \tilde{\varphi}_{\nu s}(t, q_{01}, \dots, q_{0,k(0)}, \bar{q}_{11}, \dots, \bar{q}_{1,k(0)}, \dots, \bar{q}_{s-1,1}, \dots, \bar{q}_{s-1,k(0)}, \bar{q}_{s1}, \dots, \bar{q}_{s,k(s)})$$

$$\text{pour}\quad \nu = 1, 2, \dots, k(0).$$

Remarquons que, sous la forme paramétrique équivalente le système (3,1) dépende de $k = k(0) + k(1) + \dots + k(s)$ paramétres $q_0, \dots, q_s$. Cependant sous la forme (13,3) paramétrique équivalente le système (13,2) dépend de $\bar{k} = sk(0) + k(s)$ paramétres $q_0, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_s$. Si $s > 1$ et $k(0) > k(s-1)$ alors $\bar{k} > k$. Ceci résulte du fait que (3,1) et (13,2) ne forment pas deux ensembles d'équations équivalentes. En effet, en passant (13,2) à (13,1) nous aurons $(s-1)\,k(0) - k(1) - \dots - k(s-1)$ constantes indéterminées. Nous allons traiter cette question ailleurs.

Vu (9,5), de (13.1) et (13,3) nous tirons pour $s \geqslant 1$

$$(13,4)\qquad \sum_{i=1}^{k(0)} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{i\cdot}}{\partial \bar{q}_{sj}} \left| D^1 \frac{\partial T|}{\partial \bar{q}_{1i}} - \frac{\partial T|}{\partial q_{0i}} \right| = Q^s_j, \qquad j = 1, 2, \dots, k(s),$$

où $|$ désigne la substitution $q^1_{0\nu} = q_{1\nu}, q^2_{0\nu} = q_{2\nu}$.

Cette formule généralise une formule due à Przeborski (voir Przeborski [4] ou [5], p. 268 ff. et 323 où elle est donnée pour $s=2$ et $f_{\nu 2}$ linéaires par rapport à x_i^2 — dans sa formule les variables généralisées sont désignées par q_h, q_h' et σ_g).

A l'aide des équations (6,2) et (7,1) (ou bien (13,3)) ont peut évidemment, revenir aux coordonnées de Lagrange ou aux coordonnées naturelles.

Les équations (13,1) et 13,4) sont du même type que les équations (11,6). De même que les équations (11,6) et (12,1) on peut les ramener aux équations différentielles.

III. ÉQUATIONS D'APPELL

14. Les équations d'Appell généralisées avec multiplicateurs. Posons

$$S(q_0, q_1, q_1^1) = \mathcal{E}(x_1^2, \dots, x_{3n}^2)\Big|_{x_\nu^2 = \varphi_{\nu 0}^{21}(q_0, q_1, q_1^1)}$$

(voir (11,4)). Nous allons appeler cette fonction de $k(0)+2k(1)+1$ variables *fonction de* St.-Germain[3]). (Comparer à la définition de $T(q_0, q_0^1)$).

Nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1} = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_\nu^2}\Big|_{x_\nu^2 = \varphi_{\nu 0}^{21}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\nu 0}^{21}}{\partial q_{1i}^1}.$$

Mais

$$\frac{\partial \varphi_{\nu 0}^{21}}{\partial q_{1i}^1} = \sum_{j=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{\nu 0}^{20}}{\partial q_{0j}^2}\Big|_{q_{0\nu}^r = \varphi_{\nu 1}^{r-1,1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}^{11}}{\partial q_{1i}^1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{\nu 0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_{j1}^{11}}{\partial q_{1i}^1}\Big|_{q_{\nu 0}^r = \varphi_{\nu 0}^{r-1,1}} = \sum_{j=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{\nu 0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_\nu^2} = m_\nu x_\nu^2.$$

Donc

$$\frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1} = \sum_{l=1}^{3n} m_l x_l^2\Big|_{x_\nu^2 = \varphi_{\nu 0}^{21}} \cdot \sum_{j=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{l0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}}.$$

[3]) La fonction $\sigma = \sigma(t)$ qu'on obtient en substituant dans S les fonctions du temps $q_{0\nu} = q_{0\nu}(t)$, $q_{1\nu} = q_{1\nu}(t)$, $q_{1\nu}^1 = \dot{q}_{1\nu}(t)$ est parfois appelée *énergie d'accélération*, bien qu'elle n'ait (sauf la fonction $\mathcal{E}$) rien de commun avec la notion d'énergie.

