ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IX, 1 SECTIO A 1955

Z Zakładu Matematyki III, Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr K. Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

# Sur l'orthogonalité généralisée des matrices propres

## Uogólniona ortogonalność macierzy własnych

## Обобщенная ортогональность собственных матриц

### Introduction

**0,1.** Désignons par $A$ une matrice carrée. Nous appelons *matrice propre* de $A$ la matrice qui transforme $A$ en une matrice canonique. Nous allons démontrer une propriété des matrices propres ayant des applications dans la théorie des équations différentielles.

Au n° 0,2 nous expliquons la notation employée. Les raisonnements étant assez compliqués nous traitons au § 1 le cas des valeurs propres différentes, le plus simple et ayant le plus d'applications, et le cas des diviseurs élémentaires linéaires. Nous y donnons une nouvelle démonstration du Théorème $\mathrm{I}^a$ (qui est d'ailleurs bien connu), son réciproque (Théorème $\mathrm{I}^b$) et des généralisations presque immédiates (Théorème $\mathrm{II}^a$ et $\mathrm{II}^b$). Au § 2 nous considérons le cas général du point de vue abstrait (et indépendement des raisonnements du § 1). Ses applications aux matrices canoniques complexes de Jordan et à un certain type de matrices canoniques réelles sont étudiées aux §§ 3 et 4. Les résultats des §§ 2 — 4 embrassent comme cas particulier ceux du § 1.

**0,2.** Les majuscules grasses désigneront les matrices, par exemple: $\mathbf{A} = |a_{kl}|_{(k,l)}$ S'il y a lieu, l'ordre des matrices carrées ou le nombre des lignes et des colonnes des matrices rectangulaires sera indiqué par des indices, pas exemple: $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n,n)}$ ou $\mathbf{B}^{(n,m)}$.

Nous allons introduire un certain nombre de matrices-unités supplémentaires (une partie de ces définitions est donnée par Aitken, Turnbull [1]).

$$U_k^{(n)} \underset{df}{=} \left|\delta_{\nu,\mu-k}\right|_{(\nu,\mu)} \quad \text{(où } \delta_{\nu,\mu} \text{ est le } \delta \text{ de Kronecker)}$$

On a

$$E^{(n)} = U_0^{(n)} \quad \text{et} \quad U_k^{(n)} = (U_1^{(n)})^k .$$

Posons

$$V_k^{(m,n)} \underset{df}{=} \left|\delta_{m+n,\nu+\mu+k}\right|_{(\nu,\mu)} = \left|\delta_{m+n-k,\nu+\mu}\right|_{(\nu,\mu)}$$

$$V_k^{(n)} \underset{df}{=} V_{n-k-1}^{(n,n)} \quad \text{et} \quad V^{(n)} \underset{df}{=} V_0^{(n)} .$$

Nous avons

$$V_k^{(n)} = \left|\delta_{n+k+1,\nu+\mu}\right|_{(\nu,\mu)} .$$

Il est facile de voir que

$$V^{(n)} \cdot V_k^{(n)} = U_k^{(n)} . \tag{0,21}$$

Par $U_k^{(2n)}(\xi,\eta)$ nous désignerons la matrice partitionnée d'ordre $2n$, qu'on obtient de la matrice $U_k^{(n)}$ en remplaçant chaque élément égal à 0 par la sous-matrice.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{0,22}$$

et chaque element égal à 1 par la sous-matrice

$$\begin{vmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{vmatrix} .$$

De même nous désignerons par $V_k^{(2n,2m)}(\xi,\eta)$ et par $V_k^{(2n)}(\xi,\eta)$ les matrices partitionnées qu'on obtient des matrices $V_k^{(n,m)}$ et $V_k^{(n)}$ respectivement en remplaçant chaque élément égal à 0 par la sous-matrice (0,22) et chaque élément égal à 1 par la sous-matrice

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \eta & -\xi \end{vmatrix} .$$

