ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. IX, 5 SECTIO A 1955

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur les zéros des polynomes

O miejscach zerowych wielomianów

О нулях многочленов

§ 1. Introduction. Dans ce travail, je démontre d'abord un théorème en quelque sorte inverse à celui, bien connu, de Lucas-Gauss, d'après lequel un domaine convexe contenant tous les zéros d'un polynome contient aussi tous les zéros de la dérivée. En effet, je suppose que tous les zéros d'un polynome sont contenus dans un domaine convexe et je détermine une région qui contient tous les zéros de l'intégrale, ceci bien entendu en précisant convenablement la constante d'intégration. Après avoir obtenu une extension partielle de ce théorème au cas d'une intégrale itérée, je m'occupe, au § 3, d'une généralisation d'un résultat connu de G. Szegö [8], qui a obtenu des relations entre les zéros d'un polynome et de celui que l'on obtient en supprimant le terme contenant la plus haute puissance de la variable. Je passe ensuite (§ 4) au problème des relations entre les zéros d'un polynome et de celui que l'on obtient en remplaçant tous les coefficients par leurs modules, en me bornant d'ailleurs au cas des polynomes de 2ème et 3ème degrés. Enfin, dans le dernier paragraphe, j'améliore un résultat que j'avais obtenu autrefois [1]: en supposant qu'un polynome $f(z)$ de degré n prend dans un cercle $|z-a|<R$ exactement p fois la valeur $f(a)$, je détermine un cercle $|z-a|<R\cdot K(n,p)$ dans lequel il est nécessairement p-valent, $K(n,p)$ ne dépendant que de n et de p.

§ 2. Je vais établir la proposition suivante:

I. *Supposons que tous les zéros d'un polynome soient contenus dans un domaine borné convexe K* [1]). *Soit a un point de K. Tous les zéros de* $\int_a^z f(z)\,dz$ *sont contenus dans le domaine fermé $R(K,a)$ contenant K et délimité par* *la courbe C, transformée par homothétie de la podaire de la frontière de K par rapport au point a, le centre d'homothétie étant a et le rapport d'homothétie égal à 2.*

On constate aisément que la frontière de $R(K,a)$ est aussi l'enveloppe des circonférences qui passent par le point a et dont les centres décrivent la frontière de K.

Le domaine $R(K,a)$ ne peut etre remplacé par un domaine contenu dans $R(K,a)$ [2]).

Signalons une conséquence immédiate de l'énoncé I:

Si a et b sont deux zéros d'un polynome et si a appartient à un domaine convexe K, tandis que b n'appartient pas à $R(K,a)$, un zéro au moins de la dérivée $f'(z)$ n'appartient pas au domaine K.

Remarques. Dans le cas où en certains points P la frontière de K est dépourvue de tangente, il faut prendre au lieu de la podaire le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de a sur toutes les droites d'appui de K; ce lieu comprendra donc des arcs de cercle dont les diamètres sont des segments joignant a et P. Dans le cas où K est un polygone, la courbe C sera composée entièrement de ces arcs de cercle. Le domaine $R(K,a)$, délimité par C, n'est pas toujours convexe, mais il est toujours étoilé par rapport au point a.

Démonstration. Nous utiliserons la proposition suivante: Considérons les polynomes

$$f(z) = a_0 + \cdots + \binom{n}{k} a_k z^k + \cdots + a_n z^n,$$

$$g(z) = b_0 + \cdots + \binom{n}{k} b_k z^k + \cdots + b_n z^n,$$

$$h(z) = a_0 b_0 + \cdots + \binom{n}{k} a_k b_k z^k + \cdots + a_n b_n z^n.$$

Si tous les zéros de $f(z)$ sont contenus dans un domaine convexe K, et si les zéros de $g(z)$ sont $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et u un zéro de $h(z)$, alors chaque domaine convexe contenant tous les points $-u/z_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ a au moins

---

[1]) Il s'agira toujours de domaines fermés. En particulier, K peut être un segment de droite.

[2]) La démonstration de l'énoncé I a été présentée au IV Congrès des mathématiciens roumains à Bucarest le 2 juin 1956.

un point commun avec le domaine K. En effet, l'équation $h(u)=0$ exprime le fait que les polynomes $f(z)$ et $z^n g(-u/z)$ sont „apolaires" et la proposition s'ensuit d'une conséquence d'un théorème de Grace [4], découverte par T. Takagi [9] (cf. aussi [3], [5] p. 46, [7]).

Nous pouvons évidemment supposer dans la démonstration de l'énoncé I que $a=0$. Supposons donc que tous les zéros de $f(z)$ soient contenus dans K et posons

$$g(z)=1+\binom{n}{1}\frac{z}{2}+\cdots+\binom{n}{k}\frac{z^k}{k+1}+\cdots+\frac{z^n}{n+1}.$$

On aura

$$h(z)=a_0+\binom{n}{1}a_1\frac{z}{2}+\cdots+\binom{n}{k}\frac{a_k z^k}{k+1}+\cdots+\frac{a_n z^n}{n+1}=\frac{1}{z}\int_0^z f(z)\,dz.$$

Considérons les zéros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de

$$g(z)=\frac{1}{z}\int_0^z (1+z)^n\,dz=\frac{(1+z)^{n+1}-1}{(n+1)z}$$

tous situés sur la circonférence de rayon 1 et de centre au point -1. Supposons que u soit un zéro de $h(z)$. Il est clair que les points $-u/z_1, -u/z_2, \ldots, -u/z_n$ sont situés sur la droite D qui passe par le point $u/2$ et qui est perpendiculaire au segment joignant $u/2$ à l'origine. Supposons que le point u n'appartienne pas au domaine $R(K,a)$ de l'énoncé I. Le point $u/2$ n'appartenant pas à la région délimitée par la podaire du domaine convexe K par rapport à l'origine, il est clair que la droite d'appui de K parallèle à D serait située entre D et l'origine et, par suite, la droite D n'aurait pas de points communs avec K, en contradiction avec l'énoncé qui vient d'être cite.