Vu (4,3) on obtient

$$\frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1} = \left\{ \sum_{l=1}^{3n} \left[F_l + \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_l^\mu} \right] \right\}_{x_\nu^r = \varphi_{\nu 0}^{r1}} \left\{ \sum_{j=1}^{k(0)} \frac{\partial \varphi_{l0}}{\partial q_{0j}} \cdot \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial q_{1i}} \right\}.$$

Exécutons la multiplication du second membre. Vu (10,3), (9,1), (9,2) (9,3) et (9,4) pour $w = 1$ il s'ensuit

$$\frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1} = Q_i^1 + \sum_{\mu=2}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^2}{\partial q_{1i}^{\mu-1}} \qquad i = 1, 2, \dots, k(1). \tag{14,1}$$

Ce sont des *équations d'Appell généralisées avec multiplicateurs.* Avec les conditions (12,2) elles déterminent le mouvement du système.

Pour $s = 1$ nous aurons les équations d' Appell en variables de Maggi (voir Amaldi, Levi-Cività [1], p. 385 et Przeborski [5], p. 332):

$$\frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1} = Q_i^1 \qquad i = 1, 2, \dots, k(1). \tag{14,2}$$

Si — comme on le fait le plus souvent — on choisit les paramètres de manière qu'on ait (6,9), alors

$$q_{0\nu}^2 = D^1 \varphi_{\nu 1} = q_{1\nu}^1 \qquad \nu = 1, 2, \dots, k(1) \tag{14,3}$$

et on obtient *la forme primitive des équations d'Appell* [4]) (voir Appell [3], p. 384).

$$\frac{\partial S}{\partial q_{0i}^2} = Q_i^1 \qquad i = 1, 2, \dots, k(1). \tag{14,4}$$

Cette forme primitive des équations d'Appell peut suggérer qu'elles n'emploient que les coordonnées de Lagrange. Cette impression est cependant entièrement fausse. Car les variables $q_{01}^2, \dots, q_{0,k(1)}^2$ sont indépendentes (voir (14,3)).

Les équations (14,1) et (14,2) sont à comprendre de même que les équations (12,1) et les équations (14,4) de même que les équations (11,6).

Usuellement on écrit (14,4) sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{0i}} = Q_i^1 \qquad i = 1, 2, \dots, k(1)$$

mais alors on ne sait pas si $\ddot{q}_{0i}$ sont des variables (et de quelle sorte?) ou des dérivées des fonctions.

[4]) Nous retenons ici leur nom généralement admis, bien que J. W. Gibbs les ait démontrées 20 ans avant P. Appell.

15. Les équations généralisées d'Appell sans multiplicateurs. Soit $s \geqslant 2$, alors dans (14,1) nous avons des multiplicateurs. En les éliminant nous arriverons à un résultat moins banal que pour les équations de Maggi généralisées.

Multiplions (14,1) par

$$\frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial q_{2j}}$$

et sommons par rapport à i. Nous obtenons ainsi

$$(15,1) \qquad \sum_{i=1}^{k(1)} \frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1} \cdot \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial q_{2j}} = \sum_{i=1}^{k(1)} Q_i^1 \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial q_{2j}} + \sum_{i=1}^{k(1)} \sum_{\mu=2}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^2}{\partial q_{1i}^{\mu-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial q_{1j}}.$$

Posons

$$S_2(q_0, q_1, q_2) = S(q_0, q_1, q_1^1) \Big|_{q_{1\nu}^1 = \varphi_{\nu 2}(q_0, q_1, q_2)}.$$

Donc

$$(15.2) \qquad \frac{\partial S_2}{\partial q_{2j}} = \sum_{i=1}^{k(1)} \frac{\partial S}{\partial q_{1i}^1}\Bigg|_{q_{1\nu}^1 = \varphi_{\nu 2}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial q_{2j}}.$$

Exécutons dans (15,1) les substitutions

$$q_{1i}^w = \varphi_{i2}^{w-1,2}.$$

Vu (10,1), (9,3) et (9,4) le second membre de (15,1) se transformera de même que le second membre de (12,1) se transforme au § 13. Vu (15,2) nous aurons les équations

$$(15,3) \qquad \frac{\partial S_2}{\partial q_{2j}} = Q_i^2 + \sum_{\mu=3}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^3}{\partial q_{2j}^{\mu-2}} \qquad j = 1, 2, \ldots, k(2).$$

Avec les conditions supplémentaires

$$f_{\nu\mu}^3 = 0$$

elles déterminent les mouvements du système.