On a

$$V_{n-1}^{(2n,2n)}(0,1) = V_0^{(2n)}(0,1) = V^{(2n)} . \tag{0,23}$$

Par $\mathrm{Diag}(A_1^{(k_1)}, \ldots, A_r^{(k_r)})$ nous désignerons la matrice partitionnée carrée d'ordre $\sum\limits_\nu k_\nu$ dont la diagonale principale est composée des matrices $A_1^{(k_1)}, \ldots, A_r^{(k_r)}$ et le reste des éléments est égal à 0. Enfin posons

$$\mathrm{diag}\,(a_1, \ldots, a_n) \underset{df}{=} \mathrm{Diag}(|a_1|^{(1)}, \ldots, |a_n|^{(1)})$$

où $|a_k|^{(1)}$ sont des matrices d'ordre 1 (voir Lefschetz [5], p. 1). On a $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) = |\delta_{k,l}\, a_k|_{(k,l)}$.

Soit

(0,24) $$F = \mathrm{Diag}\,(V^{(k_1)}, \ldots, V^{(k_r)}),$$

alors il est facile de voir que

(0,25) $$F = F^*, \quad F = F^{-1}$$

Les minuscules grasses désigneront les vecteurs, c'est-à-dire des matrices à une colonne $\boldsymbol{c} = |c_k|_{(k)}^{(n,1)} = |c_1, \ldots, c_n| = |c_k|_{(k)}$ (voir Collar, Duncan, Frazer [3], p. 2).

**0,3.** S'il existe un vecteur $\boldsymbol{x} = |x_k|$ tel que $\sum_k |x_k| > 0$ et un nombre $\lambda \neq 0$ tel que

(0,31) $$A^{(n)}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\, \lambda$$

nous dirons que $\boldsymbol{x}$ est un *vecteur propre* de $A^{(n)}$ et $\lambda$ une *valeur propre* de $A$. Les valeurs propres de $A$ vérifient l'équation

(0,32) $$\det |A^{(n)} - \lambda E^{(n)}| = 0.$$

## § 1. Les matrices propres non généralisées.

**1,1.** Dans ce paragraphe nous allons supposer que $\det |A| \neq 0$ et que les diviseurs élémentaires de la matrice $A$ sont linéaires.

Commençons par l'étude du cas le plus simple, c'est-à-dire supposons que toutes les racines de (0,32)

(1,11) $$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

soient différentes. Ordonnons les selon une loi quelconque mais fixe, et posons

(1,12) $$K(A) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Avec nos hypothèses $K(A)$ sera la *matrice canonique complexe de* Jordan de $A$ (voir Aitken, Turnbull [1], p. 61). La matrice $K(A)$ étant diagonale, nous aurons sous nos hypothèses $\lambda_i \neq 0$ et

$$K^{-1}(A) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$$

(où $K^{-1}(A)$ désigne la matrice inverse $(C(A))^{-1}$) et

$$K(A) = K^*(A)$$

(où $K^*(A)$ désigne la matrice transposée $(K(A))^*$ de $K(A)$) et évidemment

$$K(A) = K(A^*).$$

Supposons qu'à la valeur propre $\lambda_l$ corresponde le vecteur propre $c^{(l)}$. Posons $c^{(l)} = |c_{kl}|_{(k)} = |c_{kl}|_{(k)}^{(n,1)}$ et

(1,13) $$C(A) \underset{df}{=} |c_{kl}|_{(k,l)}^{(n)}.$$

Nous appellerons $C(A)$ *matrice propre* de $A$.

Il est connu que si les valeurs $\lambda_l$ sont différentes, alors les $c^{(l)}$ sont linéairement indépendants donc

(1,14) $$\det |C(A)| \neq 0.$$

La matrice propre n'est pas définie univoquement, les vecteurs $c^{(l)}$ pouvant etre normés de différentes manières. Il est facile de voir que, si $h_l \neq 0$,

$$H = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n)$$

et si $C(A)$ est une matrice propre de $A$, alors $C(A) \cdot H$ est une matrice propre de $A$. Si nous prenons toutes les suites $h_1, \ldots, h_n$ possibles de nombres différentes de zéro, alors $C(A) \cdot H$ nous donnera toutes les matrices propres de $A$ possibles.

