ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. IX, 9 SECTIO A 1955

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Quelques remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes

Kilka uwag o twierdzeniach Schilda dotyczących pewnej klasy funkcji jednolistnych

Несколько замечаний о теоремах Шильда, относящихся к одному классу однолистных функций

§ 1. Désignons par S_p la classe des fonctions qui sont univalentes dans le cercle $|z|<1$ et non univalentes dans un cercle plus grand. A. Schild [1] a étudié la classe des polynomes de la forme $f_p(z) = z - \sum\limits_{2}^{N} a_n z^n$, $N \geqslant 2$, à coefficients a_n réels et non négatifs. Il a établi que la condition nécessaire et suffisante pour que tout polynome $f_p(z)$ appartienne à la classe S_p s'exprime par l'égalité:

$$1 - \sum_{2}^{N} n\, a_n = 0. \tag{1}$$

En utilisant cette égalité Schild a démontré un certain nombre d'intéressants théorèmes sur les propriétés de la représentation conforme du cercle unité et du cercle $|z|<1/2$ fournie par les polynomes $f_p(z) \in S_p$.

Le théorème 1 de Schild traite de la relation (1) pour les polynomes $f_p(z) \in S_p$.

Voici maintenant une liste des autres théorèmes où leur numérotage a été conservé:

Th. 2. Aucune fonction $w = f_p(z) \in S_p$ ne représente le cercle $|z|<1$ sur un domaine convexe.

Th. 3. Toute fonction $w = f_p(z) \in S_p$ représente le cercle $|z|<1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine.

Th. 4. Si $w = f_p(z) \in S_p$, l'image du cercle unité fournie par la fonction $w = f_p(z)$ recouvre complètement le cercle $|w| \leqslant 1/2$. Cette limite est atteinte pour la fonction $f_p^*(z) = z - z^2/2$.

Th. 5. Toute fonction $w = f_p(z) \in \dot{S}_p$ représente le cercle $|z| \leqslant 1/2$ sur un domaine convexe. Cette limite est atteinte pour la fonction $f_p^*(z)$.

Th. 6. L'image du cercle $|z| \leqslant 1/2$ fournie par la fonction $w = f_p(z) \in S_p$ recouvre complètement le cercle $|w| \leqslant 3/8$. Ici aussi, ce résultat ne peut être amélioré, car la limite est atteinte pour la fonction $f_p^*(z)$.

Th. 7. Pour toute fonction $f_p(z) \in \dot{S}_p$ on a la relation $\frac{d_0}{d^*} \geqslant 2/3$, où d_0 et d^* sont les rayons des cercles de rayon maximum recouverts respectivement par l'image du cercle $|z| \leqslant r_0$ (r_0 — rayon de convexité de $f_p(z)$) et celle du cercle unité. Cette limitation n'est probablement pas exacte; l'auteur suppose que $\frac{d_0}{d^*} \geqslant 3/4$.

Th. 8. Si A est l'aire de l'image du cercle $|z| < 1$ fournie par $w = f_p(z) \in S_p$, on a $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$, l'égalité ayant lieu pour $f_p^*(z)$.

Th. 9. Pour la fonction $w = f_p(z) \in S_p$, on a les limitations suivantes:

$$|z| - \frac{|z|^2}{2} \leqslant |f_p(z)| \leqslant |z| + \frac{|z|^2}{2}.$$

Th. 10. Pour la fonction $f_p'(z)$ on a les limitations

$$1 - |z| \leqslant |f_p'(z)| \leqslant 1 + |z|,$$

où $f_p'(z)$ est la dérivée de $f_p(z)$.

Dans les théorèmes 9 et 10 l'égalité a lieu aussi pour la fonction $f_p^*(z)$.

La plupart des théorèmes cités ne sont pas caractéristiques pour la classe des polynomes étudiée par Schild, ils sont aussi valables pour une classe de fonctions plus étendue.