Il reste à établir que le domaine $R(K,a)$ ne peut être remplacé par un autre domaine contenu dans $R(K,a)$. Dans ce but considérons d'abord le cas où le domaine convexe K se réduit au segment $0 \leqslant x \leqslant b$ de l'axe réel, $a=0$ et $f(z)=(z-b)^n$, n étant impair. Les zéros de l'intégrale $\int_0^z f(z)\,dz$ sont de la forme $z=b+\tilde{\omega}\,b$ où $\tilde{\omega}$ est une racine $(n+1)$-ème de l'unité, ils sont donc situés sur la circonférence $|z-b|=b$ et lorsque $n\to\infty$ ils sont partout denses sur cette circonférence.

Dans le cas général la frontière de $R(K,a)$ se compose soit d'un arc d'une circonférence Γ qui passe par a et dont le centre est un point b

de la frontière de K, soit d'un arc de l'enveloppe de telles circonférences Γ, lorsque b décrit la frontière de K. Ainsi donc tout point P de la frontière $R(K,a)$ appartient à une circonférence Γ. Or il résulte de l'exemple particulier qui vient d'être étudié qu'il suffit de supposer que tous les zéros de $f(z)$ se réunissent en un point b de la frontière de K, pour que les zéros de $\int_a^z f(z)\,dz$ soient partout denses sur la circonfénce Γ correspondante lorsque $n \to \infty$. En particulier le point P est donc un point d'accumulation des zéros de l'intégrale $\int_a^z f(z)\,dz$.

Le domaine $R(K,a)$ étant étoilé par rapport au point a on voit, en remplaçant b par un point du segment ab que tout point intérieur de $R(K,a)$ est aussi un point d'accumulation des zéros de l'intégrale $\int_a^z f(z)\,dz$.

Etudions quelques cas particuliers importants:

1°. *Supposons que le domaine convexe K se réduise à un segment de droite.* Dans ce cas, le plus simple est de reprendre directement la démonstration du théorème en supposant que $a=0$ et que le segment en question est le segment $S: y=0,\ -b \leqslant x \leqslant c\,(b \geqslant 0,\ c \geqslant 0)$.

Soit Θ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$, où P est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D, avec l'axe ox.

Si p. ex. $0 < \Theta < \pi/2$, il est clair que la droite D n'empiète pas sur le segment S tant que $|u|/2\cos\Theta > c$. Or l'égalité $r = 2c\cos\Theta$ représente en coordonnées polaires la circonférence de centre au point $x=c,\ y=0$ et de rayon c. Un raisonnement analogue, où c est remplacé par b, s'applique lorsque $\pi/2 < \Theta < \pi$. On obtient ainsi l'énoncé suivant [3]):

Ia. *Si tous les zéros du polynome $f(z)$ sont situés sur le segment bc, contenant un point a, tous les zéros de $\int_a^z f(z)\,dz$ sont contenus dans deux cercles dont les centres sont b, c, et les rayons $|b-a|$ et $|c-a|$ respectivement (ces deux cercles se touchent au point a). L'exemple $f(z)=(1-z)^n$, $a=0,\ b=1,\ c=0$ montre que cet énoncé ne saurait être, en général, amélioré.*

On peut rapprocher ce résultat de celui J. L. Walsh ([**10**], p. 73-75):
„Si tous les zéros de $f(z)$, de degré n, sont réels et non positifs, et si $a>0$, alors

$$\int_a^z f(z)\,dz$$

[3]) Dans cet énoncé il s'agit de segments et de cercles fermés.

ne peut avoir d'autres zéros que a ni dans l'angle $|\arg z| < 2\pi/(n+1)$, ni dans le cercle $|z| < a$. Sauf dans le cas où $f(z) = Az^n$ (A constant), aucun zéro de l'intégrale, autre que a, ne se trouve sur la circonférence $|z| = a$. Ce dernier exemple montre aussi que le nombre $2\pi/(n+1)$ ne saurait être remplacé par un nombre plus grand".

2°. *Supposons, en second lieu, que* K *est le cercle* $|z-a| \leq R$; on obtient de suite le résultat suivant:

Ib. *Si tous les zéros du polynome* $f(z)$ *de degré* n *sont contenus dans le cercle* $|z-a| \leq R$, *tous les zéros de*

$$\int_a^z f(z)\,dz$$

sont contenus dans le cercle $|z-a| \leq 2R$. *L'exemple de la fonction* $f(z) = (1+z)^n$, *où* $R = 1$, $a = 0$ *et* n *est impair, montre que dans cet énoncé le nombre* 2 *ne peut être remplacé par un nombre plus petit. Cependant, lorsque* n *est pair, tous les zéros de l'intégrale sont contenus dans le cercle* $|z-a| \leq 2R \cdot \cos \pi/2(n+1)$ *et cette limite est atteinte lorsque* $f(z) = (z+1)^n$, $R = 1$, $a = 0$.

Il ne reste à établir que la dernière partie de l'énoncé. Dans ce but, nous nous servirons du „théorème de composition" dû à G. Szegö ([8], cf. aussi [3], [5] p. 48, [7]):

„Si
$$f(z) = a_0 + \cdots + \binom{n}{k} a_k z^k + \cdots + a_n z^n,$$

$$g(z) = b_0 + \cdots + \binom{n}{k} b_k z^k + \cdots + b_n z^n,$$

$$h(z) = a_0 b_0 + \cdots + \binom{n}{k} a_k b_k z^k + \cdots + a_n b_n z^n,$$

si tous les zéros de $f(z)$ sont contenus dans un domaine circulaire K [4]) et les zéros de $g(z)$ sont $z_1, z_2, \ldots, z_n$, alors chaque zéro de $h(z)$ est de la forme $-\alpha z_s$, où α est un point de K".