**1.2.** Supposons maintenant que (0,32) ait comme racines

(1,21) $$s_1, \ldots, s_r$$

de multiplicités

$$k_1, \ldots, k_r$$

respectivement. Supposons que les racines (1,21) soient ordonnées selon la meme loi que (1,11) et que

(1,22) $$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k_1} = s_1, \ldots, \lambda_{k_1 + \cdots + k_{r-1} + 1} = \cdots = \lambda_{k_1 + \cdots + k_{r-1} + k_r} = s_r.$$

Supposons que $K(A)$ soit définie par (1,12). Nous allons l'appeller *matrice canonique complexe de* Jordan de $A$.

Il est connu qu'avec l'hypothèse acceptée au début de ce paragraphe que tous les diviseurs élémentaires de $A$ sont linéaires, à chaque valeur propre $s_l$, $k_l$— uple correspondent $k_l$ vecteurs propres de $A$ linéairement indépendants. (C'est une suite du Théorème de Jordan, voir par exemple Aitken, Turnbull [1], p. 61). Bien que la démonstration de ce Théorème ne soit pas élémentaire, le calcul des vecteurs $c^{(1)}, \ldots, c^{(n)}$ est dans ce cas aussi simple que dans le cas du $n^0$ 1,1. Posons, de même qu'au $n^0$ 1,1,

(1,23) $$C(A) \underset{df}{=} |c_{kl}|_{(k,l)}^{(n)}.$$

Nous allons appeler $C(A)$ *matrice propre* de $A$ et nous voyons que $\det |C(A)| \neq 0$

La matrice $C(A)$ n'est pas définie univoquement. Il est facile de voir que, si $\det |H_l^{(k_l)}| \neq 0, l=1,\ldots,r$ et si nous posons

$$H = \mathrm{Diag}\,(H_1^{(k_1)},\ldots,H_r^{(k_r)})\,,$$

alors $C(A)\cdot H$ sont des matrices propres de $A$ et que nous pouvons obtenir ainsi toutes les matrices propres de $A$.

**1,3.** Il est facile de vérifier que si $C(A)$ est une matrice propre (définie au $n^0$ 1,1 ou bien au $n^0$ 1,2) alors

$$C^{-1}(A)\cdot A\cdot C(A) = K(A).$$

C'est-à-dire

(1,31) $$A\cdot C(A) = C(A)\cdot K(A)$$

Vu la ressemblance de (1,31) et de (0,31) nous avons introduit le nom de matrice propre pour $C(A)$. La condition (1,31) est verifiée par les matrices propres et seulement par les matrices propres.

Évidemment

(1,32) $$A^*\cdot C(A^*) = C(A^*)\cdot K(A^*)\,.$$

**1,4.** Vu

(1,41) $$K^*(A^*) = K(A) = K(A^*)$$

nous obtenons en transposant (1,31)

(1,42) $$C^*(A)\cdot A^* = K(A)\cdot C^*(A)\,.$$

de (1,32) il s'ensuit que

(1,43) $$A^{*-1}\cdot C(A^*) = C(A^*)\cdot K^{-1}(A)$$

Multiplions (1,42) à droite par (1,43)

(1,44) $$C^*(A)\cdot C(A^*) = K(A)\cdot C^*(A)\cdot C(A^*)\cdot K^{-1}(A)\,.$$

Posons pour simplifier la notation

$$K \underset{df}{=} K(A) = K(A^*)$$

$$H = |h_{kl}|_{(k,l)}^{(n)} = C^*(A)\cdot C(A^*)\,.$$

Alors (1,44) prend la forme

(1,45) $$H = K\cdot H\cdot K^{-1}\,.$$

Il est facile de calculer que

$$K\cdot H\cdot K^{-1} = |\lambda_k\,\lambda_l^{-1}\,h_{kl}|_{(k,l)}\,.$$

Donc, vu (1,45)

$$h_{kl} = \lambda_k \lambda_l^{-1} h_{kl},$$

c'est-à-dire

(1,46) $$(\lambda_k - \lambda_l) h_{kl} = 0.$$

Il nous faut considérer maintenant séparément les deux sous-cas.

