ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IX, 6 SECTIO A 1955

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur la caractéristique $T(f)$ des fonctions méromorphes dans un cercle

O charakterystyce $T(f)$ funkcji meromorficznych w kole

О характеристике $T(f)$ мероморфных функций

Introduction. La fonction caratéristique $T(r,f)=T(f)$ d'une fonction méromorphe $f(z)$ a été introduite par R. Nevalinna en 1925 (**[12]**, cf. aussi **[13]**). Si $f(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z|<R$, désignons par $n(r)$ le nombre des pôles de $f(z)$ qui sont contenus dans le cercle $|z|\leqslant r<R$ (chacun des pôles est compté avec son degré de multiplicité), posons $z=re^{i\Theta}$, $\overset{+}{\log} u=\log u$ si $u\geqslant 1$ et $\overset{+}{\log} u=0$ si $u\leqslant 1$, enfin

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta,$$

$$N(f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t)-n(0)}{t}\,dt+n(0)\log r,$$

$$T(f)=T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

On démontre sans peine que l'on a:

$$m(r,f,\dots f_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}m(r,f_i),$$

$$T(r,f,\dots f_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}T(r,f_i),$$

$$T(r, f_1 + \cdots + f_n) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n$$

et R. Nevanlinna a établi (loc. cit.) que, si a, b, c, d sont des constantes et

$$\varphi = \frac{af+b}{cf+d} \qquad (ad - bc \neq 0,$$

la différence des fonctions $T(\varphi)$ et $T(f)$ est bornée lorsque $r \to R$. Dans le mémoire cité, R. Nevanlinna a aussi établi un théorème important relatif à la derivée logarithmique de $f(z)$; il résulte de ce théorème que $T(f')$ ne croît pas sensiblement plus vite que $T(f)$, du moins si l'on fait abstraction de certains intervalles exceptionnels possibles (cf. le § 1 de cet article). Dans le cas particulier où $f(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas, le théorème sur la dérivée logarithmique montre aussi qu'inversement $T(f)$ ne croît pas sensiblement plus vite que $T(f')$ dans les mêmes conditions. Dans ce travail je tâche d'étendre ce dernier résultat au cas l'une fonction holomorphe pouvant avoir des zéros [1]). Les inégalités obtenues sont moins précises que celles qui résultent du théorème sur la dérivée logarithmique, en revanche on n'a pas besoin d'introduire d'intervalles exceptionnels possibles. Certains lemmes (lemmes I—III) paraissent présenter de l'intérêt en eux-mêmes. Dans la dernière partie de ce travail (§ 5), j'étudie l'allure de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left| R\left[\frac{zf'}{f}(re^{i\Theta})\right]\right| d\Theta.$$

Je remercie M. Z. Opial dont les remarques m'ont permis d'améliorer le lemme III (en y supprimant le facteur $1 + \varepsilon(r)$ au membre droit de l'inégalité) et le théorème VII (en y remplaçant $M + 2$ par $M + 1$).

§ 1. **Limite supérieure du rapport** $T(f') : T(f)$. Si $f(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < 1$, on a (cf. [13] p. 240)

$$(1) \qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = (\lambda + 1)\log\frac{1}{1-r} + O\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right) + O\,[\log T(r, f)],$$

[1]) cf. R. Nevanlinna [13], p. 229: d'après cet auteur, il est très probable que les modules d'une fonction méromorphe et de sa dérivée ne diffèrent pas beaucoup, tant qu'ils sont grands. Pour ce qui concerne le § 1 de ce travail, cf. A. Bloch [4], §§ 29—32.

où $\lambda \geqslant 0$, sauf peut-être pour des valeurs de r qui remplissent des intervalles Δ_r le long desquels la variation totale de $\lambda^{-1}(1-r)^{-\lambda}$ si $\lambda > 0$, et de $\log(1-r)^{-1}$ si $\lambda = 0$, est finie.

Posons:

$$\lim_{r\to 1} \frac{T(r,f)}{\log(1-r)^{-1}} = k, \qquad \lim_{r\to 1} \frac{T(r,f')}{\log(1-r)^{-1}} = k_1. \tag{2}$$

On sait ([13] p. 167) que $T(r,f)$ est une fonction croissante de r; si elle n'est pas bornée, on déduit de (1), en y posant $\lambda = 0$, que l'on a:

$$T(f') = T\left(f \cdot \frac{f'}{f}\right) \leqslant T(f) + T\left(\frac{f'}{f}\right) \leqslant T(f) + m\left(\frac{f'}{f}\right) + N(f) + N\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant$$
$$\leqslant [1 + \varepsilon(r)]\,[3\,T(f) + \log(1-r)^{-1}],$$

où $\varepsilon(r)$ est une fonction qui tend vers zéro lorsque $r \to 1$. Il en résulte de suite la proposition suivante:

I. Si $f(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < 1$ et si r ne parcourt pas des intervalles exceptionnels Δ_r, le long desquels la variation totale de $\log(1-r)^{-1}$ est finie, on a:

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{T(f')}{T(f)} \leqslant 3 + \frac{1}{k}, \qquad \overline{\lim_{r\to 1}} \frac{T(f')}{T(f)} \leqslant \frac{3k_1}{k_1 - 1}, \tag{3}$$

où k et K_1 ($k_1 > 1$) sont définis par les formules (2).

Supposons maintenant que $f(z)$ soit une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$. Si $T(f)$ n'est pas bornée, on aura, en posant toujours $\lambda = 0$ dans l'égalité (1):

$$T(f') = m(f') = m\left(\frac{f'}{f} \cdot f\right) \leqslant m(f) + m\left(\frac{f'}{f}\right) \leqslant [1 + \varepsilon(r)]\,[T(f) + \log(1-r)^{-1}]$$

et par suite:

II. Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et si r ne parcourt pas des intervalles Δ_r, on a:

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{T(f')}{T(f)} \leqslant 1 + \frac{1}{k}, \qquad \overline{\lim_{r\to 1}} \frac{T(f')}{T(f)} \leqslant \frac{k_1}{k_1 - 1}.$$

Il est clair que l'énoncé II subsiste dans le cas des fonctions $f(z)$ méromorphes, pourvu que l'on ait

$$\lim_{r\to 1} \frac{N(f)}{\log(1-r)^{-1}} = 0.$$

§ 2. Limite supérieure du rapport $T(f):T(f')$; première méthode. Supposons que $f(z)$ soit une fonction holomorphe qui ne s'annule pas dans le cercle $|z|<1$. Si $T(f)$ n'est pas bornée, on déduit de (1), où $\lambda=0$:

$$T(f)=T\left(f'\cdot\frac{f}{f'}\right)\leqslant T(f')+T\left(\frac{f}{f'}\right)\leqslant T(f')+m\left(\frac{f'}{f}\right)+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant[1+\varepsilon(r)]\,[\log(1-r)^{-1}+T(f')]$$

et nous obtenons l'énoncé suivant:

III. Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et ne s'annule pas dans ce cercle, et si r ne parcourt pas des intervalles Δ_r on a:

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{T(f)}{T(f')}\leqslant 1+\frac{1}{k},\qquad \overline{\lim_{r\to1}}\frac{T(f)}{T(f')}\leqslant\frac{k_1}{k_1-1}.$$

En particulier, si $k=\infty$ ou si $k_1=\infty$, on a, en tenant compte de l'énoncé II:

$$\lim_{r\to1}\frac{T(f)}{T(f')}=1$$

dans les mêmes conditions.