Nous supposons que dans le cas actuel $a = 0$, $R = 1$, et que K est le cercle $|z| \leq 1$; les zéros $z_1, \ldots, z_n$ sont, d'après la démonstration du théorème I, de la forme $\widetilde{\omega}_s - 1$, où $\widetilde{\omega}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ sont les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité, autres que 1. Il est clair que, lorsque n est pair, le plus grand module des nombres $\widetilde{\omega}_s - 1$ est égal à $2\cos \pi/2(n+1)$, la proposition en résulte immédiatement.

[4]) Un *domaine circulaire* est soit l'intérieur, soit l'extérieur d'un cercle, soit un demi-plan. Il s'agit toujours de domaines fermés.

Je vais maintenant généraliser l'énoncé Ib au cas de l'intégration itérée. On a la proposition suivante:

II. *Si tous les zéros du polynome* $P(z)$ *sont contenus dans le cercle* $|z-a| \leqslant R$, *tous les zéros du polynome*

$$F(z) = \int_a^z dz \int_a^z dz \cdots \int_a^z P(z)\, dz \quad (p \text{ signes d'intégration})$$

sont contenus dans le cercle $|z-a| \leqslant (p+1)R$. *L'exemple* $P(z) = 1+z$, $a=0$, $R=1$, *où* $(p+1)!\ F(z) = z^{p+1} + (p+1)z^p$, *montre que le nombre* $(p+1)R$ *ne peut être remplacé par un nombre plus petit.*

Démonstration. On peut encore supposer que $a=0$ et $R=1$. Si

$$P(z) = a_0 + \cdots + \binom{n}{k} a_k z^k + \cdots + a_n z^n,$$

on aura

$$(n+1)\cdots(n+p)\, z^{-p} F(z) = \frac{(n+1)\cdots(n+p)}{p!} a_0 + \\ + \cdots + \binom{n}{k} \frac{(n+1)\cdots(n+p)}{(k+1)\cdots(k+p)} a_k z^k + \cdots + a_n z^n.$$

Le dernier polynome résulte de la composition de $P(z)$ et du polynome

$$(1) \qquad g(z) = \binom{n+p}{p} + \cdots + \binom{n+p}{k+p} z^k + \cdots + z^n,$$

il suffira donc d'établir que tous les zéros de $g(z)$ sont contenus dans le cercle $|z| \leqslant p+1$. Or, on peut écrire

$$(2) \qquad z^p g(z) = (1+z)^{n+p} - 1 - (n+p)z - \cdots - \binom{n+p}{k} z^k - \cdots - \binom{n+p}{p-1} z^{p-1}$$

et il résulte du théorème de Rouché qu'il suffira d'établir que pour $|z| = p+1$ on a

$$(3) \qquad \left| 1 + \cdots + \binom{n+p}{k} z^k + \cdots + \binom{n+p}{p-1} z^{p-1} \right| < p^{n+p}.$$

Nous profiterons maintenant de l'inégalité:

$$(4) \qquad 1 + \cdots + \binom{n+p}{k} x^k + \cdots + \binom{n+p}{p-1} x^{p-1} < \binom{n+p}{p-1} (1+x)^{p-1},$$

valable pour tout x positif, et qui résulte des inégalités

$$\binom{n+p}{k} \leqslant \binom{n+p}{p-1}\binom{p-1}{k} \qquad (k=1,2,\ldots,p-1),$$

faciles à vérifier. L'inégalité (4) montre que l'inégalité (3) sera assurée pour $|z|=p+1$ pourvu que l'on ait

$$\omega(n,p)=\binom{n+p}{p-1}(p+2)^{p-1}\,p^{-(n+p)} \leqslant 1. \tag{5}$$

Or

$$\frac{\omega(n+1,p)}{\omega(n,p)}=\frac{n+p+1}{p(n+2)}<1 \qquad \text{pour } p>1,$$

il suffira donc d'étudier le problème pour les petites valeurs de n. Or pour $n=1$ on a, d'après l'équation (1) $g(z)=\binom{p+1}{p}+z$, donc l'unique zéro de $g(z)$ est égal à $-(p+1)$. Lorsque $n=2$ on a

$$g(z)=\frac{(p+2)(p+1)}{2}+(p+2)z+z^2,$$

les zéros de $g(z)$ sont imaginaires conjugués et leur module est égal à

$$\sqrt{\frac{(p+2)(p+1)}{2}}<p+1$$

lorsque $p>1$. Enfin, lorsque $n=3$, l'inégalité (5) peut s'écrire

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{3}{p}\right)\left(1+\frac{2}{p}\right)^p \leqslant 24.$$

On la vérifie directement pour $p=2$. En profitant du fait, bien connu, que $(1+2/p)^p$ croît avec p et que, par suite, $(1+2/p)<e^2<9$, on voit que pour $p\geqslant 3$ il suffit d'établir que

$$3\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{3}{p}\right) \leqslant 8,$$

ce qu'on vérifie immédiatement.

§ 3. G. Szegö à établi [8] la proposition suivante:

„Si le polynome $P(z)=a_0+\cdots+a_n z^n$ ne s'annule pas dans le cercle $|z|<R$, le polynome $Q(z)=a_0+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$ ne s'annule pas dans le cercle $|z|<R/2$ si n est pair, et dans le cercle $|z|<R/2\cdot\cos\pi/2n$ si n est impair, ces limites étant atteintes lorsque $P(z)=(1+z)^n$".