**1,5.** Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soient différentes. Alors $\lambda_k - \lambda_l \neq 0$ pour $k \neq l$, donc vu (1,46) $h_{kl} = 0$ et $h_k \underset{df}{=} h_{kk}$ sont indéterminées (ou plutôt déterminées par les normes des $k$-ièmes colonnes de $C(A^*)$ et de $C(A)$. Vu (1,14) on a det $|H| \neq 0$, donc $h_k \neq 0$.

Nous avons donc obtenu le théorème

**Théorème I$^a$.** *Si toutes les valeurs propres de $A^{(n)}$ sont différentes, alors*

(1,51) $$C^*(A) \cdot C(A^*) = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n)$$

*où les nombres $h_k \neq 0$ dépendent des normes des colonnes de $C(A)$ et de $C(A^*)$.*

Ce Théorème est connu (voir Collar, Duncan, Frazer [3], p. 77), mais sa démonstration s'appuyait sur certaines propriétés de $\lambda$-matrices et n'était pas aussi élémentaire que la nôtre.

**1,6.** Supposons que $\overline{C}(A)$ soit une matrice propre de $A$ ayant des valeurs propres simples. Vu le Théorème I$^a$ nous pouvons supposer que

$$\overline{C}^*(A) \cdot C(A^*) = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, \overline{h}_n).$$

Posons

$$\overline{H} = \operatorname{diag}(h_1 \overline{h}_1^{-1}, \ldots, h_n \overline{h}_n^{-1}).$$

Nous aurons

$$H \cdot \overline{C}^*(A) \cdot C(A^*) = \overline{H} \cdot \operatorname{diag}(h_1, \ldots, \overline{h}_n) = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n) = H.$$

Nous voyons donc que le matrice propre (voir la remarque finale du n$^0$ 1,1)

$$C(A) = \overline{C}(A) \cdot \overline{H}$$

vérifie (1,51). Nous avons donc le

**Théorème I$^b$.** *Supposons que $A$ n'a que des valeurs propres simples. Pour toute matrice propre $C(A^*)$ et pour toute suite de nombres $h_1, \ldots, h_n$ différents de zero, il existe une matrice propre $C(A)$ telle que la formule (1,51) soit vérifiée.*

Nous pouvons admettre $h_k = 1$ pour $k = 1, \ldots, n$, nous avons donc le

**Corollaire I.** *Pour chaque matrice propre $C(A^*)$ il existe une matrice propre $C(A)$ telle que*

(1,61) $$C^*(A)\cdot C(A^*)=E$$

*et inversement.*

Evidemment la formule (1,61) équivaut à la formule

(1,62) $$C(A)=C^{*-1}(A^*).$$

**1,7.** Si $A$ est symétrique, c'est-a-dire si $A=A^*$, il existe une matrice propre $C(A)=C(A^*)$ orthogonale, c'est-à-dire telle que (1,61) soit vérifiée. La relation entre les matrices $C^*(A)$ et $C(A^*)$ exprimée par l'égalité (1,61) peut donc être dénommée une orthogonalité généralisée (voir Collar, Duncan, Frazer [3], p. 77).

L'interprétation géometrique de la formule (1,61) (à l'aide des angles entre les vecteurs propres des transformations linéaires $\bar{x}=Ax$ et $\bar{y}=A^*y$) est évidente.

Ayant en vue les généralisations ultérieures (voir § 2) remarquons que

$$C(K^*)=\mathrm{diag}(h_1,\ldots,h_n)$$

où $h_l\neq 0$, et que, inversement, chaque matrice $\mathrm{diag}(h_1,\ldots,h_n)$ ou $h_l\neq 0$ est une matrice $C(K^*)$, donc on peut poser

$$H=C(K^*).$$

**1,8.** Admettons le cas le plus général considéré dans ce paragraphe, c'est-à-dire supposons que les valeurs propres de $A$ aient une multiplicité quelconque, mais que les diviseurs élémentaires soient linéaires. Alors vu (1,22) il s'ensuit de (1,46)

$$h_{kl}=0 \quad \text{si} \quad \lambda_k\neq\lambda_l.$$

Nous avons donc le

**Théorème II$^a$.** *Si $A$ n'a que des diviseurs élémentaires linéaires, et si $k_j$ est la multiplicité de la valeur propre $s_j$, $j=1,\ldots,r$, alors*