Il est clair que l'énoncé III subsiste dans le cas des fonctions $f(z)$ méromorphes qui peuvent s'annuler, pourvu que l'on ait:

$$\lim_{r\to1}\frac{N(f)}{\log(1-r)^{-1}}=0\quad\text{et}\quad\lim_{r\to1}\frac{N\left(\frac{1}{f}\right)}{\log(1-r)^{-1}}=0.$$

§ 3. Limite supérieure du rapport $T(f):T(f')$; deuxième méthode. Nous allons utiliser les résultats suivants:

Théorème de Hardy-Littlewood [6]: si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$, on a pour $0<r<1$:

$$\int_0^{2\pi}\max_{0\leqslant t\leqslant r}|f(te^{i\Theta})|\,d\Theta\leqslant A\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta,$$

où A est une constante numérique.

Théorème de Zygmund [18], cf. aussi Stein [17]: si $f(x)$ est holomorphe et non constante dans le cercle $|z|<1$ est si u désigne la partie réelle de $f(z)$, on a pour $0<r<1$:

$$\int_0^{2\pi}|v(re^{i\Theta})|\,d\Theta\leqslant 2\pi|v(0)|+A+B\int_0^{2\pi}|u(re^{i\Theta})|\log^+|u(re^{i\Theta})|\,d\Theta,$$

où A et B sont des constantes numériques et $f=u+iv$.

Lemme I. *Si $u(z)$ est une fonction subharmonique et non négative dans le cercle $|z|<1$, on a pour $0<r<1$:*

$$\int_0^{2\pi} \max_{0\leq t\leq r} u(te^{i\Theta})\,d\Theta \leq [C\log(1-r)^{-1}+D]\cdot\int_0^{2\pi} u(re^{i\Theta})\,d\Theta,$$

où C et D sont des constantes numériques [2]).

Supposons maintenant que $f(z)$ soit une fonction quelconque holomorphe dans le cercle $|z|<1$. En appliquant le lemme I à la fonction subharmonique et non négative $\overset{+}{\log}|f'(z)|$ on obtient l'inégalité:

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\int_0^r f'(te^{i\Theta})\,dt\right|d\Theta \leq \int_0^{2\pi} \max_{0\leq t\leq r} \overset{+}{\log}|f'(te^{i\Theta})|\,d\Theta \leq$$

$$\leq |C\log(1-r)^{-1}+D|\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f'(re^{i\Theta})|\,d\Theta$$

c'est-à-dire l'inégalité

$$\log T(f) < \log T(f') + \log_2(1-r)^{-1} + \log C_1, \text{ [3])}$$

où $\log_2 x = \log\log x$; il en résulte de suite l'énoncé suivant:

IV. Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et si l'une au moins des deux égalités

$$\lim_{r\to 1} \frac{\log T(f)}{\log_2(1-r)^{-1}} = \infty, \quad \lim_{r\to 1} \frac{\log T(f')}{\log_2(1-r)^{-1}} = \infty$$

a lieu, on a:

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\log T(f)}{\log T(f')} \leq 1.$$

Nous allons maintenant obtenir, dans certains cas particuliers, des résultats plus précis que l'énoncé IV. Supposons que $f'(z)$ ne s'annule pas dans le cercle $|z|<1$. En appliquant le théorème de H a r d y - L i t t l e w o o d à la fonction $\log f'(z)$ nous obtenons successivement:

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\int_0^t f'(te^{i\Theta})\,dt\right|d\Theta \leq \int_0^{2\pi} \max_{0\leq t\leq r} \overset{+}{\log}|f'(te^{i\Theta})|\,d\Theta \leq \int_0^{2\pi} \max_{0\leq t\leq r} |\log f'(te^{i\Theta})|\,d\Theta \leq$$

$$\leq A\int_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\Theta})|\,d\Theta \leq 2A\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f'(re^{i\Theta})|\,d\Theta + A\int_0^{2\pi} |\arg f'(re^{i\Theta})|\,d\Theta + C_2,$$

et par suite:

---

[2]) Ce lemme est démontré dans mon travail [2].

[3]) C_1 désigne une constante.

V. Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$, si $f'(z)$ ne s'annule pas dans ce cercle et si le rapport

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi} |\arg f'(re^{i\Theta})|\, d\Theta}{T(f')}$$

est borné lorsque $r \to 1$, alors il en est de même du rapport $T(f) : T(f')$.

Remarque. En appliquant le théorème de Zygmund à la fonction $\log f'(z)$ on voit que l'on a:

$$\int\limits_0^{2\pi} |\arg f'(re^{i\Theta})| d\Theta \leqslant 2\pi |\arg f'(0)| + A + B + \int\limits_0^{2\pi} \overset{+}{|\log |f' re^{i\Theta})|} \log |\log |f'(re^{i\Theta})|| \, d\Theta.$$

Nous allons maintenant établir un résultat analogue aux précédents, mais relatif aux moyennes d'ordre q $(q>0)$ des fonctions $f(z)$ et $f'(z)$. Supposons que $f'(z)$ soit holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et qu'elle n'y posède qu'un nombre fini de zéros: $x_1, x_2, \ldots x_n$. Posons

$$\pi(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z - x_i}{1 - \bar{x}_i z}.$$

On sait que $|\pi(z)| < 1$ si $|z|<1$ et que $|\pi(z)| = 1$ si $|z| = 1$. La fonction $f'(z) : \pi(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans le cercle $|z|<1$. En appliquant le théorème de Hardy-Littlewood à une branche holomorphe de la fonction $[f'(z) : \pi(z)]^2$ et en utilisant l'inégalité $(a+b)^q \leqslant C(q)(a^q + b^q)$, où $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $C(q) = \mathrm{Max}(2^{q-1}, 1)$ on obtient successivement:

$$\int\limits_0^{2\pi} |f re^{i\Theta})|^q d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} \Big| f(0) + \int\limits_0^{re^{i\Theta}} f'(z)\, dz \Big|^q d\Theta \leqslant C(q) \Bigg[2\pi |f(0)|^q +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} \underset{0 \leqslant t \leqslant r}{\mathrm{Max}} \left| \frac{f'(te^{i\Theta})}{\pi(te^{i\Theta})} \right|^q d\Theta \Bigg] \leqslant C(q) \Bigg[2\pi |f(0)|^2 + A \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{f' re^{i\Theta})}{\pi(re^{i\Theta})} \right|^q d\Theta \Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant C(q) \Bigg[2\pi |f(0)|^q + A\, |1 + \varepsilon(r)| \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|^q d\Theta \Bigg],$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque $r \to 1$. On peut donc énoncer le résultat suivant:

VI. Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et si $f'(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans ce cercle on a pour tout $q>0$ et pour $r_0(f) < r < 1$

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^q \, d\Theta\right]^{1/q} \leqslant C(q,f)\left[|f(0)|^q + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f' re^{i\Theta})|^q \, d\Theta\right]^{1/q},$$

où $C(q, f)$ est une constante qui ne dépend que de q et de $f(z)$.

Corollaire. *Si $f'(z)$ est holomorphe et n'a qu'un nombre fini de zéros dans le cercle $|z|<1$ et si l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|^q \, d\Theta \qquad (q>0)$$

est bornée lorsque $r \to 1$, il en est de même de $T(f)$ [4]).

Remarquons d'abord que $T(f')$ est aussi bornée; on sait, en effet ([8], deuxième partie, p. 98—100, [15], II. Abschn. Aufg. 83, [7] p. 137—138), que la moyenne géométrique, qui est la limite des moyennes d'ordre q lorsque $q \to 0$, est plus petite ou égale à ces moyennes, c'est-à-dire que l'on a

$$e^{T(f')} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f'(re^{i\Theta})| \, d\Theta} \leqslant \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\Theta})|^q \, d\Theta\right]^{1/q},$$

où l'on a posé $F(z) = |f'(z)|$ si $|f'(z)| > 1$ et $F(z) = 1$ si $|f'(z)| \leqslant 1$, $z = re^{i\Theta}$. Or, le second membre de la dernière inégalité est évidemment borné, en vertu de nos hypothèses, il en est donc de même de $T(f')$. Le même raisonnement prouve, en tenant compte de l'énoncé VI, que $T(f)$ est bornée.

