ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IX, 11 SECTIO A 1955

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

KONSTANTY RADZISZEWSKI et ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire d'un ovale dans le rapport k

O miejscu geometrycznym środków cięciw dzielących pole owalu w stosunku k

О геометрическом месте средин хорд, делящих площадь выпуклой фигуры в отношении k

1. M. Biernacki a posé le problème suivant: quelles sont les propriétés de la courbe qui est le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire d'un ovale donné R dans le rapport k?

Dans ce travail nous étudions la convexité de cette courbe. On constate aisément que le lieu géométrique cherché n'est pas, en général, une courbe convexe. Considérons, en effet, un triangle équilatéral. Nous allons prouver que *le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire du triangle équilatéral dans le rapport k est une courbe non convexe, k étant arbitraire.*

Démonstration: Considérons le triangle équilatéral ABC. Soit $A'B'$ une corde parallèle à AB, divisant l'aire du triangle ABC dans le rapport k et soit A' un point sur AC, B' un point sur BC. Le rapport de l'aire du trapèze $AA'B'B$ à celle du triangle ABC est donc égal à k, où $k \leqslant 1$. Sur le segment BC choisissons un point C' tel que le rapport de l'aire $\triangle ABC'$ à l'aire $\triangle AC'C$ soit égal à k. Il est évident que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à l'aire $\triangle AC'B$. Le point C' est donc situé sur le côté BC entre les points B' et C. Désignons par P, Q respectivement les milieux des côtés AC et AB, et par S le point d'intersection du segment PQ et du segment $A'B'$, enfin par L le milieu du segment $A'B'$. Il est clair que le milieu O du segment AC' est sur le segment PQ. Nous allons montrer qu'il ne peut se trouver sur la partie PS du segment PQ. En effet, si le milieu O du segment AC' se trouvait sur PS, le point d'intersection de AC' et $A'B'$ que nous désignons par D serait situé sur le segment $A'S$; par suite, on aurait aire $\triangle AA'D >$ aire $\triangle DC'B'$, car $AD < DC'$, $A'D < DB'$ et $\sphericalangle A'DA = \sphericalangle C'DB'$. Mais comme aire $\triangle ABC' =$ aire $AA'BB'$, on aurait aire $\triangle AA'D =$ aire $\triangle DC'B'$ et on aboutirait à une contradiction. Le milieu O du segment AC' est donc un point intérieur du trapèze $ABB'A'$ et il est situé sur le segment SQ. D'une façon analogue, en considérant un segment symétrique de AC' par rapport à la droite QC nous aurons un point symétrique du point O par rapport à QC. Le point L et les deux points que nous venons d'obtenir appartiennent au lieu géométrique des milieux des cordes qui divisent l'aire $\triangle ABC$ dans le rapport k; le triangle équilatéral étant une figure symétrique, on voit aisément que ce lieu géométrique ne peut être une figure convexe, c.q.f.d.

2. Nous allons prouver que, dans le cas où l'ovale R a un centre de symètrie, le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire de R dans le rapport k, est une courbe convexe.

Soit R un ovale ayant un centre de symétrie O et soient AB et A_1B_1 des cordes divisant l'aire de l'ovale R dans le rapport k, enfin S et S_1 les milieux des segments AB et A_1B_1. Soient $A', B', A_1', B_1', S', S_1'$ les points symétriques des points A, B, A_1, B_1, S, S_1 par rapport à O. Nous supposerons que O n'est pas sur AB, car alors $k = 1$ et le lieu géométrique cherché est le point O.

Nous allons démontrer un lemme:

Lemme: *Si AB et A_1B_1 sont des cordes divisant l'aire R dans le rapport k, le milieu S_1 du segment A_1B_1 n'appartient pas au segment AB.*