(1,81) $$C^*(A)\cdot C(A^*)=\mathrm{Diag}(H_1^{(k_1)},\ldots,H_r^{(k_r)})$$

*où*

$$\det|H_j^{(k_j)}|\neq 0 \quad j=1,\ldots,r.$$

**1,9.** De même qu'au n° 1,6 nous allons démontrer le théorème réciproque.

Supposons que $\bar{C}(A)$ soit une matrice propre de $A$ quelconque et, vu le Théorème II$^a$, nous pouvons supposer que

$$\bar{C}^*(A)\cdot C(A^*)=\mathrm{Diag}(\bar{H}_1,\ldots,\bar{H}_r).$$

Posons
$$\overline{H} = \mathrm{Diag}\,(H_1 \cdot \overline{H}_1^{-1}, \ldots, H_r \cdot \overline{H}_r^{-1}).$$
Nous aurons
$$\overline{H} \cdot \overline{C}^*(A) \cdot C(A) = \overline{H} \cdot \mathrm{Diag}\,(\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_r) = \mathrm{Diag}\,(H_1, \ldots, H_r).$$
Nous voyons que la matrice propre (voir la remarque finale du $n^0$ 1,2)
$$C(A) = \overline{C}(A) \cdot \overline{H}$$
vérifie (1,81). Nous avons donc le

**Théorème II$^b$.** *Si $A$ n'a que des diviseurs élémentaires linéaires, $k_j$ est la multiplicité de la valeur propre $s_j$, et $H_1^{(k_1)}, \ldots, H_r^{(k_r)}$ est une suite de matrices telles que* det $|H_j^{(k_j)}| \neq 0, j = 1, \ldots, r$, *alors pour chaque matrice propre $C(A^*)$ il existe une matrice propre $C(A)$ telle que la formule* (1,81) *soit vérifiée.*

Nous pouvons admettre $H_j^{(k_j)} = E^{(k_j)}$. Alors $H = E^{(n)}$ et nous voyons que dans ce cas on a le

**Corollaire II.** *Pour chaque matrice propre $C(A^*)$ il existe une matrice propre $C(A)$ telle que les formules* (1,61) et (1,62) *soient vérifiées.*

La remarque finale du $n^0$ 1,7 s'applique *mutatis mutandis* aussi à notre cas.

Évidemment les Théorèmes II$^a$ et II$^b$ contiennent comme cas particulier les Théoremès I$^a$ et I$^b$ respectivement.

## § 2. Matrices propres généralisées.

**2,1.** Nous dirons que deux matrices carrées $A$ et $B$ sont semblables ($A \sim B$) si elles ont les mêmes diviseurs élémentaires.

Soit $\Gamma$ une classe de matrices carrées de même ordre. Supposons que si $A \epsilon \Gamma$ alors $A^* \epsilon \Gamma$. Nous appellerons $K(A)$ *matrice canonique généralisée dans la classe $\Gamma$* (ou bien tout court *matrice canonique*) de $A$, si elle est la valeur d'une fonction univoque $K$ qui fait correspondre à chaque matrice $A$, appartenant à $\Gamma$, une matrice $K(A)$ de la même classe $\Gamma$ et telle que:

$1^0$. A deux matrices semblables corresponde la même matrice. (C'est-à-dire si $A \sim B$ alors $K(A) = K(B)$).

$2^0$. La matrice canonique de $A$ soit semblable à $A$. (C'est-à-dire que $K(A) \sim A$).

Dans la suite nous allons supposer que la fonction $K$ est définie d'une manière arbitraire mais fixe (évidemment elle doit vérifier les conditions $1^0$ et $2^0$).