Dans le premier membre de (15,3) toutes les variables $t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)}, q_{21}, \ldots, q_{2,k(2)}$ sont évidemment indépendentes.

Si $s \geqslant 3$, introduisons pour faciliter l'élimination des multiplicateurs restant, des fonctions nouvelles. Soit

$$\bar{S}_r = D^{r-2}(q_0, q_1, q_2; q_0^1, q_1^1, q_2^1, \ldots, q_0^{r-2}, q_1^{r-2}, q_2^{r-2}) S_2$$

et

$$S_r(q_0, \ldots, q_r) = \bar{S}_r \Big|_{q_{w\nu}^j = \varphi_{\nu, w+1}^{j-1, w+j}(q_0, \ldots, q_{w+j})}$$

Multiplions (15,3) $s - 2$ fois par

$$\frac{\partial \varphi_{jw}}{\partial q_{wi}}$$

pour $w = 3, \ldots, s$ respectivement, sommons par rapport à j, exécutons les substitutions nécessaires et appliquons au second membre les formules (10,1), (9,3) et (9,4) comme au § 13. Transformons le premier membre à l'aide de la formule de recurrence

$$\frac{\partial S_r}{\partial q_{rj}} = \sum_{i=1}^{k(r-1)} \frac{\partial S_{r-1}}{\partial q_{r-1,i}} \cdot \frac{\partial \varphi_{ir}}{\partial q_{rj}} \qquad r = 3, \ldots, s$$

(qu'on peut obtenir facilement de (2,2), (2,4) et de la définition de S_r).

Nous obtenons ainsi les formules

$$\frac{\partial S_s}{\partial q_{si}} = Q_i^s \qquad i = 1, 2, \ldots, k(s). \tag{15,4}$$

Ce sont des *équations d'Appell généralisées sans multiplicateurs.*

La formule (15,4) peut être écrite sous la forme n'employant que la fonction de St.-Germain

$$\frac{\partial}{\partial q_{si}} \{D^{s-2} |S|||\} = Q_i^s.$$

Après une substitution appropriée des fonctions du temps dans les deux membres, on obtient des équations ayant la forme usuelle des équations de la mécanique (équations différentielles du mouvement).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amaldi U., Levi-Cività T., *Lezioni di meccanica razionale* vol. 2, parte I, Bologna 1951.

[2] Appell P., *Sur une forme générale des équations de la dynamique.* Mem. Sc. Math. 1, Paris 1925.

[3] —— *Traité de la mécanique rationelle*, vol. 2, Paris 1931.

[4] Przeborski A., *Die allgemeinsten Gleichungen der Klassischen Dynamik*, Math. Zeit. 36 (1933), p. 184—194.

[5] —— Wykłady mechaniki teoretycznej, vol. 2, Warszawa 1935.

[6] Stäckel P., *Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges*, Sitzber. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Klasse, Abteilung A, Math.-Phys. Wiss. 1 (1919), Abhandung 11, p. 11—25.

[7] Tatarkiewicz K., *Kilka uwag o siłach zależnych od wyższych pochodnych drogi względem czasu*, Wiadomości Mat. 2 (w druku).

Streszczenie

1. Praca ma na celu podanie *równań ruchu układów anholonomicznych niepracujących dowolnie wysokiego rzędu.* Wprawdzie — jak się zdaje — układy takie nie mają większego znaczenia praktycznego, lecz badanie ich rzuca nowe światło na bardzo rozpowszechnione układy zerowego i pierwszego rzędu (to jest na układy holonomiczne i układy anholonomiczne w zwykłym sensie).