Je me propose d'étendre partiellement cette proposition au cas où l'on supprime les p derniers termes du polynome $P(z)$. On obtient la proposition suivante:

III. *Si le polynome* $P(z)=a_0+\cdots+a_n z^n$ *ne s'annule pas dans le cercle* $|z|<R$, *le polynome* $Q(z)=a_0+\cdots+a_{n-p}z^{n-p}$ $(p<n)$ *ne s'annule pas dans le cercle*

$$|z|<\frac{R}{p+1}.$$

Cette limite est atteinte, lorsque $P(z)=(1+z)^n$, $p=n-1$, $Q(z)=1+nz$.

Démonstration. Si l'on écrit $P(z)$ sous la forme

$$P(z)=a_0+\cdots+\binom{n}{k}a_k z^k+\cdots+a_n z^n$$

on aura

$$Q(z)=a_0+\cdots+\binom{n}{k}a_k z^k+\cdots+\binom{n}{p}a_{n-p}z^{n-p}.$$

Le polynome $Q(z)$ résulte de la composition de $P(z)$ et du polynome

$$R(z)=1+\cdots+\binom{n}{k}z^k+\cdots+\binom{n}{p}z^{n-p}=$$

$$=(1+z)^n-z^n-nz^{n-1}-\cdots-\binom{n}{p-1}z^{n-p+1}.$$

Puisque tous les zéros de $P(z)$ se trouvent dans le domaine circulaire $|z|\geqslant R$, il suffit, d'après le théorème de composition de Szegö, mentionné dans la démonstration du théorème Ib, de montrer que tous les zéros de $R(z)$ ont leur module $\geqslant 1/(p+1)$, ou que tous les zéros du polynome

$$z^{-n}R\left(\frac{1}{z}\right)=(1+z)^n-1-nz-\cdots-\binom{n}{p-1}z^{p-1}$$

sont contenus dans le cercle $|z|\leqslant p+1$. Or le dernier polynome est identique au polynome $g(z)$ de la formule (2) du § 2, à cela près que $(n+p)$ est remplacé actuellement par n. Or nous avons vu que pour tout $n\geqslant 1$ et $p\geqslant 2$ le polynome $g(z)$ du § 2 à tous ses zéros contenus dans le cercle $|z|\leqslant p+1$; actuellement $n\geqslant p+1$, la conclusion précédente s'applique donc encore, et ceci achève la démonstration.

§ 4. Nous allons nous occuper maintenant des relations entre la distribution des zéros du polynome donné $f(z)=a_0+\cdots+a_n z^n$ et du polynome $g(z)=|a_0|+\cdots+|a_n|z^n$.

Supposons d'abord que $n = 2$. On a la proposition suivante:

IV. *Si tous les zéros du polynome* $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ *ont leurs modules plus grands (plus petits) que* R, *il en est de même de tous les zéros du polynome* $g(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2$.

Démonstration. En effectuant au besoin une inversion on peut se borner au cas où tous les zéros de $f(z)$ sont à l'extérieur du cercle $|z| < R$, on peut aussi supposer que $R = 1$. Nous allons utiliser un cas particulier d'une règle due à A. Cohn ([2], cf. aussi [3], [5]), dont voici l'énoncé: „Si $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ et si $|a_0| > |a_n|$, le polynome $f(z)$ a autant de zéros à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ que le polynome $f_1(z) = \bar{a}_0 f(z) - a_n f^*(z)$, où les barres désignent des nombres conjugués et où $f^*(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \cdots + \bar{a}_1 z^{n-1} + \bar{a}_0 z^n$". Dans le cas actuel on suppose que tous les zéros de $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ sont à l'extérieur du cercle $|z| < 1$, on a donc bien $|a_0| > |a_2|$ et le polynome $f_1(z) = |a_0|^2 - |a_2|^2 + (a_1 \bar{a}_0 - \bar{a}_1 a_2) z$ ne s'annulant pas à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, on a l'inégalité

$$|a_0|^2 - |a_2|^2 \geq |a_1 \bar{a}_0 - \bar{a}_1 a_2| .$$

Or $|a_1 \bar{a}_0 - \bar{a}_1 a_2| \geq |a_1| |a_0| - |a_1| |a_2|$, donc, en reprenant les considérations précédentes avec le polynome $g(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2$, on constate qu'il ne s'annule pas à l'intérieur du cercle $|z| < 1$. En introduisant une nouvelle variable w à l'aide de la transformation $z = qw$ (q constant, $1 < q < 1 + \varepsilon$), on constate d'ailleurs que $g(z)$ ne s'annule pas même sur la circonférence $|z| = 1$.

Voici maintenant une autre démonstration, tout à fait élémentaire, de l'énoncé IV, valable dans le cas où *les coefficients* a_0, a_1, a_2, *sont réels.* On peut évidemment supposer que $a_0 > 0$. Puisque tous les zéros de $f(z)$ sont à l'extérieur du cercle $|z| < 1$, on a $a_0 > |a_2|$, et il s'ensuit qu'au moins un zéro de $g(z)$ est situé à l'extérieur du cercle $|z| < 1$. Si les zéros x_1 et x_2 de $g(z)$ sont imaginaires conjugués, la proposition est donc évidente. Si les zéros x_1 et x_2 sont réels, il en est de même des zéros z_1 et z_2 de $f(z)$, car $a_1^2 - 4 a_0 a_2 \geq |a_1|^2 - 4 a_0 |a_2| \geq 0$. Supposons que l'énoncé IV ne soit pas exact, il est clair qu'un zéro x_1 de $g(z)$ doit etre situé dans l'intervalle $(-\infty, -1)$ et l'autre dans l'intervalle $(-1, 0)$ et que l'on a, par suite ($a_0 > 0$)

$$(*) \qquad g(-1) = a_0 - |a_1| + |a_2| < 0,$$

Supposons, en premier lieu, que $a_1 \geq 0$, $a_2 > 0$ (on peut évidemment supposer que $a_2 \neq 0$). Les zéros z_1 et z_2 de $f(z)$ appartiennent évidemment à l'intervalle $(-\infty, -1)$ on a donc $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 > 0$, or ceci contredit à l'inégalité (*). Le cas où $a_1 \leqslant 0$, $a_2 > 0$ se ramène au précédent par la substitution $z = -w$.