Vu $A \sim A^*$, on a

(2,11) $$K(A) = K(A^*).$$

Vu la condition $2^0$, nous avons $K(A) \sim A$, alors de la condition $1^0$ il vient

(2,12) $$K(K(A)) = K(A).$$

Il et connu (voir Bôcher [2], p. 283) que pour chaque $A$ tel que det $|A| \neq 0$ il existe au moins une matrice $C(A)$ telle que det $|C(A)| \neq 0$ et telle que

(2,13) $$C^{-1}(A) \cdot A \cdot C(A) = K(A)$$

ou bien

(2,14) $$A \cdot C(A) = C(A) \cdot K(A).$$

Les matrices $C(A)$ que nous allons appeler *matrices propres généralisées* (ou tout court *matrices propres*) de $A$ ne sont pas déterminées univoquement par le choix de la matrice $A$ et de la fonction $K$. Nous désignerons par $\Lambda(A)$ l'ensemble des matrices satisfaisant à (2,13).

Remarquons que si $K(A)$ est une matrice canonique généralisée alors $K^*(A)$ est aussi une matrice canonique généralisée (car, si $K(A)$ vérifie le conditions $1^0$ et $2^0$, alors $K^*(A)$ les vérifie aussi). Evidemment $K^*(A)$ diffère en général de $K(A)$.

**2,2.** Exemples:

(2,21). Pour la classe des matrices $A$ de même ordre ayant $n$ différentes valeurs propres et pour la classe de matrices ayant des diviseurs linéaires, les matrices $K(A)$ définies au $n^0$ $1{,}1^0$ au au $n^0$ 1,2 respectivement sont des matrices canoniques généralisées. Dans les mêmes cas les matrices $C(A)$ définies par (1,13) et par (1,23) respectivement sont des matrices propres généralisées. Il s'ensuit que l'emploi de la même notation et légitime.

Il est intéressant de comparer les formules (1,41) et (2,11).

(2,22). Supposons que la matrice $A$ ait comme diviseurs élémentaires, ordonnés selon une loi fixe

$$(\lambda - s_j)^{k_j} \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Posons

$$K_j = s_j E^{(k_j)} + U_1^{(k_j)}$$

alors

$$K_J(A) \underset{df}{=} \mathrm{Diag}(K_1, \ldots, K_r)$$

est une matrice canonique généralisée de $A$ dans la classe de toutes les matrices complexes ayant des déterminants $\neq 0$. (C'est la *matrice canoni-*

*que complexe de* J o r d a n, voir A i t k e n, T u r n b u l l [1], p. 61, ou M o s t o w s k i, S t a r k [6], p. 225).

Pour éviter des malentendus possibles, nous allons parfois désigner par $\boldsymbol{C}_J(\boldsymbol{A})$ les matrices propres généralisées de $\boldsymbol{A}$ qui vérifient (2,14) pour $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K}_J(\boldsymbol{A})$.

Les fonctions $\boldsymbol{K}_J(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{C}_J(\boldsymbol{A})$ sont des extensions des fonctions $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$ respectivement, dont nous parlions ci-dessus au (2,21), à la classe de toutes les matrices complexes du même ordre et ayant des déterminants non nuls.

(2,23). Supposons que la matrice réelle $\boldsymbol{A}$ ait comme diviseurs élémentaires ordonnés selon une loi fixe

$$\begin{array}{lll} (\lambda - s_j)^{k_j} & & j = 1, \dots, \nu \\ (\lambda - s_j)^{k_j 2} & \text{pour} & j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu \\ (\lambda - \bar{s}_j)^{k_j 2} & & j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu \end{array}$$

où $s_j = \lambda_j$ pour $j = 1, \dots, \nu$, $s_j = \varrho_j + i\sigma_j$ pour $j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu$, $\bar{s}_j = \varrho_j + - i\sigma_j$ pour $j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu$, les nombres $\lambda_j \neq 0, \varrho_j, \sigma_j > 0$ étant des nombres réels et $\nu + 2\mu = \sum_j k_j = n$. (Les nombres $k_j$ ne désignent pas ici la multiplicité des valeurs propres, mais le degré du diviseur élémentaire réel corespondant).