Le but de ce travail est d'établir ces théorèmes pour une classe de fonctions holomorphes dans le cercle unité comprenant la classe des polynomes $f_p(z)$ pour lesquels la condition (1) est satisfaite.

§ 2. Désignons par Φ la classe des fonctions analytiques de la forme $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$ satisfaisant à la condition

$$1 - \sum_2^\infty n |a_n| \geqslant 0, \tag{2}$$

où a_n sont des nombres complexes. Je vais montrer que quelques uns des théorèmes établis par Schild pour les polynomes $f_p(z) \epsilon S_p$ sont valables aussi pour les fonctions de la classe Φ. On aura ainsi une généralisation en un certain sens, car il est évident que la classe Φ est par définition plus étendue que celle des polynomes $f_p(z)$ appartenant à la classe S_p.

Parmi les théorèmes énoncés ci-dessus, le th. 2 n'est plus vrai pour les fonctions de la classe Φ, car p. ex. la fonction $z - 1/6\, z^2$, qui appartient à la classe Φ, représente le cercle $|z| \leqslant 1$ sur un domaine convexe.

L'auteur de ce travail n'a pas réussi à établir si le théorème 7 reste valide pour les fonctions appartenant à la classe Φ.

En ce qui concerne les autres théorèmes, ils sont vrais pour les fonctions de cette classe, les démonstrations des théorèmes 4, 6, 8, 9, 10 étant les mêmes que celles de Schild. C'est pourquoi je me bornerai à donner les démonstrations des théorèmes 3 et 5 pour les fonctions de la classe Φ, car elles diffèrent de celles que Schild a données dans son travail.

Théorème 3. *Toute fonction $f(z) \epsilon \Phi$, représente le cercle unité sur un domaine étoilé par rapport à l'origine.*

Démonstration. Il s'agit de prouver que pour $|z| < 1$ la fonction $f(z)$ satisfait à la condition $R\left(\frac{zf'}{f}\right) > 0$, où $R\left(\frac{zf'}{f}\right)$ désigne la partie réelle de l'expression $\frac{zf'}{f}$. Pour le module de l'expression $\frac{zf'}{f} - 1$ j'obtiens:

$$\left|\frac{zf'}{f} - 1\right| = \left|\frac{zf' - f}{f}\right| = \left|\frac{z + \sum\limits_2^\infty n a_n z^n - z - \sum\limits_2^\infty a_n z^n}{z + \sum\limits_2^\infty a_n z^n}\right| = \left|\frac{\sum\limits_2^\infty (n-1) a_n z^n}{z + \sum\limits_2^\infty a_n z^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sum\limits_2^\infty (n-1) a_n z^{n-1}}{1 + \sum\limits_2^\infty a_n z^{n-1}}\right| \leqslant \frac{\sum\limits_2^\infty (n-1) |a_n|\, |z|^{n-1}}{1 + \sum\limits_2^\infty |a_n|\, |z|^{n-1}} \leqslant \frac{\sum\limits_2^\infty (n-1) |a_n|}{1 - \sum\limits_2^\infty |a_n|} \leqslant 1,$$

ce qui resulte de l'inégalité $\sum\limits_2^\infty (n-1) |a_n| \leqslant 1 - \sum\limits_2^\infty |a_n|$, car en vertu de la condition (2) nous avons

$$\sum_2^\infty n |a_n| = \sum_2^\infty (n-1) |a_n| + \sum_2^\infty |a_n| \leqslant 1 .$$

Comme $\left|\frac{zf'}{f}-1\right| \leqslant 1$, on a

$$R\left(\frac{zf'}{f}\right)=R\left(\frac{zf'}{f}-1+1\right)=R\left(\frac{zf'-f}{f}+1\right)\geqslant 0$$

pour $|z|\leqslant 1$. Le principe de l'extremum pour les fonctions harmoniques montre que $R\left(\frac{zf'}{f}\right)>0$ dans le cercle $|z|<1$, ce qui établit le théorème 3.