Supposons maintenant que $a_1 \geqslant 0$, $a_2 < 0$; l'intervalle $(-\infty, -1)$ contient évidemment un zéro de $f(z)$, et un seul, on a donc encore $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 > 0$. Or l'inégalité (*) s'écrit maintenant $a_0 - a_1 - a_2 \leqslant 0$, on aurait donc $-a_2 < +a_2$, en contradiction avec l'hypothèse. Enfin, le cas où $a_1 \leqslant 0$, $a_2 < 0$ se ramène au précédent par la substitution $z = -w$.

Occupons nous maintenant du cas d'un polynome du $3^{\text{ème}}$ degré $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + z^3$, et supposons que tous ses zéros, soit z_1, z_2, z_3, soient contenus dans le domaine $|z| > 1$. En appliquant la règle de Cohn qui vient d'être citée, on voit que tous les zéros du polynome

$$f_1(z) = \bar{a}_0 f(z) - f^*(z) = |a_0|^2 - 1 + (a_1 \bar{a}_0 - \bar{a}_2) z + (a_2 \bar{a}_0 - \bar{a}_1) z^2$$

ont aussi leurs modules supérieurs à 1, on a donc $|a_2 \bar{a}_0 - \bar{a}_1| < |a_0|^2 - 1$ et, a fortiori,

$$|a_0|\,|a_2| - |a_1| < |a_0|^2 - 1. \tag{6}$$

En posant, pour abréger, $|a_i| = b_i$ $(i = 0, 1, 2)$ supposons que le polynome $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + z^3$ possède un zéro *complexe* $e^{i\Theta}$ de module un. On a donc

$$b_0 + b_1 \cos\Theta + b_2 \cos 2\Theta + \cos 3\Theta = 0,$$
$$b_1 \sin\Theta + b_2 \sin 2\Theta + \sin 3\Theta = 0.$$

En posant maintenant $\cos\Theta = t$ et en divisant la seconde des équations qui viennent d'être écrites par $\sin\Theta$ (c'est possible, car, en vertu de l'hypothèse, $\Theta \neq 0$ et $\Theta \neq \pi$), on obtient les équations

$$b_0 + b_1 t + b_2 (2t^2 - 1) + 4t^3 - 3t = 0,$$
$$b_1 + 2 b_2 t + 4t^2 - 1 = 0.$$

En multipliant la seconde de ces équations par t et en retranchant le résultat de la première, il vient $b_0 - b_2 - 2t = 0$; en éliminant t on obtient alors le résultat:

$$b_1 - b_0 b_2 + b_0^2 - 1 = 0,$$

qui est clairement en contradiction avec l'inégalité (6). Il est donc démontré que le polynome $g(z)$ ne peut avoir de zéros complexes de module 1. Supposons maintenant qu'il possède un zéro complexe de module $q < 1$, alors le polynome $g(qz)$ posséderait un zéro complexe de module 1, tandis que le polynome $f(qz)$ posséderait des zéros z_1/q, z_2/q, z_3/q, tous de modules supérieurs à 1, en contradiction avec le résultat précédent.

Cependant, le *résultat qui vient d'être obtenu ne s'applique pas aux zéros réels.* Considérons, en effet, le polynome particulier

$$f(z) = z^3 - bz + 1 + b, \qquad b > 0.$$

Tous les zéros de $f(z)$ sont contenus dans le domaine $|z| > 1$. En effet, si $f(z) = 0$, on a $|z(z^2 - b)| = 1 + b$; si $|z| \leq 1$, ce n'est possible que lorsque $z = \pm i$, or ces nombres n'annulent pas $f(z)$, par contre, $g(z) = z^3 + bz + 1 + b$ possède le zéro $z = -1$. Nous avons en définitive l'énoncé suivant:

V. *Si tous les zéros du polynome $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ ont leurs modules plus grands (plus petits) que R, il en est de même des zéros complexes de $g(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + |a_3| z^3$. Ce résultat ne s'étend pas, en général, aux zéros réels de $g(z)$.*

Remarques. 1. Cependant, si tous les zéros de $f(z)$ (de 3ème degré) ont le même module R, tous les zéros de $g(z)$ ont aussi le module R. Cela résulte immédiatement de l'énoncé IV et du théorème suivant, dû à A. Cohn [**2**]: „Pour que tous les zéros de $g(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ soient de module 1, il faut et il suffit que l'on ait $a_n = u\bar{a}_0$, $a_{n-1} = u\bar{a}_1, \ldots, a_0 = u\bar{a}_n$, avec $|u| = 1$, et que tous les zéros de $g'(z)$ soient situés dans le cercle $|z| \leq 1$".

2. L'exemple du polynome $f(z) = z^6 - bz^2 + 1 + b$, où $b > 0$, montre que *dans le cas du polynome de sixième degré une proposition analogue à l'énoncé V n'est plus exacte;* en effet, $f(z)$ a tous ses zéros dans le domaine $|z| > 1$, tandis que $g(z) = z^6 + bz^2 + 1 + b$ possède les zéros $\pm i$. Le cas des polynomes des quatrième et cinquième degrés reste à étudier. Il ne sera peut-être pas superflu de rappeler ici un résultat de A. Ostrowski [**6**]: si les coefficients des mêmes puissances de z des deux polynomes $P(z)$ et $Q(z)$, de degré n, ont les mêmes modules et si les zéros de $P(z)$ et de $Q(z)$, rangés dans l'ordre de croissance des modules, sont $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ respectivement, on a

$$\left|\frac{y_k}{x_k}\right| \leq (3/2 + \sqrt{2})\, k(n - k + 1).$$

§ 5. J'ai établi autrefois ([**1**], p. 630-633) la proposition suivante: *Si un polynome $f(z)$ de degré n prend, dans un cercle de rayon R, exactement p fois la valeur qu'il a au centre du cercle, il est p-valent (c'est-à-dire prend toute valeur p fois au plus) dans le cercle concentrique de rayon*

$$\frac{2R}{(p+1)!\,(n+1-p)}.$$

Je me propose d'améliorer un peu ce résultat, en faisant voir que, si $p \geqslant 1$, *on peut remplacer dans cet énoncé le nombre*

$$\frac{2R}{(p+1)!\,(n+1-p)} \quad \textit{par} \quad \frac{R(p-1)!}{(p+1)\,(p+2)\cdots(2p-1)\,(2n-2p+1)}\ ^{1}).$$