Ou bien supposons (ce qui revient au même) que la matrice réelle $\boldsymbol{A}$, ait comme diviseurs élémentaires réels, ordonnés selon une loi fixe:

$$\begin{array}{lll} (\lambda - \lambda_j)^{k_j} & & j = 1, \dots, \nu \\ & \text{pour} & \\ [(\lambda - \varrho_j)^2 + \sigma_j^2]^{k_j 2} & & j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu . \end{array}$$

Posons

$$\boldsymbol{K}_j = \begin{cases} \lambda_j \boldsymbol{E}^{(k_j)} + \boldsymbol{U}_1^{(k_j)} & j = 1, \dots, \nu \\ & \text{pour} \\ \boldsymbol{U}_0^{(k_j)}(\varrho_j, \sigma_j) + \boldsymbol{U}_2^{(k_j)} & j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu \end{cases}$$

Alors

$$\boldsymbol{K}_R(\boldsymbol{A}) \underset{df}{=} \operatorname{Diag}(\boldsymbol{K}_1, \dots, \boldsymbol{K}_{\nu+\mu})$$

est une matrice canonique généralisée de $\boldsymbol{A}$, dans la classe des matrices réelles (*matrice canonique réelle de* J o r d a n).

Pour éviter des malentendus possibles nous allons parfois désigner par $\boldsymbol{C}_R(\boldsymbol{A})$ les matrices propres de $\boldsymbol{A}$ qui vérifient (2,14) pour $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K}_R(\boldsymbol{A})$.

Les matrices $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$ de (2,21) ne sont pas un cas particulier des matrices $\boldsymbol{K}_R(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{C}_R(\boldsymbol{A})$ respectivement que dans le cas ou $\boldsymbol{A}$ n'a que des valeurs propres réelles.

Une autre matrice canonique dans la classe des matrices réelles est évidemment donnée par $K_R^*(A)$. Aussi d'autres matrices canoniques réelles se rencontrent fréquemment — voir, par exemple Aitken, Turnbull [1], p. 77, Jacobson [4], p. 97, Niemyckij, Stiepanow [7], p. 201—203, etc..

**2,3.** Remarquons que bien que l'existance de $C(A)$ dans le cas général résulte d'une théorie non élémentaire (Théorème de Jordan), le calcul de $C_J(A)$ est élémentaire et simple. Le calcul de $C_R(A)$ est plus compliqué mais aussi élémentaire.

**2,4.** Vu (2,11) et (2,12) on a évidemment:

$$K \underset{df}{=} K(A) = K(A^*) = K(K(A)) = K(K^*(A)). \tag{2,41}$$

Supposons que $C(A) \epsilon \Lambda(A)$.

De (2,14) il s'ensuit que

$$C^*(A) \cdot A^* = K^*(A) \cdot C^*(A).$$

Donc

$$C^*(A) \cdot A^* \cdot C^{-1*}(A) = K^*. \tag{2,42}$$

Supposons que $C(A^*) \epsilon \Lambda(A^*)$ et posons

$$H = C^*(A) \cdot C(A^*).$$

Alors

$$C(A^*) = C^{*-1}(A) \cdot H \tag{2,43}$$

et

$$C^{-1}(A^*) = H^{-1} \cdot C^*(A). \tag{2,44}$$

Vu (2,13)

$$K = K(A^*) = C^{-1}(A^*) \cdot A^* \cdot C(A^*).$$

Donc, vu (2,43) et (2,44) on obtient

$$K = H^{-1} C^*(A) \cdot A^* \cdot C^{-1*}(A^*) \cdot H.$$

De (2,42) il vient

$$K = H^{-1} \cdot K^* \cdot H.$$

De (2,13) et de la définition de l'ensemble $\Lambda(K^*)$ on voit que $H \epsilon \Lambda(K^*)$, c'est-à-dire que $C^*(A) \cdot C(A^*) \epsilon \Lambda(K^*)$.