Théorème 5. *Toute fonction $f(z)\in\Phi$ représente le cercle $|z|\leqslant 1/2$ sur un domaine convexe.*

Démonstration.

$$\left|\frac{zf''}{f'}\right|=\left|\frac{z\cdot\sum\limits_{2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}}{1+\sum\limits_{2}^{\infty} na_n z^{n-1}}\right|\leqslant\frac{|z|\sum\limits_{2}^{\infty} n(n-1)|a_n|\,|z|^{n-2}}{1-\sum\limits_{2}^{\infty} n\,|a_n|\,|z|^{n-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|z|\sum\limits_{2}^{\infty} n\,|a_n|}{1-|z|\sum\limits_{2}^{\infty} n\,|a_n|\,|z|^{n-2}},$$

car on a $(n-1)\;|z|^{n-2}\leqslant 1$ pour $|z|\leqslant 1/2$ et $n\geqslant 2$, étant donné que $n-1\leqslant 2^{n-2}$.

Nous avons donc

$$\left|\frac{zf''}{f'}\right|\leqslant\frac{|z|\sum\limits_{2}^{\infty} n\,|a_n|}{1-|z|\sum\limits_{2}^{\infty} n\,|a_n|\,|z|^{n-2}}\leqslant\frac{|z|}{1-|z|\sum\limits_{2}^{\infty} n\,|a_n|}\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\leqslant 1$$

Puisque $\left|\frac{zf''}{f'}\right|\leqslant 1$ dans $|z|<\frac{1}{2}$, on a $R\left(\frac{zf''}{f'}+1\right)\geqslant 0$ pour $|z|<\frac{1}{2}$, enfin, en appliquant le principe de l'extremum pour les fonctions harmoniques, nous obtenons

$$R\left(\frac{zf''}{f'}+1\right)>0 \quad \text{pour} \quad |z|<\frac{1}{2},$$

ce qui établit le théorème 5.

§ 3. J. Krzyż a démontré un théorème relatif à la classes, plus étendue que celle de Schild, des fonctions de la forme $f(z)=z-\sum\limits_{n=2} a_n z^n$. Ce théorème, dont je donne ici la démonstration, n'a pas été énoncé dans le travail de Schild, même pour les fonctions $f_p(z)\in S_p$.

Théorème Si la fonction $f(z) = z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \dots,\ 0 < |z| < r < 1$, satisfait aux conditions $a_n \geqslant 0$, $\sum_{n=2}^{\infty} n a_n \leqslant 1$, alors

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{1-r}.$$

Démonstration. Posons $f'(z) = \varphi(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_n z^n - \dots$, où $\alpha_n = n a_n$. Nous avons $\sum_{n=2} \alpha_n \leqslant 1$, $\alpha_n \geqslant 0\ (n = 2, 3, \dots)$. Il s'agit de prouver que $\left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right| < \frac{1}{1-r}$ ou $|\varphi'(z)| < \frac{|\varphi(z)|}{1-r}$.

Puisque $\min\limits_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)| = 1 - \alpha_1 r - \alpha_2 r^2 - \dots - \alpha_n r^n - \dots$ il suffit de montrer que

$$\max_{|z| \leqslant r} |\varphi'(z)| = \alpha_1 + 2\alpha_2 r + \dots + n \alpha_n r^{n-1} + \dots < \frac{\min\limits_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)|}{1-r} =$$

$$= \frac{1}{1-r}(1 - \alpha_1 r - \alpha_2 r^2 - \dots - \alpha_n r^n - \dots).$$

En effet

$$\max_{|z| \leqslant r} |\varphi'(z)| = \alpha_1 + 2\alpha_2 r + 3\alpha_3 r^2 + \dots + n \alpha_n r^{n-1} + \dots = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \dots) +$$

$$+ r(\alpha_2 + \alpha_3 r + \dots) + r^2(\alpha_3 + \alpha_4 r + \dots) + \dots < 1 + r(1 - \alpha_1) +$$

$$+ r^2(1 - \alpha_1 - \alpha_2) + \dots + r^n(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n) + \dots$$

En même temps nous avons:

$$\frac{\min\limits_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)|}{1-r} = (1 + r + r^2 + \dots)(1 - \alpha_1 r - \alpha_2 r^2 - \dots) = 1 + r(1 - \alpha_1) +$$

$$+ r^2(1 - \alpha_1 - \alpha_2) + \dots + r^n(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n) + \dots,$$

d'où

$$\max_{|z| \leqslant r} |\varphi'(z)| < \frac{\min\limits_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)|}{1-r},$$

c. q. f. d.