Dans la démonstration on peut supposer qu'il s'agit du cercle $|z|<1$ et que $f(0)=0$. Si $f(z)=a_q z^q+\cdots+a_n z^n$ $(q \geqslant 1)$, le polynome $\varphi(z)=a_q+ +\cdots+a_n z^{n-q}$ a exactement $(p-q)$ zéros dans le cercle $|z|<1$, le polynome $z^{n-q}\varphi(1/z)=a_n+a_{n-1}z+\cdots+a_q z^{n-q}$ possède exactement $(n-p)$ zéros dans le cercle $|z|<1$. On a donc $z^{n-q}\varphi(1/z)=P(z)\,Q(z)$, où $P(z)$ est un polynome de degré $(n-p)$ dont tous les zéros appartiennent au cercle $|z|<1$ et $Q(z)$ un polynome de degré $(p-q)$ dont les zéros ont leur module $\geqslant 1$. Supposons que l'équation $P(z)\,Q(z)+bz^n=0$ possède, quel que soit b et quel que soit le polynome $Q(z)$ de degré $(p-q)$, au moins $(n-p)$ racines qui ne dépassent pas en module K; on en conclut que l'équation aux inverses $f(z)+b=0$ possède au moins $(n-p)$ racines de module $\geqslant 1/K$ et, par suite, au plus p zéros de module $<1/K$, c'est-à-dire que $f(z)$ est p-valente dans le cercle $|z|<1/K$. Il est visible que l'on peut se borner au cas où $q=1$, car ce cas est le plus général.

a étant un point quelconque du plan et z décrivant une circonférence $|z|=R$ dans le sens direct $(z=re^{i\Theta})$, étudions le maximum de l'expression $\dfrac{\partial \arg(z-a)}{\partial\Theta}$. On peut évidemment supposer que $a>0$. Or, on trouve sans peine que

$$\frac{\partial \arg(z-a)}{\partial\Theta}=\frac{R}{2}\,\frac{\partial \lg|z-a|^2}{\partial r}=\frac{R(R-a\cos\Theta)}{R^2+a^2-2aR\cos\Theta}.$$

Lorsque $a<R$, cette expression atteint son maximum pour $\cos\Theta=+1$, ce maximum est égal à $R/(R-a)$; lorsque $a>R$, le maximum est atteint pour $\cos\Theta=-1$ et il est égal à $R/(R+a)$, quantité qui ne dépasse pas $1/2$.

L'équation étudiée peut s'écrire

$$\frac{P(z)\,Q(z)}{z^n}+b=0.$$

---

[1]) Les nombres des zéros des polynomes $f(z)-c$ sont toujours comptés avec leurs ordres de multiplicité. Dans le cas où $p=1$, la limitation R/n est exacte, dans le cas où $p=n-1$ on a une limitation exacte de G. Szegö [8], à savoir $R/2$ si n est impair et $(R/2)\cos\pi/2n$ lorsque n est pair. Dans le cas général, la limite exacte ne saurait être supérieure à pR/n (cf. [1] p. 627-628).

Supposons que s zéros de $Q(z)$ soient moindres ou égaux en module à un nombre R^* $(R^* > 1)$ et que les $(p-1-s)$ zéros restants aient leurs modules $> R$. D'après ce qui précède, si $|z| = R > R^*$ on aura

$$\frac{\partial \arg \left\{ \frac{P(z)\,Q(z)}{z^n} \right\}}{\partial \Theta} \leq \frac{(n-p)\,R}{R-1} + \frac{sR}{R-R^*} + \frac{p-1-s}{2} - n. \tag{5}$$

Si R est tel que la dernière expression est négative et si z décrit la circonférence $|z| = R$ dans le sens direct, l'expression $P(z)\,Q(z)\,z^{-n}$ contourne, en vertu de (5) et puisque $P(z)\,Q(z)$ à $(n-p+s)$ zéros dans le cercle $|z| < R$, un point $-b$ quelconque au plus $(p-s)$ fois dans le sens négatif; il en résulte que l'équation $P(z)\,Q(z) + bz^n = z^n \left[\frac{P(z)\,Q(z)}{z^n} - (-b) \right] = 0$ possède au moins $(n-p+s)$ zéros dans le cercle $|z| \leq R$. Ainsi donc, si pour la valeur considérée de $R > R^*$ on a

$$\frac{(n-p)R}{R-1} + \frac{sR}{R-R^*} + \frac{p-1-s}{2} - n \leq 0, \tag{6}$$

le nombre $1/R$ résout le problème posé au début. Supposons d'abord que $s = 0$, c'est-à-dire que tous les zéros de $Q(z)$ aient leur module $> R$, l'inégalité (6) fournit dans ce cas la valeur