2. Weźmy układ n punktów o współrzędnych $P_\nu = (x_{3\nu-2}, x_{3\nu-1}, x_{3\nu})$ obarczonych masami $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$ i skrępowanych więzami

$$f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_{3n}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}, \ldots, x_1^{(\mu)}, \ldots, x_{3n}^{(\mu)}) = 0 \tag{1}$$

gdzie $\nu = 1, 2, \ldots, k(\mu-1) - k(\mu) = k_\mu$ $(k(-1) = 3n)$ i $\mu = 0, 1, \ldots, s$. Liczbę s nazywamy rzędem anholonomiczności układu (o ile nie daje się ona obniżyć) i zakładamy, że

$$\sum_{i=1}^{3n} \left| \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{(\mu)}} \right| > 0 .$$

Oznaczmy przez $[F_{3\nu-2}, F_{3\nu-1}, F_{3\nu}]$ i $[R_{3\nu-2}, R_{3\nu-1}, R_{3\nu}]$ siłę i reakcję więzów działające na punkt P_ν.

Więzy nazywamy niepracującymi, jeśli ich reakcje spełniają warunek

$$R_i = \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu}(t) \left. \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{(\mu)}} \right|_{x_j^{(\mu)} = x_j^{(\mu)}(t)} \tag{2}$$

gdzie $\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$ są pewnymi funkcjami czasu, zależnymi od rozpatrywanego ruchu.

3. Więzy uwikłane (1) będą równoważne (przy odpowiednich założeniach regularności) więzom parametrycznym

$$x_i = \varphi_{i0}(t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)})$$
$$\dot{q}_{0i} = \varphi_{i1}(t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{q}_{s-1,i} = \varphi_{is}(t, q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, \ldots, q_{s1}, \ldots, q_{s,k(s)}) .$$

Oznaczmy przez $f_{\nu\mu}^{w+1}$ funkcje $f_{\nu\mu}$, w których $x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(\mu)}$ zastąpiono przez wielkości $q_{\nu j}, q_{1j}, \ldots, q_{wj}$ oraz pochodne $\dot{q}_{wj}, \ldots, q_{wj}^{(\mu-w)}$.

Przyjmijmy wreszcie definicję indukcyjną:

$$Q_i^{-1} = F_i$$

oraz

$$Q_i^j = \sum_{r=1}^{k(j-1)} Q_r^{j-1} \Big| \cdot \frac{\partial \varphi_{rj}}{\partial q_{ji}}$$

gdzie kreska | oznacza, iż dokonano podstawienia — w danym wypadku, iż podstawiono w Q_r^{j-1} zmienne $q_{0\nu}, q_{1\nu}, \ldots, q_{j\nu}$ i pochodne $\dot{q}_{j\nu}, \ddot{q}_{j\nu}, \ldots$. Tak zdefiniowane Q_i^0 jest siłą uogólnioną Lagrange'a, zaś Q_i^1 jest siłą uogólnioną Maggiego.

4. Z postulatu reakcji więzów i z (2) wynikają dla więzów niepracujących następujące równania ruchu (*uogólnione równania* Lagrange'a I *rodzaju*):

$$m_i \ddot{x} = F_i + \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{(\mu)}}$$

Określają one razem z (1) ruch układu.

Eliminując mnożniki $\lambda_{\nu 0}$ i przechodząc do zmiennych Lagrange'a $q_{0\nu}$ otrzymamy *uogólnione równania* Lagrange'a II *rodzaju:*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{0i}}\Big|\right] - \frac{\partial T}{\partial q_{0i}} = Q_i^0 + \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^1}{\partial q_{0i}^{(\mu)}} \qquad i = 1, 2, \ldots, k(0).$$

Razem z więzami $f_{\nu\mu}^1 = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, s)$ tworzą one równania określające ruch układu w zmiennych Lagrange'a $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}$.

Eliminując mnożniki $\lambda_{\nu 1}$ i przechodząc do zmiennych Maggiego $q_{1\nu}$ otrzymamy *uogólnione równania* Maggiego (12,1), str. 21, które określają razem z warunkami $f_{\nu\mu}^2 = 0$ ruch układu w zmiennych $q_{01}, \ldots, q_{0,k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1,k(1)}$.