§ 4. **Limite supérieure du rapport** $T(f) : T(f')$; **troisième méthode.** Commençons par établir ou énoncer quelques théorèmes et lemmes dont nous aurons besoin dans la suite.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et supposons que $f(z) = z^\lambda \varphi(z)$ où λ est un entier $\geqslant 0$ et $\varphi(0) \neq 0$. La formule de Jensen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{f(re^{i\Theta})}\right| d\Theta = \log r^{-\lambda} + \log\left|\frac{1}{\varphi(0)}\right| - \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

où $n(t)$ désigne le nombre de zéros d $\varphi(z)$ dans le cercle $|z| \leqslant t$, montre que le premier membre de l'égalité ci-dessus est borné supérieurement lorsque $r \to 1$ .On peut compléter cette remarque de la manière suivante:

[4]) On suppose que $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$.

Lemme II. *Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et désignons par $u_\varphi(z)$ la partie réelle de $e^{-i\varphi}f(z)$. L'expression*

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{u_\varphi(re^{i\Theta})}\right| d\Theta$$

est bornée supérieurement lorsque $r\to 1$.

(Ce lemme exprime que le logarithme de l'inverse de la valeur absolue de la projection d'un point de l'image de la circonférence $|z|=r$ par la fonction $f(z)$ sur une droite variable qui passe par l'origine est borné supérieurement en moyenne). Pour établir le lemme, il suffit de remarquer que si $\arg f(z)=\Phi$, on a $u_\varphi=|f(z)|\cos(\Phi-\varphi)$ et par suite:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{u_\varphi(re^{i\Theta})}\right| d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{f(re^{i\Theta})}\right| d\Theta + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\Theta\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{\cos(\Phi-\varphi)}\right| d\varphi .$$

Or, nous venons de voir que la première intégrale est bornée supérieurement, la dernière a une valeur fixe qui ne dépend pas de Φ.

Lemme III. *Considérons une fonction $w=f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et désignons par $i(r,\varphi)$ le nombre des points d'intersection de l'image de la circonférence $|z|=r$ $(0<r<1)$ par la fonction $f(z)$ avec la droite qui passe par l'origine du plan w et qui fait l'angle φ avec l'axe réel. Si $\varrho=\varrho(r)$ est un nombre quelconque tel que $r<\varrho<1$, on a:*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} i(r,\varphi)\,d\varphi < \frac{4T\left(\frac{r}{\varrho},f\right)+C(f)}{1-\varrho},$$

où $C(f)$ est une constante qui dépend de $f(z)$.

Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, considérons la fonction

$$F(u)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n u^n + \bar{a}_n r^n u^{-n},$$

où la barre désigne la quantité conjuguée. La fonction $F(u)$ est holomorphe dans la couronne $r<|u|<r^{-1}$; si $z=re^{i\psi}$ la partie réelle de $f(z)$ est égale à $\frac{1}{2}F(e^{i\psi})$, il en résulte que le nombre $i(r,\pi/2)$ des points d'intersection de l'image de la circonférence $|z|=r$ par la fonction $w=f(z)$ avec l'axe

imaginaire du plan w est identique au nombre $n(1)$ des zéros de $F(u)$ situés sur la circonférence $|u|=1$. Désignons généralement par $n(t)$ le nombre des zéros de $F(u)$ situés dans la couronne $t<|u|<t^{-1}$, où $r<t<1$. Si $\arg u=\Theta$ et si Γ et Γ' désignent les circonférences $|u|=t$ et $|u|=t^{-1}$ respectivement, on a:

$$2\pi n(t)=\int\limits_{\Gamma'}\frac{\partial \arg F}{\partial\Theta}d\Theta-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\arg F}{\partial\Theta}d\Theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{t}\,\frac{\partial\log|F(t^{-1}e^{i\Theta})|}{\partial|u|}-t\,\frac{\partial\log|F(te^{i\Theta})|}{\partial|u|}\right]d\Theta.$$

Si $r<\varrho<1$ on aura donc:

$$2\pi\int\limits_\varrho^1 n(t)\,dt=\int\limits_0^{2\pi}d\Theta\int\limits_\varrho^1\left[\frac{1}{t}\,\frac{\partial\log|F(t^{-1}e^{i\Theta})|}{\partial t^{-1}}-t\,\frac{\partial\log|F(te^{i\Theta})|}{\partial t}\right]dt.$$

Intégrons par parties par rapport à t et t^{-1}; en tenant compte de ce que $F(t^{-1}e^{i\Theta})=\overline{F(te^{i\Theta})}$ il vient [5]):

$$(4)\quad 2\pi\int\limits_\varrho^1 n(t)\,dt=2\int\limits_0^{2\pi}d\Theta\int\limits_\varrho^1\log|F(te^{i\Theta})|\,dt+2\varrho\int\limits_0^{2\pi}\log|F(\varrho e^{i\Theta})|\,d\Theta-$$

$$-2\int\limits_0^{2\pi}\log|F(e^{i\Theta})|\,d\Theta.$$

Or $\log|F(z)|\leqslant\overset{+}{\log}|F(z)|$, $\overset{+}{\log}|f_1(z)+f_2(z)|\leqslant\overset{+}{\log}|f_1(z)|+\overset{+}{\log}|f_2(z)|+$ $+\log 2$ et $T(r,f)$ est une fonction croissante de r, on a donc pour $\varrho\leqslant t\leqslant 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|F(te^{i\Theta})|\,d\Theta\leqslant 2\,T\left(\frac{r}{\varrho},f\right)+\log 2;$$

d'ailleurs on a $i(r,\pi/2)=n(1)\leqslant n(t)$ et $F(e^{i\Theta})=2u_0(re^{i\Theta})$, donc l'égalité (4) fournit l'inégalité:

$$(1-\varrho)\,i\left(r,\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 2\left[2\,T\left(\frac{r}{\varrho},f\right)+\log 2\right]+2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{u_0(re^{i\Theta})}\right|d\Theta;$$

[5]) Plus précisément, si $t_1, t_2, \ldots t_i, \ldots$ sont des valeurs de t pour lesquelles $F(u)$ possède des zéros sur une des circonférences $|u|=t_i$ ou $|u|=t_i^{-1}$ il faut intégrer entre les limites t_i et t_{i+1} et ajouter les résultats. Finalement, on obtient bien la formule (4).

φ étant un nombre réel quelconque, on peut remplacer dans tout ce qui précède $f(z)$ par $e^{-i\varphi}f(z)$, l'inégalité obtenue subsiste à condition que l'on y remplace $i(r,\pi/2)$ par $i(r,\pi/2+\varphi)$ et u_0 par u_φ. En intégrant l'inégalité obtenue par rapport à φ, entre les limites 0 et 2π, et en tenant compte du lemme II et de ce que $(1-\varrho)$ tend vers zéro lorsque $r\to 1$, on obtient bien le lemme III.