$$R = R_0 = \frac{2n-p+1}{p+1}.$$

Ainsi donc, si $Q(z)$ n'a pas de zéros qui ne dépassent pas R en module, ce nombre fournit la limite K cherchée. Dans cet énoncé on peut évidemment remplacer R_0 par $R_1 = 2n - 2p + 1$, car $R_1 > R_0$. En écartant désormais ce cas, désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ les modules des zéros de $Q(z)$, rangés de manière que $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_{p-2} \leq r_{p-1}$, et posons pour abréger $r_{s+1}/r_s = k_s$ $(s = 1, \ldots, p-2)$. D'après ce qui précède, on peut admettre que $r_1 \leq R$. Supposons, en premier lieu, que l'on ait $k_l \leq \frac{p+l}{p-l}$ pour $l = 1, \ldots, p-2$; on posera dans (6) $s = p-1$, $R^* = r_{p-1}$ et $R = (2p-1)\,r_{p-1}$, et il viendra

$$\frac{(n-p)\,R}{R-1} + \frac{2p-1}{2} - n \leq 0,$$

inégalité vérifiée pourvu que $R > 2n - 2p - 1 = R_1$. La limite cherchée est donc égale à $\max\,|(2p-1)\,r_{p-1},\ R_1|$. Or $r_1 \leq R_1$, on a donc

$$(2p-1)\,r_{p-1} \leq R_1 \prod_{l=1}^{p-1} \frac{p+l}{p-l} \tag{7}$$

et il est clair que le second membre de l'inégalité (7) fournit la limite cherchée.

Supposons maintenant que $k_l < \frac{p+l}{p-l}$ pour $l=1,\ldots,s-1$, mais que $k_s > \frac{p+s}{p-s}$ $\left(\text{ou bien que } k_1 > \frac{p+1}{p-1}\right)$ et posons dans l'inégalité (6) $R^* = r_s$ et $R = R_s = \frac{p+s}{p-s} r_s$; elle pourra s'écrire

$$\frac{(n-p)R_s}{R_s-1} + \frac{p+s}{2} + \frac{p-1-s}{2} n < 0$$

et sera donc remplie pourvu que $R_s > 2n-2p+1 = R_1$. S'il en est ainsi, le nombre R_s et, *a fortiori*, le nombre plus grand

$$R_1 \prod_{l=1}^{s} \frac{p+l}{p-l} \tag{8}$$

fournit la limite cherchée.

Si $R_s \leq R_1$, on a *a fortiori* $r_s \leq R_1$. Supposons d'abord que $k_l < \frac{p+l}{p-l}$ pour $l=s+1,\ldots,(p-2)$. On pourra reprendre les raisonnements qui ont conduit à l'inégalité (7) et on aboutit à la limite

$$R_1 \prod_{l=s}^{p-1} \frac{p+l}{p-l}. \tag{9}$$

Supposons, en second lieu, que l'on ait $k_l < \frac{p+l}{p-l}$ pour $l=s+1,\ldots,s_1-1$, mais $k_{s_1} > \frac{p+s_1}{p-s_1}$ avec $s+1 < s_1 < p-2$ $\left(\text{ou bien que } k_{s+1} > \frac{p+s+1}{p-s-1}\right)$. On reprendra les raisonnements qui ont conduit à l'expression (8), en y remplaçant s par s_1; on obtient ainsi la limite

$$R_1 \prod_{l=s+1}^{s_1} \frac{p+l}{p-l}, \tag{10}$$

valable si $R_{s_1} = \frac{p+s_1}{p-s_2} r_{s_1} > 2n-2p+1 = R_1$. Si $R_{s_1} < R_1$ on poursuivra les raisonnements qui ont conduit à l'expression (9), lesquels fourniront la limite

$$R_1 \prod_{l=s_1}^{p-2} \frac{p+l}{p-l} \tag{11}$$

ou bien conduirons à l'introduction d'un nombre s_2 tel que $k_l < \frac{p+l}{p-l}$ pour $l = s_1+1, \ldots, s_2-1$, mais $k_{s_2} > \frac{p+s_2}{p-s_2}, \ldots$, et ainsi de suite. Toutes les limites (8), (9), (10), (11), ainsi obtenues sont moindres que la limite (7), cette dernière est donc générale et fournit celle de l'énoncé du théorème. Pour constanter que cette limitation est meilleure que celle précédemment obtenue, il faut établir l'inégalité

$$(12) \qquad (2n-2p+1)\prod_{l=1}^{p-1}\frac{p+l}{p-l} < \frac{1}{2}(p+1)!\,(n+1-p).$$

On voit sans peine qu'il suffit de montrer que

$$w_p = \frac{4(p+1)\cdots(2p-1)}{(p+1)!\,(p-1)!} < 1.$$

Or $w_{p+1}/w_p < 1$ et $w_5 < 1$, donc $w_p < 1$ pour tout $p \geqslant 5$. La formule de Stirling montre d'ailleurs que le premier membre de (12) est égal asymptotiquement, pour les grandes valeurs de p, à $(2n-2p+\frac{1}{2})\,4^p/\sqrt{\pi p}$, quantité notablement plus petite que le second membre de (12).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki M., *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires*. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des sc. math. et nat. (A) (1927), p. 541—685.

[2] Cohn A., *Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise*. Math. Zeitschr. **14** (1922), p. 120—148.

[3] Dieudonné J., *La théorie analytique des polynomes d'une variable*. Mémorial sc. math. fasc. **43** (1938).

[4] Grace J. H., *The zeros of a polynomial*. Proc. Camb. Phil. Soc., **11** (1902), p. 352—357.

[5] Marden M., *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*. New York, Amer. Math. Soc. 1949 (Math. Surveys Nr 3).

[6] Ostrowski A., Acta Math. **72** (1940), p. 99—257.

[7] Pólya G. et Szegö G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Bd. I-II. Berlin, Springer, 1925.

[8] Szegö G., *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen*. Math. Zeitschr., **13** (1922), p. 28—55.

[9] Takagi T., *Note on the algebraic equations*. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **3** (1921), p. 175—179.