Eliminując dalej mnożniki otrzymamy równania (13,1) określające ruch układu bez żadnych warunków ubocznych.

5. Weźmy funkcję $g = g(t, q_{01}, \ldots, q_{0k})$ i zdefiniujmy wzorami indukcyjnymi (2,1) i (2,2) symbol $D^r g$. Jest to rodzaj różniczki zupełnej.

Oznaczmy:

$$S = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \ddot{x}_i}{2} \Big|$$

gdzie $\ddot{x}_i$ trzeba wyrazić przez zmienne $q_{0\nu}, q_{1\nu}, \dot{q}_{1\nu}$ (*S* nazywamy *funkcją de* Saint-Germain'a).

Wykorzystując te oznaczenia otrzymuję wzory (14,1), które razem z warunkami $f^2_{\nu\mu} = 0$, $\mu = 2, 3, \ldots, s$ określają ruch układu. Dla $s = 1$ są one identyczne z *równaniami* A p p e l l a.

Eliminując z nich mnożniki, otrzymuję w ostatnim paragrafie równania:

$$\frac{\partial}{\partial q_{si}} \{D^{s-2} |S||\} = Q_i^s$$

określające ruch naszego układu bez żadnych warunków ubocznych.

6. Wzory występujące w pracy mają nieco inną postać niż wzory występujące w tym streszczeniu. W pracy bowiem stale i konsekwentnie rozróżnia się zmienne (to jest elementy pewnych zbiorów liczb rzeczywistych) $x^0_\nu, x^1_\nu, \ldots$, od funkcji $x^{(0)}_\nu = x_\nu(t)$ i ich pochodnych $x^{(1)}_\nu = \dot{x}_\nu(t), \ldots$, etc.. Ponadto stosowano szerzej symbol $D^r g$ (porównaj np. wzór (11,6) i uogólnione równania L a g r a n g e' a II rodzaju podane w niniejszym streszczeniu). Natomiast w streszczeniu, celem skrócenia wyjaśnień zastosowano tradycyjne sposoby zapisu.

Р е з ю м е

1. Этот труд имеет целью дать *уравнения движения неголономных неработающих систем произвольного порядка*. Хотя, как кажется, такие системы не имеют большего практического значения, однако их исследование бросает новый свет на очень распространённые системы нулевого и первого порядка (т.е. системы голономные и неголономные в обычном смысле).

2. Возьмём систему n точек с координатами $P_\nu = (x_{3\nu-2}, x_{3\nu-1}, x_{3\nu})$, снабженных массами $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$ и подверженных связям

$$f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_{3n}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}, \ldots, x_1^{(\mu)}, \ldots, x_{3n}^{(\mu)}) = 0, \tag{1}$$

где $\nu = 1, 2, \ldots, k(\mu-1) - k(\mu) = k_\mu (k(-1) = 3n)$ и $\mu = 0, 1, \ldots, s$. Число s называем порядком неголономности системы (по скольку не удаётся её понизить) и полагаем, что

$$\sum_{i=1}^{3n} \left| \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{(\mu)}} \right| > 0 .$$

Обозначим через $[F_{3\nu-2}, F_{3\nu-1}, F_{3\nu}]$ и $[R_{3\nu-2}, R_{3\nu-1}, R_{3\nu}]$ силу и реакцию связей, действующих на точку P_ν.

Связи называем неработающими, если их реакции исполняют условие

$$R_i = \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu}(t) \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{(\mu)}} \Bigg|_{x_i^{(\mu)} = x_i^{(\mu)}(t)} \tag{2}$$

где $\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}(t)$ некоторые функции времени, зависящие от рассматриваемого движения.

3. Неявно выраженные связи (1) равносильны (при подходящих условиях регулярности) параметрическим связям

$$x_i = \varphi_{i0}(t, q_{01}, \ldots, q_{0.k(0)})$$
$$\dot{q}_{01} = \varphi_{i1}(t, q_{01}, \ldots, q_{0.k(0)}, q_{11}, \ldots, q_{1.k(1)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{q}_{s-1,i} = \varphi_{is}(t, q_{01}, \ldots, q_{0.k(0)}, \ldots, q_{s1}, \ldots, q_{s.k(s)}).$$

Обозначим через $f_{\nu\mu}^{w+1}$ функции $f_{\nu\mu}$, в которых $x_i, \dot{x}_i \ldots, x_i^{(\mu)}$ замечены величинами $q_{0j}, q_{1j}, \ldots, q_{wj}$ и производными $\dot{q}_{wj}, \ldots, q_{wj}^{(\mu-w)}$.