L'inégalité $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{1-r}$ que nous venons d'établir prouve que $\left|\frac{zf''}{f'}\right| < \frac{r}{1-r}$. Si $\left|\frac{zf''}{f'}\right| < 1$, ce qui a certainement lieu lorsque $\frac{r}{1-r} < 1$ c'est-à-dire $r < 1/2$, alors $R\left(\frac{zf''}{f'} + 1\right) > 0$, l'image du cercle $|z| < 1/2$ est donc un domaine convexe et ainsi nous retrouvons le théorème 5 pour la classe S_p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S c h i l d A., *On a class of functions schlicht in the unit circle*. Proc. of the Amer. Math. Soc. 5 Nr 1 (1953), p. 115—120.

S t r e s z c z e n i e

Niech S_p oznacza klasę funkcji jednolistnych w kole $|z| < 1$ i niejednolistnych w kole większym. A. S c h i l d [1] badał wielomiany kształtu $f_p(z) = z - \sum_2^N a_n z^n$, $N \geqslant 2$, $a \geqslant 0$ $(n = 2, ..., N)$ i wykazał, że warunkiem koniecznym i dostatecznym przynależności każdego wielomianu $f_p(z)$ do klasy S_p jest równość

$$1 - \sum_2^N n a_n = 0 \tag{1}$$

Korzystając z warunku (1) S c h i l d udowodnił 9 twierdzeń dotyczących m. i. oszacowania modułów i promienia wypukłości funkcji klasy S_p.

W pracy tej wykazuję, że twierdzenia 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 pracy A. S c h i l d a są prawdziwe w zakresie obszerniejszej klasy Φ funkcji kształtu $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$, gdzie a_n są dowolnymi liczbami zespolonymi speniającymi warunek

$$1 - \sum_2^\infty n |a_n| \geqslant 0 . \tag{2}$$

Podaję szczegółowy dowód tylko twierdzeń 3 i 5, gdyż dowody innych twierdzeń są identyczne z tymiż A. S c h i l d a.

Twierdzenie 2 nie jest prawdziwe dla funkcji klasy Φ; nie mogłem rozstrzygnąć, czy twierdzenie 7 jest czy nie dla tej klasy prawdziwe.

Р е з ю м е

Пусть S_p обозначает класс функций однолистных в круге $|z| < 1$ и неоднолистных в бóльшем круге. А. Шильд [1] исследовал многочлены вида

$$f_p(z) = z - \sum_2^N a_n z^n, \; N \geqslant 2, \; a_n \geqslant 0 \; (n = 2, ..., N)$$

и показал, что необходимым и достаточным условием принадлежности любового многочислена $f_p(z)$ к классу S_p является равенство

$$1 - \sum_{2}^{N} n a_n = 0 \tag{1}$$

Пользуясь условием (1) Шильд доказал 9 теорем, относящихся м.пр. к оценке модулей и радиусов выпуклости функций класса S_p.

В этой работе я показываю, что теоремы 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 труда Шильда верны в области более обширного класса Φ функций вида $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$, где a_n произвольные комплексные числа, исполняющие условие

$$1 - \sum_{2}^{\infty} n |a_n| \geqslant 0 \tag{2}$$

Я даю подробное доказательство только теорем 3 и 5, так как доказательства остальных теорем тождественны с доказательствами А. Шильда.

Теорема 2 не верна для функций класса Φ; я не мог решить, верна ли, или нет, теорема 7 для этого класса.