[10] Walsh J. L., *The location of critical points of analytic and harmonic functions*. New York, American. Math. Soc., 1950 (Coll. Publ. vol. 34).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Streszczenie

W pracy tej dowodzę twierdzeń następujących:

I. Jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu $f(z)$ znajdują się w obszarze wypukłym i ograniczonym K, zaś a jest punktem K, to wszystkie miejsca zerowe wielomianu

$$(1) \qquad \int_a^z f(z)\,dz$$

znajdują się w obszarze $R(K,a)$ zawierającym K i ograniczonym przekształconą przez jednokładność spodkową względem punktu a brzegu K, przy czym środek jednokładności jest w punkcie a a jej stosunek jest równy 2.

W szczególności zachodzą twierdzenia następujące:

Ia. Jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu $f(z)$ znajdują się na odcinku bc, zawierającym punkt a, to wszystkie miejsca zerowe całki (1) znajdują się wewnątrz lub na brzegu kół o środkach b i c i o promieniach $|b-a|$ i $|c-a|$ odpowiednio.

Ib. Jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu $f(z)$ znajdują się w kole $|z-a| \leqslant R$, to wszystkie miejsca zerowe całki (1) znajdują się w kole $|z-a| \leqslant 2R$ gdy stopień wielomianu $f(z)$ jest nieparzysty, i w kole $|z-a| \leqslant 2R\cos\pi/2(n+1)$ gdy stopień ten jest parzysty. Otrzymane promienie nie mogą być zmniejszone.

II. Jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu $f(z)$ są zawarte w kole $|z-a| \leqslant R$, to wszystkie miejsca zerowe wielomianu

$$F(z) = \int_a^z dz \int_a^z dz \cdots \int_a^z dz \int_a^z P(z)\,dz \qquad \text{(p całkowań)}$$

znajdują się w kole $|z-a| \leqslant (p+1)R$. Liczba $p+1$ nie może być zmniejszona.

III. Jeżeli wielomian $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ nie ma miejsc zerowych w kole $|z| < R$, to wielomian $Q(z) = a_0 + \cdots + a_{n-p} z^{n-p}$ nie ma miejsc zerowych w kole $|z| < R/(p+1)$. Liczba $1/(p+1)$ nie może być zwiększona.

IV—V. Jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ znajdują się wewnątrz (na zewnątrz) koła $|z| < R$, to również miejsca zerowe *zespolone* wielomianu $|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + |a_3| z^3$ znajdują się wewnątrz (na zewnątrz) wspomnianego koła. Jeżeli $a_3 = 0$, to twierdzenie to ma miejsce i w stosunku do miejsc zerowych rzeczywistych wielomianu $|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2$.

VI. Jeżeli wielomian $f(z)$ stopnia n przybiera w kole $|z-a|<R$ dokładnie p razy wartość $f(a)$ $(p>1)$, to jest on p-listny (tj. przybiera każdą wartość co najwyżej p razy) w kole

$$|z-a|<\frac{(p-1)!\,R}{(p+1)\,(p+2)\cdots(2p-1)\,(2n-2p+1)}.$$

Резюме

В этом труде доказаны следующие теоремы:

I. Если все нулевые места многочлена $f(z)$ находятся в выпуклой и ограниченной области K, а точка a лежит в K, то все нулевые места многочлена

$$\int_a^z f(z)\,dz \tag{1}$$

находятся в области $R(K,a)$, содержащей K и ограниченной линией, преобразованной черес подобие из подэры относительно полюса a границы K, причём центр подобного преобразования находится в точке a, а коэффициент подобия равен 2.

В частности имеют место следующие теоремы:

Ia. Если все нулевые места многочлена $f(z)$ находятся на отрезке bc, содержащем точку a, то все нулевые места интеграла (1) находятся внутри, или на ограничании кругов с центрами b и c и с радиусами соответственно $|b-a|$ и $|c-a|$.

Ib. Если все нулевые места многочлена $f(z)$ находятся в круге $|z-a|\leqslant R$, то все нулевые места интеграла (1) находятся в круге $|z-a|\leqslant 2R$, когда многочлен $f(z)$ нечётной степени, и в круге $|z-a|\leqslant 2R\cos\pi/2(n+1)$, когда он степени чётной. Полученные радиусы не могут быть уменьшены.

II. Если все нулевые места многочлена $f(z)$ заключены в круге $|z-a|\leqslant R$, то все нулевые места многочлена

$$F(z)=\int_a^z dz\int_a^z dz\cdots\int_a^z dz\int_a^z f(z)\,dz \qquad (p \text{ интегрирований})$$

находятся в круге $|z-a|\leqslant(p+1)R$. Число $(p+1)$ не может быть уменьшено.

III. Если многочлен $P(z)=a_0+\cdots+a_n z^n$ не имеет нулевых мест в круге $|z|<R$, то многочлен

$$Q(z)=a_0+\cdots+a_{n-p}z^{n-p}$$

не имеет нулевых мест в круге $|z|<R/(p+1)$. Число $1/(p+1)$ не может быть увеличено.

IV—V. Если все нулевые места многочлена $a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3$ находятся внутри (вне) круга $|z|<R$, то тоже и *комплексные* нулевые места многочлена $|a_0|+|a_1|z+|a_2|z^2+|a_3|z^3$ находятся внутри (вне) упомянутого круга. Если $a_3=0$, то эта теорема имеет место и по отношению к действительным нулевым местам многочлена $|a_0|+$ $+|a_1|z+|a_2|z^2$.

VI. Если многочлен n-ой степени $f(z)$ принимает в круге $|z-a|<R$ точно p раз значение $f(a)$ $(p>1)$, то он p-листный (то-есть принимает всякое значение самое бóльшее p раз) в круге

$$|z-a|<\frac{(p-1)!\,R}{(p+1)(p+2)\cdots(2p-1)(2n-2p+1)}.$$