Théorème de H. Cartan [6]). Considérons une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z|<R$. Désignons par $n(r,a)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)-a=0$ qui sont contenues dans le cercle $|z|<r$ ($r<R$, chacune des racines étant comptée avec son degré de multiplicité). Posons:

$$N(r,a)=\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\,dt+n(0,a)\log r,$$

alors on a:

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\psi})\,d\psi+\log|f(0)|.$$

Lemme IV. *Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et telle que la caractéristique $T(f')$ ne soit pas bornée. Si $\varrho(r)$ est une fonction continue définie dans l'intervalle $r_0<r<1$ et telle que $r<\varrho(r)<1$ alors, à tout nombre positif ε arbitrairement petit correspondent des constantes C et α $(0\leqslant\alpha<1)$, qui dépendent aussi de $f(z)$, telles que l'on a:*

$$T(r,f)\leqslant C+(2+\varepsilon)\int_\alpha^r \frac{T\left(\frac{r}{\varrho},f'\right)}{1-\varrho}\,dr.$$

Nous partirons de la remarque suivante: considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|\leqslant r$, qui prend une valeur a n fois (en tenant compte de la multiplicité) dans le cercle $|z|<r$ et ne prend pas cette valeur sur la circonférence $|z|=r$; supposons d'ailleurs que $f'(z)$ ne s'annule pas sur cette circonférence. Lorsque z décrit la circonférence $|z|=r$ dans le sens direct, le point d'affixe $f(z)$ tourne n fois autour du point a, il en résulte que la tangente à la courbe décrite par $f(z)$ est parallèle à une droite donnée quelconque en $2n$ points au moins: en d'autres termes, φ étant un nombre réel arbitraire, le nombre des points d'inter-

[6]) [5], cf. aussi [13], p. 167—169. Le théorème de H. Cartan a été généralisé d'une manière remarquable par R. Nevanlinna et O. Frostman; cf. [13], p. 169—173.

section de l'image de $|z| = r$ par la fonction $zf'(z)$ avec la droite qui passe par l'origine et fait l'angle φ avec l'axe réel, est au moins $2n$.

Supposons pour simplifier que $|f(0)| \neq 1$, alors $n(0, e^{i\psi}) = 0$; la remarque qui vient d'être faite et l'égalité du théorème de H. Carten conduisent à l'inégalité:

$$T(r, f) \leq \overset{+}{\log} |f(0)| + \frac{1}{2} \int_{\beta}^{r} \frac{i(r, \varphi)}{r} dr,$$

où φ est un nombre réel arbitraire, β un nombre de l'intervalle $0 \leqslant \beta < 1$ qui dépend de $f(z)$, et $i(r, \varphi)$ satisfait à la définition du lemme III, dans lequel on a cependant remplacé $f(z)$ par $zf'(z)$. On peut évidemment remplacer dans la dernière inégalité $i(r, \varphi)$ par

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} i(r, \varphi) \, d\varphi,$$

en utilisant alors le lemme III et le fait que $T(zf') \leqslant T(f)$, on obtient l'inégalité:

$$T(r, f) \leq \overset{+}{\log} |f(0)| + 2 \int_{\beta}^{r} \frac{T\left(\dfrac{r}{\varrho}, f'\right) + C}{r(1-\varrho)} dr,$$

où $C = C(f)$ est définie comme dans le lemme III. Or, nous avons supposé que $T(r, f')$ augmente indéfiniment lorsque $r \to 1$, d'autre part le rapport $r : \varrho(r)$ tend alors vers 1, l'inégalité obtenue fournit donc immédiatement le lemme IV. Nous avons supposé que $|f(0)| \neq 1$; si l'on a $|f(0)| = 1$, on peut appliquer le lemme IV à la fonction $2f(z)$, par exemple, et l'on obtient ainsi encore ce lemme.

En choisissant maintenant des fonctions $\varrho(r)$ particulières nous allons obtenir dans quelques cas une limite supérieure du rapport $T(f) : T(f')$. On sait ([13], p. 167) que $T(r, f)$ est une fonction convexe de $\log r$. Il en résulte que $T(r, f)$ possède une dérivée par rapport à r, sauf au plus en une infinité dénombrable de points; en ces derniers points, $T(r, f)$ possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Cette dérivée est non décroissante; il en résulte, en vertu d'un théorème classique de H. Lebesgue, que $T(r, f)$ possède presque partout une dérivée seconde. Or, on peut supposer, grâce à une légère modification de la définition de $T(r, f)$. que les dérivées $T'(r, f)$ et $T''(r, f)$ existent pour toutes les valeurs de r [7]. Posons, en effet (cf. l'introduction):

[7]) La possibilité de cette modification a été entrevue par A. Bloch [4]. La théorie a été édifiée par L. Ahlfors [1] et T. Shimizu [16].

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\Theta})|^2}\,d\Theta-\log\sqrt{1+|f(0)|^2}+N(r,f)$$

(si $z=0$ est un pôle et si $f(z)=c_n z^{-n}+\ldots$, on remplace $\log\sqrt{1+|f(0)|^2}$ par $\log|c_n|$). On démontre ([13], p. 165) que la fonction $T(r,f)$ ainsi définie (on dit que c'est „la forme sphérique de la caractéristique") ne diffère de la fonction $T(r,f)$ définie auparavant que par une quantité qui reste bornée lorsque $r\to 1$. On démontre aussi ([13], p. 163—164) que $A(r,f)=rT'(r,f)$ est égale à la projection stéréographique sur la sphère de Riemann[8]) de la surface de Riemann qui est l'image du cercle $|z|\leqslant r$ par la fonction $w=f(z)$. Il en résulte que l'on a:

$$T'(r,f)=\frac{1}{\pi r}\int_0^r r\,dr\int_0^{2\pi}\frac{|f'(re^{i\Theta})|^2}{[1+|f(re^{i\Theta})|^2]^2}\,d\Theta.$$

Nous allons démontrer la proposition suivante:

VII. Supposons que $f(z)$ soit holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et que l'on ait:

(5) $$\varliminf_{r\to 1}\frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')}=m>0,$$

(6) $$\varlimsup_{r\to 1}\frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')}=M<\infty.$$

Dans ces conditions on a:

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{T(r,f)}{T(r,f')}<\frac{2e(M+1)}{m}.$$

(Il est clair que, dans l'énoncé VII et le lemme IV, la caractéristique peut être soit de la forme sphérique, soit définie comme dans l'introduction).

Posons dans le lemme IV $\varrho(r)=r^s$ $(0<s<1)$ et $u=r\varrho^{-1}$. En remplaçant dans ce lemme la variable d'intégration r par u et en tenant compte de la condition (5) on constate que l'intégrale, où l'on a remplacé la constante a par a_1, est plus petite que

$$\frac{1+\varepsilon}{m(1-s)}\int_{a_1}^{r^{1-s}}\frac{1-u}{1-u^{\frac{s}{1-s}}}\,T'(u,f')\,du,$$

[8]) C'est la sphère dont le diamètre est 1 et qui touche le plan des w à l'origine.

où ε est un nombre positif arbitrairement petit. Or, si $u \to 1$, on a:

$$\frac{1-u}{1-u^{\frac{s}{1-s}}} \to \frac{1-s}{s},$$

donc l'intégrale en question (dans laquelle on a encore modifié, s'il y a lieu, la limite inférieure de l'intégration) est plus petite que

$$(7) \qquad \frac{(1+\varepsilon)\,T(r^{1-s}, f')}{ms}.$$

En tenant maintenant compte de ce que $rT'(r, f') : T(r, f')$ est une fonction croissante et du fait que l'on a:

$$\lim_{r\to 1} \frac{r^{1-s}-r}{r^{1-s}(1-r^{1-s})} = \frac{s}{1-s}$$

enfin, en appliquant à la différence $\log T(r^{1-s}, f') - \log T(r, f')$ la formule des accroissements finis on obtient, en vertu de (6), l'inégalité:

$$T(r^{1-s}, f') < e^{\frac{s}{1-s}M+\varepsilon}\, T(r, f'),$$

qui permet d'affirmer, en tennant compte de (7) et du lemme IV que

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{T(r, f)}{T(r, f')} \leqslant \frac{2e^{\frac{s}{1-s}M}}{ms}.$$

En posant $s = 1/(M+1)$ on obtient l'énoncé VII.