Наконец, примем следующее индуктивное определение

$$Q_i^{-1} = F_i$$

$$Q_i^j = \sum_{r=1}^{k(j-1)} Q_r^{j-1} \Bigg| \cdot \frac{\partial \varphi_{rj}}{\partial q_{ji}}$$

где вертикальная черта | обозначает, произведена подстановка, — в данном случае, что подставлены в Q_r^{j-1} переменные $q_{0\nu}, q_{1\nu}, \ldots, q_{j\nu}$ и производные $\dot{q}_{j\nu}, \ddot{q}_{j\nu}, \ldots$. Определенное таким образом Q_i^0 является обобщённой силой Л а р г а н ж а, а Q_i^1 — обобщённой силою М а д ж д ж и.

4. Из постулата реакции связей и из условий (2) следует для неработающих связей следующие уравнения движения (*обобщённые уравнения* Л а г р а н ж а *1-го рода*):

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_i^{(\mu)}}$$

Вместе с (1) они определяют движение системы.

Элиминируя множители $\lambda_{\nu 0}$ и переходя к переменным Л а г р а н ж а $q_{0\nu}$, получим обобщённые уравнения Л а г р а н ж а 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{0i}}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_{0i}} = Q_i^0 + \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{k_\mu} \lambda_{\nu\mu} \frac{\partial f_{\nu\mu}^1}{\partial q_{0i}^{(\mu)}} \quad i = 1, 2, \ldots, k(0).$$

Вместе со связями $f^1_{\nu\mu} = 0$ $(\mu = 1, 2, ..., s)$ они образуют уравнения, определяющие движение системы в переменных Лагранжа q_{01}, ..., $q_{0,\,k(0)}$.

Элиминируя множители $\lambda_{\nu 1}$ и переходя к переменным Маджджи $q_{1\nu}$, получим *обобщённые уравнения* Маджджи (12,1) стр. 21, которые вместе с условиями $f^2_{\nu\mu} = 0$ определяют движение системы в переменных $q_{01}, ..., q_{0,\,k(0)}, q_{11}, ..., q_{1.\,k(1)}$.

Элиминируя далее множители, получим уравнения (13,1), определяющие движение системы без всяких побочных условий.

5. Возьмём функцию $g = g(t, q_{01}, ..., q_{0k})$ и определим с помощью индуктивных формул (2,1) и (2,2) символ $D^r g$. Это род полного дифференциала.

Обозначим

$$S = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \ddot{x}_i}{2} \Big|$$

где $\ddot{x}_i$ надо выразить через $q_{0\nu}, q_{1\nu}, \dot{q}_{1\nu}$ (S называем *функцией* де Сен-Жермена).

Пользуясь этими обозначениями, я получаю формулы (14,1), которые вместе с условиями $f^2_{\nu\mu} = 0$, $\mu = 2, 3, ..., s$ определяют движение системы. При $s = 1$ они тождественны с *уравнениями* Аппелла.

Элиминируя из них множители, я получаю в последнем §-е уравнения

$$\frac{\partial}{\partial q_{si}} \{D^{s-2}[S|\,||\} = Q^s_i$$

которые определяют движение нашей системы без всяких побочных условий.

6. Формулы, фигурирующие в работе, несколько отличаются видом от формул, приводимых в этом резюме. Ибо в работе я постоянно и последовательно различаю переменные (то-есть элементы некоторых множеств действительных чисел) $x^0_\nu, x^1_\nu, ...$, от функций $x^{(0)}_\nu = x_\nu(t)$ и их производных $x^{(1)}_\nu = \dot{x}_\nu(t), ...$, и т.д.. Сверх того шире был применяем символ $D^r g$ (сравни например, формулу (11,6) и обобщённые уравнения Лагранжа 2-го рода приведённые в этом резюме). Но в резюме, с целью сокращения объяснений, был переменён традиционный способ записи.