D é m o n s t r a t i o n: Supposons que S_1 soit un point intérieur du segment SA, où S est le milieu du segment AB. Evidemment les aires des triangles curvilignes $S_1\widehat{AA_1}$ et $S_1'\widehat{BB_1}$, où $\widehat{AA_1}$ et $\widehat{BB_1}$ désignent des arcs de la frontière de R, sont égales, A_1 désignant un point intérieur de la partie de l'arc de l'ovale R qui limite avec la corde AB la partie plus petite de l'aire de l'ovale. On a aussi: $AB \parallel A'B'$, $A_1B_1 \parallel A_1'B_1'$, $S_1A_1 = S_1B_1 = S_1'A_1' = S_1'B_1'$, $S_1B = S_1'B'$, $AS_1 < SB < S_1B = S_1'B'$. Menons les segments A_1B_1' et S_1S_1'. On obtient ainsi un parallélogramme $S_1A_1B_1'S_1'$. Puisque $S_1A_1 \| S_1'B_1'$ et $S_1A \| S_1'B'$ et que les points B', B_1', A, A_1 sont sur la frontière de l'ovale R, les points B' et A doivent être de part et d'autre de la droite $B'A$, et les arcs $\widehat{B'B_1'}$ et $\widehat{AA_1}$ de la frontière de l'ovale R sont situés de part et d'autre de la droite $B_1'A_1$. Il en résulte que les aires des triangles curvilignes $\widehat{S_1'B'B_1'}$ et $\widehat{S_1AA_1}$ ne peuvent être égales. L'aire du triangle curviligne $\widehat{S_1'B'B_1'}$ étant égale à celle du triangle curviligne $\widehat{S_1B_1B}$ ($\widehat{B'B_1'}$ et $\widehat{B_1B}$ désignent des arcs de la frontière de l'ovale R), l'aire du triangle curviligne $\widehat{SAA_1}$ n'est pas égale à celle du triangle curviligne $\widehat{S_1B_1B}$, contrairement à l'hypothèse.

Il est facile de remarquer que l'égalité des aires des triangles curvilignes $\widehat{S_1'B_1'B'}$ et $\widehat{S_1A_1A}$ n'a lieu que lorsque B' et A sont sur la droite $B_1'A_1$ et $S_1 \equiv S$. On peut donc compléter l'énoncé du lemme comme il suit:

Si AB et A_1B_1 sont des cordes divisant dans le rapport k l'aire de l'ovale R ayant un centre de symétrie, le milieu de la corde AB ne peut être sur la corde A_1B_1 que dans le cas où les milieux des deux cordes se confondent et la frontière contient un segment rectiligne A_1B'.

Le lemme que nous venons de démontrer nous permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème: *Le lieu géométrique des milieux des cordes divisant dans le rapport* $k \neq 1$ *l'aire d'un ovale R ayant un centre de symétrie et des points intérieurs, est une courbe fermée convexe Q.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire R dans le rapport k soit une courbe fermée Q non convexe. Il existerait alors une corde AB ayant avec Q un point commun M différent de son milieu. (Remarquons que Q a un centre de symétrie et limite un ensemble plan ayant des points intérieurs. Soit S le bord de l'enveloppe convexe du domaine limité par la courbe Q. Il est facile de voir qu'il existe des points $M \in Q - S$ tels que toute droite passant par M coupera Q en deux points au moins. Il suffit, en effet, que M ne soit pas un point multiple de la courbe Q et qu'il existe, dans son entourage des points intérieurs de la ensemble limité par la courbe Q). Chaque point de Q étant le milieu d'une corde divisant l'aire R dans le rapport k, le milieu de cette corde serait situé sur la corde AB et serait différent du milieu de la corde AB, ce qui est en contradiction avec le lemme. Le théorème est ainsi démontré.

Chaque corde qui divise l'aire R dans le rapport k ayant avec la courbe Q exactement un point commun et Q étant une courbe fermée, on peut donner au théorème l'énoncé plus précis suivant:

L'enveloppe des cordes qui divisent dans le rapport k l'aire d'un ovale plan R ayant un centre de symètrie est une courbe Q convexe, fermée et ayant un centre de symétrie. La courbe Q est en même temps le lieu géométrique des milieux de ces cordes.

Streszczenie

W pracy tej dowodzi się, że miejscem geometrycznym środków cięciw, dzielących w stosunku k pole owalu płaskiego i posiadającego środek symetrii, jest krzywa wypukła. Istnieją owale, dla których własność ta nie zachodzi.

Резюме

В этой работе доказано, что геометрическое место средин хорд, делящих в отношении k площадь плоской выпуклой фигуры, имеющей центр симметри, есть выпуклая кривая. Существуют выпуклые фигуры, не обладающие этим свойством.