Nous supposerons maintenant que $T(r, f')$ est de la forme sphérique et qu'elle n'est pas bornée. Posons encore $r\varrho^{-1} = u$ et $W(u) = uT'(u) : T(u)$[9]. Nous définirons la fonction $\varrho(r)$ du lemme IV par la relation:

$$\frac{1}{1-\varrho} = W\left(\frac{r}{\varrho}\right).$$

Comme $W(u)$ est croissante et croit indéfiniment lorsque $u \to 1$, la dernière équation a exactement une racine $\varrho(r)$ dans l'intérvalle $r < \varrho < 1$ On a d'ailleurs

$$\frac{dr}{du} = 1 - \frac{1}{W(u)} + \frac{uW'(u)}{[W(u)]^2},$$

[9]) Nous écrivons pour abréger $T(u)$ au lieu de $T(u, f')$, etc.

donc on peut supposer que u croît avec r. En remplaçant dans l'intégrale du lemme IV $1-\varrho$ par $W^{-1}(u)$ et en introduisant u comme variable d'intégration, on obtient une intégrale de la forme:

$$\int_{\beta}^{u_\varrho} u\,T'(u)\left[1-\frac{1}{W(u)}+\frac{u\,W'(u)}{|W(u)|^2}\right]du.$$

Or, on trouve que

$$(*)\qquad \frac{u\,W'(u)}{W^2(u)}=\frac{T(u)\,T''(u)}{T'^2(u)}-1+\frac{1}{W(u)},$$

si donc

$$\overline{\lim_{u\to 1}}\,\frac{T(u)\,T''(u)}{T'^2(u)}=M$$

et si la limite inférieure de l'intégrale est convenablement choisie, cette intégrale est inférieure à $(M+\varepsilon)\,T(u)$, où ε est arbitrairement petit. D'autre part, on trouve que

$$\log T(u)-\log T(r)=\frac{u-r}{\Theta}\,W(\Theta)<\frac{u-r}{r}\,W(u)=\frac{u-r}{r(1-\varrho)}=\frac{u}{r}\quad (r<\Theta<u),$$

c'est-à-dire que $T(u):T(r)<e^{1+\varepsilon}$, si r est assez voisin de 1. En tenant compte du lemme IV nous obtenons donc le résultat suivant:

VIII. Si $f(z)$ est holomorphe dans cercle $|z|<1$, si la caractéristique $T(r,f')$, de la forme sphérique, n'est pas bornée dans ce cercle et si l'on a

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{T(r,f')\,T''(r,f')}{[T'(r,f')]^2}=M,\qquad \textit{alors}\qquad \overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\leqq 2\,e\,M.$$

Remarque I. Des considérations géométriques montrent immédiatement, que si l'on a $\lim\limits_{r\to 1}(1-r)\,W(r)=\infty$, on a aussi $\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{d}{dr}[1:W(r)]=0$; en tenant compte de l'égalité (*) on voit donc que *si l'on a*

$$\lim_{r\to 1}\frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')}=\infty,\qquad \textit{alors}\qquad \underline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{T(r,f')\,T''(r,f')}{[T'(r,f')]^2}=1.$$

Remarque II. Il résulte de la remarque précédente que si *$T(r,f')$ croit assez rapidement et assez régulièrement, le nombre M de l'énoncé VIII est fini et, par suite, cet énoncé s'applique.*

§ **5. La moyenne de la dérivée logarithmique.** Supposons que $f(z)$ soit holomorphe dans le cercle $|z|<1$. Puisque

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \Theta}=R\left|\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right|\qquad (z=re^{i\Theta}),$$

on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|d\Theta=\frac{1}{2\pi}\int_C|d\arg f(z)|=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}i(r,\varphi)\,d\varphi,$$

où C est la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la circonférence $|z|=r$ et $i(r,\varphi)$ est le nombre défini dans le lemme III. En appliquant ce lemme on trouve donc l'énoncé suivant:

IX. Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et si $\varrho=\varrho(r)$ est un nombre tel que $r<\varrho<1$, on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|d\Theta<\frac{4\,|1+\varepsilon(r)|\,T\left(\frac{r}{\varrho},f\right)+C(f)}{1-\varrho},$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque $r\to1$ et $C(f)$ est une constante qui dépend de $f(z)$.

Si $\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|\leqslant R$ et si u désigne la partie réelle de $f(z)$, on a l'inégalité [11]):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\Theta})|\,d\Theta<|\varphi(0)|+$$

$$+\left(1+2\log\frac{R}{R-r}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(Re^{i\Theta})|\,d\Theta,\quad(r<R).$$

En posant dans cette inégalité $R=\sqrt{r}$ et $\varphi(z)=zf'(z):f(z)$ et en tenant compte de l'énoncé IX on trouve le suivant:

X. Si $f(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans le cercle $|z|<1$ et si $\varrho=\varrho(r)$ est un nombre tel que $\sqrt{r}<\varrho<1$, on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|d\Theta<\frac{\left(1+2\log\frac{1}{1-\sqrt{r}}\right)\left\{4\,|1+\varepsilon(r)|\,T\left(\frac{\sqrt{r}}{\varrho},f\right)+C(f)\right\}}{1-\varrho}$$

$$(z=re^{i\Theta}),$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque $r\to1$ et C est une constante qui dépend de $f(z)$.

---

[11]) Cette inégalité résulte aisément de la formule connue qui exprime $\varphi(z)$ en fonction des valeurs de $u(z)$ pour $|z|=R$; on trouve une démonstration de cette formule p. ex. chez Pólya-Szegö [15], III. Abschn. Aufg. 231.

Dans le cas particulier où $T(r, f)$ est bornée on peut améliorer l'énoncé X de la manière suivante:

XI. Si $f(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans le cercle $|z|<1$ et si l'on a $\lim\limits_{r\to 1} T(r, f) = M$, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\Theta})}{f(re^{i\Theta})}\right| d\Theta \leqslant \frac{2}{1-r^2}\,|2M - \log|f(0)||.$$

Puisque $T(r, f)$ est bornée, on peut écrire $f(z) = g(z) : h(z)$, où $g(z)$ et $h(z)$ sont des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas dans le cercle $|z|<1$ et telles que $|g(z)|\leqslant 1$, $|h(z)|\leqslant 1$ (cf. [3], p. 174—175). Or on a l'inégalité (L i n d e l ö f [10], cf. aussi [8], p. 83):

$$\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \leqslant \frac{2}{1-r^2}\log\left|\frac{1}{g(z)}\right|, \quad (|z| = r),$$

il en résulte

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{g'(re^{i\Theta})}{g(re^{i\Theta})}\right| d\Theta \leqslant \frac{2}{1-r^2}\log\frac{1}{|g(0)|}.$$

Comme on peut remplacer dans la dernière inégalité $g(z)$ par $h(z)$, on trouve que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\Theta})}{f(re^{i\Theta})}\right| d\Theta \leqslant \frac{2}{1-r^2}\log\frac{1}{|g(0)\,h(0)|}.$$

Or on sait ([13], p. 174—177) que $\log|g(0)| = -\lim\limits_{r\to 1} T(r, f^{-1})$ et que $\log|h(0)| = -\lim\limits_{r\to 1} T(r, f) = M$. En tenant compte de l'égalité

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|$$

([13], p. 162), on obtient bien l'énoncé XI. L'exemple de la fonction $f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$, pour laquelle $M = 0$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\Theta})}{f(re^{i\Theta})}\right| d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\,d\Theta}{|1-re^{i\Theta}|^2} = \frac{2}{1-r^2},$$

montre que l'énoncé XI ne peut être amélioré, sauf peut-être pour ce qui concerne la valeur de la constante entre parenthèses.

XII. Considérons un produit de Blachke [13]:

$$\pi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|-ze^{-i\alpha_n}}{1-\bar{a}_n z}\ (0<|a_n|<1,\ a_n=|a_n|e^{i\alpha_n},\ \textit{la série}\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$$

converge); on a

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{z\pi'(z)}{\pi(z)}\right]\right|d\Theta=0\quad (z=re^{i\Theta}).$$

Posons $|a_n|=r_n$,

$$\pi_n(z)=\frac{r_n-ze^{-i\alpha_n}}{1-\bar{a}_n z}$$

et $\arg \pi_n(z)=\Phi_n$. L'intégrale de l'énoncé ne dépasse évidemment pas la somme

$$\text{(8)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{z\pi_n'(z)}{\pi_n(z)}\right]\right|d\Theta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z|=r}|d\,\Phi_n|.$$

Or, on a $|\Phi_n|\leqq\pi$ et, d'autre part, des considérations géométriques élémentaires montrent que si $z=re^{i\Theta}$, si Θ varie de 0 à 2π et $r_n\leqq r$, alors Φ_n est une fonction monotone, tandis que si $r_n>r$ on a $\Phi_n(0)=\Phi_n(2\pi)=0$ et le sens de variation de Φ_n change deux fois. On a donc dans tous les cas:

$$\int_{|z|=r}|d\,\Phi_n|<4\pi.$$

Remarquons maintenant que la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(1-r_n)$ a ses termes décroissants, on a donc $\lim_{m\to\infty}m(1-r_m)=0$ et par suite $m(1-r_m)<\varepsilon/2$, si ε est un nombre positif arbitrairement petit et m assez grand. Si l'on définit l'entier m par la relation:

$$r_m\leqq\frac{1+r}{2}<r_{m+1},$$

on aura donc, a fortiori, $m<\varepsilon/(1-r)$ pourvu que r soit assez voisin de 1. Nous allons maintenant diviser la somme (8) en deux parties. On a tout d'abord, d'après ce qui précède:

$$\text{(9)}\qquad \sum_{n=1}^{m}\int_{|z|=r}|d\,\Phi_n|<\frac{4\pi\varepsilon}{1-r}$$

Pour majorer la série $\sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{|z|=r} |d\Phi_n|$ il suffira, nous l'avons vu, de trouver les bornes supérieures des $|\Phi_n|$; or, la borne supérieure de $|\Phi_n|$ est égale au maximum de l'angle sous lequel on voit le segment (r_n, r_n^{-1}) d'un point de la circonférence $|z| = r$. Or, ce maximum est évidemment plus petit que le maximum de la tangente de l'angle sous lequel on voit le segment en question d'un point de la droite $R(z) = r$. Soit y l'ordonnée d'un point quelconque de cette droite, la tangente de l'angle en question sera:

$$\frac{y(1-r_n^2)}{(r_n - r)(1 - r_n r) + r_n y^2},$$

expression dont la plus grande valeur, lorsque y varie, est égale à

$$\frac{1-r_n^2}{2\sqrt{r_n}\sqrt{(r_n - r)(1 - r_n r)}}.$$

Or, on a: $r_n - r > \frac{1}{2}(1-r)$ et $1 - r_n r > (1-r)$, on trouve donc l'inégalité

$$|\Phi_n| < \frac{\sqrt{2(1-r_n)}}{\sqrt{r_n}(1-r)},$$

et par suite

$$\int_{|z|=r} |d\Phi_n| < \frac{4\sqrt{2}(1-r_n)}{\sqrt{r_n}} \cdot \frac{1}{1-r}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n}{\sqrt{r_n}}$$

étant convergente, on a donc

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{|z|=r} |d\Phi_n| < \frac{\varepsilon}{1-r},$$

quel que soit ε arbitrairement petit, pourvu que r soit assez voisin de 1. En tenant compte de (8) et (9), on obtient donc bien l'énoncé XII.

XIII. Considérons la fonction $f(z) = c_k z^k + \dots$ méromorphe dans le cercle $|z| < 1$ qui y possède des zéros a_n et des pôles b_n ($|a_n| > 0$ $|b_n| > 0$, $n = 1, 2, \dots$) et supposons que l'on ait $\lim_{r \to 1} T(r, f) < M$. Dans ces conditions on a:

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,(1-r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|d\Theta < 2M + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|\frac{1}{a_n b_n}\right| + \log\frac{1}{|c_k|},\ ^{12)}$$
$$(z = re^{i\Theta}).$$

On a d'ailleurs, pour une fonction f(z) particulière:

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,(1-r)\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|d\Theta > 0.$$

On sait ([13], p. 190) que l'on peut écrire:

$$f(z) = \frac{z^k\varphi(z)\pi_1(z)}{\pi_2(z)},$$

où $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et qui ne s'y annule pas, tandis que $\pi_1(z)$ et $\pi_2(z)$ désignent des produits de B l a s c h k e formés à l'aide des nombres a_n et b_n respectivement. En appliquant l'énoncé XII on aura:

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|d\Theta < \frac{1}{2\pi}\int\left|R\left[\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]\right|d\Theta + o\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Nous appliquerons maintenant l'énoncé IX à la fonction $\varphi(z)$; remarquons pour cela que l'on a $T(\varphi)\leqslant T(f)+T(z^{-k})+T(\pi_2)+T(1/\pi_1)$, or $T(z^{-k})=0$, de même $T(\pi_2)=0$, car on a $|\pi_2(z)|<1$ dans le cercle $|z|<1$; on trouve enfin ([13], p. 162) que

$$T\left(\frac{1}{\pi_1}\right) = T(\pi_1) - \log|\pi_1(0)| = -\log\prod_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Nous obtenons donc l'intégalité:

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,T(\varphi) \leqslant M + \log\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}.$$

En remarquant que l'on a

$$\varphi(0) = c_k\cdot\frac{\prod_{n=1}^{\infty}|b_n|}{\prod_{n=1}^{\infty}|a_n|},$$

[12]) La série est nécessairement convergente: cf. p. ex. P. M o n t e l [11] p. 179—183. L'inégalité obtenue précise le théorème IX dans le cas particulier où $T(r, f)$ est bornée.

en appliquant l'énoncé IX à la fonction $\varphi(z)$ et en tenant compte de (10), nous obtenons bien la première partie de l'énoncé XIII. Pour obtenir la deuxième partie de cet énoncé, nous allons considérer la fonction

$$f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

que nous avons déjà étudiée. Il serait aisé d'obtenir directement la dernière inégalité de l'énoncé XIII; on peut aussi procéder comme il suit: on a $zf'(z):f(z) = 2z(1-z)^{-2}$, donc il est clair que l'intégrale en question, divisée par 2π, est au moins égale à $T(\psi)$, où l'on a posé:

$$\psi(z) = e^{\frac{2z}{(1-z)^2}}.$$

Or, $T(\psi)$ ne diffère que d'une quantité bornée de $T(1:\psi-1)$ (cf. l'introduction) et cette dernière caractéristique est plus grande que

$$N\left(\frac{1}{\psi-1}\right) = \int_0^r \frac{n(t)-n(0)}{t}\,dt + n(0)\log r,$$

où $n(t)$ désigne le nombre des racines de l'équation $\psi(z) = 1$ ou, ce qui revient au même, le nombre des racines des équations $z(1-z^{-2}) = k\pi i$ (k est un entier arbitraire) contenues dans le cercle $|z| \leqslant t$. Un calcul facile montre cependant que la courbe transformée de la circonférence $|z| = t$ par la fonction $z(1-z)^{-2}$ coupe l'axe imaginaire en deux points seulement, dont les distances à l'origine sont égales à $\frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$; on a donc $n(t) > \frac{2t(1+t^2)}{\pi(1-t^2)^2} - 1$, et par suite:

$$\lim_{\overline{r\to 1}} (1-r)\int_0^{2\pi} \left| R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| d\Theta \geqslant 2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahlfors L., *Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen.* Congrès Math. Scand. Oslo **1929**.

[2] Biernacki M., *Sur les valeurs moyennes des fonctions sous-harmoniques.* Annales UMCS (sectio A), **1**, nr 1 (1946).

[3] —— *Sur les fonctions multivalentes d'ordre p.* C. R. Paris. 24.VIII.1936.

[4] Bloch A., *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité.* Mémorial sc. math. fasc. **20**, Paris, Gauthier-Villars 1926.

[5] Cartan H., C. R. Paris, **189**, (1929).

[6] Hardy G. H., et Littlewood J. E., Acta Math. **54** (1930).
[7] Hardy G. H., Littlewood J. P., Pólya G., *Inequalities*. Camb. Univ. press, 1934.
[8] Julia G., *Principes géométriques d'Analyse (Deux parties)* Paris Gauthier-Villars, 1932.
[9] Lindelöf E., Acta Soc. Fennicae **35**.
[10] Littlewood J. E., Proc. Lond. Mat. Soc. (2) **58**, (1925).
[11] Montel P., *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*. Paris, Gauthier-Villars 1927.
[12] Nevanlinna R., *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*. Acta Mathematica **46**.
[13] —— *Eindeutige analytische Funktionen*. Berlin, J. Springer, 1936.
[14] —— *Über eine Klasse meromorpher Funktionen*. Math. Annalen **92** (1924).
[15] Pólya G., et Szegö G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Berlin, J. Springer, 1925. Bd 2.
[16] Shimizu T., *On the theory of meromorphic functions*. Japan. Journ. Mat. **6** (1929).
[17] Stein. Journ. Lond. Math. Soc. **8** (1933).
[18] Zygmund A., Fundamenta Mathematicae **13** (1929).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Streszczenie

W pracy tej $T(r, f) = T(f)$ oznacza charakterystykę R. Nevanlinny funkcji meromorficznej (por. np. wykaz literatury, poz. [13]). Dowodzę twierdzeń następujących:

I. Jeśli $f(z)$ jest meromorficzna w kole $|z| < 1$ a r nie przebiega przedziałów wyjątkowych Δ_r, wzdłuż których całkowita zmiana $\log(1-r)^{-1}$ jest skończona, to jest

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, |T(f') : T(f)| \leqslant 3 + \frac{1}{k}, \quad \overline{\lim_{r\to 1}}\, |T(f') : T(f)| \leqslant \frac{3k_1}{k_1 - 1},$$

gdzie

$$k = \lim_{r\to 1} \frac{T(r, f)}{\log(1-r)^{-1}}, \quad k_1 = \lim_{r\to 1} \frac{T(r, f')}{\log(1-r)^{-1}}.$$

II. Jeśli w twierdzeniu I $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z| < 1$ a r nie przebiega przedziałów Δ_r, to jest

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, |T(f') : T(f)| \leqslant 1 + \frac{1}{k}, \quad \overline{\lim_{r\to 1}}\, |T(f') : T(f)| \leqslant \frac{k_1}{k_1 - 1}.$$

III. Jeśli w twierdzeniu I $f(z)$ jest holomorficzna i nie przybiera wartości zero w kole $|z|<1$, a r nie przebiega przedziałów Δ_r, to jest

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,|T(f):T(f')|\leqslant 1+\frac{1}{k},\quad \overline{\lim_{r\to 1}}\,|T(f):T(f')|\leqslant\frac{k_1}{k_1-1}.$$

IV. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<1$ i jeśli jedna co najmniej z równości

$$\lim_{r\to 1}|\log T(f):\log_2(1-r)^{-1}|=\infty,\quad \lim|\log T(f'):\log_2(1-r)^{-1}|=\infty$$

ma miejsce, to $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\,|\log T(f):\log T(f')|\leqslant 1$.

V. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<1$, jeśli $f'(z)$ nie przybiera wartości zero w tym kole i jeśli stosunek

$$\int_0^{2\pi}|\arg f'(re^{i\Theta})|\,d\Theta:T(f')$$

jest ograniczony, gdy $r\to 1$, to i stosunek $T(f):T(f')$ jest ograniczony.

VI. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<1$ i jeśli $f'(z)$ ma tylko skończoną liczbę miejsc zerowych w tym kole, to dla każdego $q>0$ i dla $r_0(f)<r<1$ jest

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^q\,d\Theta\right]^{1/q}\leqslant C(q,f)\left[|f(0)|^q+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\Theta})|^q\,d\Theta\right]^{1/q}.$$

VII. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<1$ i jeśli

$$\underline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')}=m>0,\quad \overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')}=M<\infty,$$

to jest

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{T(r,f)}{T(r,f')}<\frac{2e(M+1)}{m}.$$

VIII. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<1$, jeśli charakterystyka $T(r,f')$, postaci sferycznej, nie jest ograniczona, oraz jeśli

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{T(r,f')\,T''(r,f)}{[T'(r,f)]^2}=M,\quad\text{to}\quad \overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\leqslant 2eM.$$

IX. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z| < 1$ a $\varrho = \varrho(r)$ jest liczbą taką, że $r < \varrho < 1$, to

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| d\Theta \leq \frac{4\,[1+\varepsilon(r)]\,T\left(\frac{r}{\varrho}, f\right) + C(f)}{1-\varrho},$$

gdzie $\varepsilon(r) \to 0$ gdy $r \to 1$.

IX. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z| < 1$, nie przybiera tamże wartości zero i jeśli $\varrho = \varrho(r)$ jest liczbą taką, że $\sqrt{r} < \varrho < 1$, to

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| d\Theta \leq \frac{\left(1 + 2\log\frac{1}{1-\sqrt{r}}\right)\left\{4\,[1+\varepsilon(r)]\,T\left(\frac{\sqrt{r}}{\varrho}, f\right) + C(f)\right\}}{1-\varrho},$$

gdzie $\varepsilon(r) \to 0$ gdy $r \to 1$.

XI. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna i nie przybiera wartości zero w kole $|z| < 1$ i jeśli $\lim\limits_{r\to 1} T(r, f) = M$, to

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\Theta})}{f(re^{i\Theta})}\right| d\Theta < \frac{2}{1-r^2}\,[2M - \log|f(0)|].$$

XII. Weźmy pod uwagę iloczyn Blaschkego:

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n| - ze^{-i\alpha_n}}{1-\bar{a}_n z}\quad \left(0 < |a_n| < 1,\ a_n = |a_n|\,e^{i\alpha_n},\ \text{szereg} \sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)\right.$$

jest zbieżny). Gdy $z = re^{i\Theta}$, to jest

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{z\pi'(z)}{\pi(z)}\right]\right| d\Theta = 0.$$

XIII. Weźmy pod uwagę funkcję $f(z) = c_k z^k \ldots$ meromorficzną w kole $|z| < 1$, mającą tamże miejsca zerowe a_n i bieguny b_n ($|a_n| > 0$, $|b_n| > 0$, $n = 1, 2, \ldots$). Jeśli $\lim\limits_{r\to 1} T(r, f) = M$, to jest ($z = re^{i\Theta}$)

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,(1-r)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| d\Theta \leq 2M + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|\frac{1}{a_n b_n}\right| + \log\frac{1}{|c_k|},$$

przy czym dla pewnej funkcji $f(z)$ specjalnej jest

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| d\Theta > 0.$$

Następujące lematy pracy zdają się mieć znaczenie niezaleënie od twierdzeń do których były zastosowane:

Lemat II. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<1$ i jeśli $u_\varphi(re^{i\Theta})$ jest częścią rzeczywistą $e^{-i\varphi}f(z)$, to wyrażenie

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \log|u_\varphi(re^{i\Theta})|^{-1}\, d\Theta$$

jest ograniczone od góry gdy $r\to 1$.

Lemat III. Weźmy pod uwagę funkcję $w=f(z)$, holomorficzną w kole $|z|<1$ i niech $i(r,\varphi)$ oznacza liczbę punktów przecięć utworzonego przez $f(z)$ obrazu okręgu $|z|=r$ z prostą płaszczyzny w, która przechodzi przez $w=0$ i tworzy kąt φ z osią rzeczywistą.

Jeśli $\varrho=\varrho(r)$ spełnia nierówność $r<\varrho<1$, to jest

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} i(r,\varphi)\,d\varphi \leqslant \frac{4T\left(\dfrac{r}{\varrho},f\right)+C(f)}{1-\varrho}.$$

Резюме

В этой работе $T(r,f)=T(f)$ обозначает характеристику Р. Неванлинны мероморфорных функций (сравн. напр. перечень литературы, поз. [13]).

Я доказываю следующее теоремы:

I Если $f(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$, а r не пробегает особых интервалов Δr, вдоль которых полное изменение $\log(1-r)^{-1}$ конечно, то

$$\overline{\lim_{r\to1}}\,|T(f'):T(f)|\leqslant 3+\frac{1}{k},\quad \underline{\lim_{r\to1}}\,|T(f'):T(f)|\leqslant\frac{3k_1}{k_1-1}$$

где

$$k=\lim_{r\to1}\frac{T(r,f)}{\log(1-r)^{-1}},\quad k_1=\lim_{r\to1}\frac{T(r,f')}{\log(1-r)^{-1}}.$$

II Если в теореме I $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, а r не пробегает интервалов Δr, то

$$\overline{\lim_{r\to1}}\,|T(f'):T(f)|\leqslant 1+\frac{1}{k},\quad \underline{\lim_{r\to1}}\,|T(f'):T(f)|\leqslant\frac{k_1}{k_1-1}.$$

III Если в теореме I $f(z)$ голоморфна и не принимает значения нуль в круге $|z|<1$, а r не пробегает интервалов Δr, то

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, [T(f):T(f')] \leqslant 1+\frac{1}{k}, \quad \overline{\lim_{r\to 1}}\, [T(f):T(f')] \leqslant \frac{k_1}{k_1-1}.$$

IV Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и если имеет место по крайней мере одно из неравенств

$$\lim_{r\to 1} |\log T(f):\log_2 (1-r)^{-1}| = \infty, \quad \lim_{r\to 1} |\log T(f'):\log_2 (1-r)^{-1}| = \infty,$$

то

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, |\log T(f):\log T(f')| \leqslant 1.$$

V Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, если $f'(z)$ не принимает нулевого значения в этом круге и если отношение

$$\int_0^{2\pi} |\arg f'(re^{i\Theta})|\, d\Theta : T(f')$$

ограничено, когда $r\to 1$ то и отношение $T(f):T(f')$ ограничено.

VI Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и если $f'(z)$ имеет только конечное число нулевых мест в этом круге, то для всякого $q>0$ и для $r_0(\varrho)<r<1$

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^q\, d\Theta\right]^{1/q} < C(q,f)\left[|f(0)|^q + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|^q\, d\Theta\right]^{1/q}.$$

VII Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и если

$$\underline{\lim_{r\to 1}}\, \frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')} = m > 0, \quad \overline{\lim_{r\to 1}}\, \frac{(1-r)\,T'(r,f')}{T(r,f')} = M < \infty$$

то

$$\underline{\lim_{r\to 1}}\, \frac{T(r,f)}{T(r,f')} \leqslant \frac{2e(M+1)}{m}.$$

VIII Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и если характеристика $T(r,f')$ сферической формы не ограничена, а также если

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, \frac{T(r,f')\,T(r,f'')}{[T'(r,f')]^2} = M \quad \text{то} \quad \overline{\lim_{r\to 1}}\, \frac{T(r,f)}{T(r,f')} \leqslant 2eM.$$

IX Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, а $\varrho=\varrho(r)$ есть число такое, что $r<\varrho<1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| d\Theta \leqslant \frac{4\,[1+\varepsilon(r)]\,T\left(\frac{r}{\varrho},f\right)+C(f)}{1-\varrho}$$

где $\varepsilon(r)\to 0$, когда $r\to 1$.

X Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и не принимает там значения нуль и если $\varrho=\varrho(r)$ такое число, что $\sqrt{r}<\varrho<1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|d\Theta<\frac{\left(1+2\log\frac{1}{1-\sqrt{r}}\right)\left[4(1+\varepsilon(r))T\left(\frac{r}{\varrho},f\right)+C(f)\right]}{1-\varrho}$$

где $\varepsilon(r)\to 0$, когда $r\to 1$.

XI Если $f(z)$ голоморфна и не принимает значения нуль в круге $|z|<1$, и если $\lim\limits_{r\to 1}T(r,f)=M$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\Theta})}{f(re^{i\Theta})}\right|d\Theta\leqslant\frac{2}{1-r^2}[2M-\log|f(0)|].$$

XII Рассмотрим произведение Блашке:

$$\pi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|-ze^{-i\alpha_n}}{1-\bar{a}_n z}\;(0<|a_n|<1,\ a_n=|a_n|e^{i\alpha_n},\ \text{ряд}\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$$

сходится). Когда $z=re^{i\Theta}$, то

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{z\pi'(z)}{\pi(z)}\right]\right|d\Theta=0.$$

XIII Рассмотрим функцию $f(z)=c_k z^k\ldots$ мероморфную в круге $|z|<1$, имеющую там-же нулевые места a_n и полюсы b_n, ($|a_n|>0$, $|b_n|>0$, $n=1,2,\ldots$). Если $\lim\limits_{r\to 1}T(r,f)=M$, то ($z=re^{i\Theta}$)

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,(1-r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|d\Theta\leqslant 2M+\sum_{n=1}^{\infty}\log\left|\frac{1}{a_n b_n}\right|+\log\frac{1}{|c_k|}$$

причём для некоторой специальной функции $f(z)$ имеет место неравенство

$$\underline{\lim_{r\to 1}}\,(1-r)\int_0^{2\pi}\left|R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|d\Theta>0.$$

Следующие леммы этого труда, как кажется, имеют значение независимо от теорем, к которым они были применены.

Лемма II. Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и если $u_\varphi(re^{i\Theta})$ есть действительная часть $e^{-i\varphi}f(z)$, то выражение

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \log|u_\varphi(re^{i\Theta})|^{-1} d\Theta$$

ограничено сверху, когда $r\to 1$.

Лемма III. Рассмотрим функцию $w=f(z)$ голоморфную в круге $|z|<1$, и пусть $i(r,\varphi)$ обозначает число точек пересечений образа окружности $|z|=r$, созданного посредством $f(z)$, с прямой плоскости w, которая проходит через $w=0$ и образует угол φ с действительной осью. Если $\varrho=\varrho(r)$ удовлетворяет неравенство $r\leqslant\varrho<1$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} i(r,\varphi)\,d\varphi \leqslant \frac{4\,T\left(\dfrac{r}{\varrho},f\right)+C(f)}{1-\varrho}.$$