Il existe dons une matrice $C(K^*)$ telle que

$$H = C^*(A) \cdot C(A^*) = C(K^*). \tag{2,45}$$

Nous avons donc démontré le

**Théorème III$^a$.** *Pour chaque couple de matrices $C(A^*)$ et $C(A)$ il existe une matrice $C(K^*)$ telle que la formule (2,45) soit vérifiée.*

**2,5.** Supposons maintenant que $C(A)\epsilon\Lambda(A)$ et que $C(K^*(A))\epsilon\Lambda(K^*(A))$. Vu (2,41) il s'ensuit

$$C^{-1}(K^*)\cdot K^*\cdot C(K^*)=K\,.$$

Sous nos suppositions la formule (2,42) reste vraie, donc

(2,51) $$C^{-1}(K^*)\cdot C^*(A)\cdot A^*\cdot C^{-1*}(A)\cdot C(K^*)=K\,.$$

Posons

$$C=C^{-1*}(A)\cdot C(K^*)\,.$$

Alors

$$C^{-1}=C^{-1}(K^*)\cdot C^*(A)\,.$$

Donc de (2,51) il vient

$$C^{-1}\cdot A^*\cdot C=K.$$

Il s'ensuit que $C\epsilon\Lambda(A^*)$, donc il existe une matrice $C(A^*)$ telle que

$$C(A^*)=C^{-1*}(A)\cdot C(K^*)\,.$$

C'est-à-dire

(2,52) $$C^*(A)\cdot C(A^*)=C(K^*)\,.$$

Il s'ensuit

(2,53) $$C^*(A^*)\cdot C(A)=C^*(K^*)\,.$$

Nous avons donc démontré le

**Théorème III$^b$.** *Pour chaque couple de matrices $C(K^*)$ et $C(A)$ il existe une matrice $C(A^*)$ telle que la formule* (2,52) *soit vérifiée.*

Donc pour trouver la forme de $H=C^*(A)\cdot C(A^*)$ il suffit de trouver la forme de $C(K^*)$. Pour avoir des généralisations des Théoremès I et II nous allons trouver la forme de cette matrice pour les matrices canoniques complexes de Jordan et pour les matrices canoniques réelles de Jordan. C'est-à-dire nous allons trouver la forme des matrices $C_J(K_J^*)$ et $C_R(K_R^*)$.

## § 3. Matrices canoniques complexes de Jordan.

**3,1.** Posons $H_J \underset{df}{=} C_J(K_J^*)$. Par definition (2,14) la matrice $C_J(K_J^*)$ vérifie l'équation

$$K_J^*\cdot C_J(K_J^*)=C_J(K_J^*)\cdot K(K_J^*)\,.$$

Vu (2,11) et (2,12) nous avons donc à résoudre l'équation à matrices

(3,11) $$K_J^*\cdot H_J=H_J\cdot K_J\,.$$

Posons $H_J=|h_{kl}|_{(k,l)}$, $h^{(l)}=|h_{kl}|_{(k)}$ et, pour ne pas employer trop d'indices, posons dans la suite de ce paragraphe

$$h(k,l)=h_{kl}\,,\qquad h(l)=|h(k,l)|_{(k)}=h^{(l)}\,.$$

L'équation à matrices (3,11) est équivalent à l'ensemble des équations vectorielles:

$$
\begin{aligned}
&K_j^* \boldsymbol{h}(1) = s_1 \boldsymbol{h}(1), \\
&\qquad K_j^* \boldsymbol{h}(l) = s_1 \boldsymbol{h}(l) + \boldsymbol{h}(l-1) \quad \text{pour } l = 2, \ldots, k_1; \\
&K_j^* \boldsymbol{h}(k_1+1) = s_2 \boldsymbol{h}(k_1+1), \\
&\qquad K_j^* \boldsymbol{h}(l) = s_2 \boldsymbol{h}(l) + \boldsymbol{h}(l-1) \quad \text{pour } l = k_1+2, \ldots, k_1+k_2; \\
(3,12)\quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&K_j^* \boldsymbol{h}(n-k_r+l) = s_r \boldsymbol{h}(n-k_r+1), \\
&\qquad K_j^* \boldsymbol{h}(l) = s_r \boldsymbol{h}(l) + \boldsymbol{h}(l-1) \quad \text{pour } l = n-k_r+2, \ldots, n;
\end{aligned}
$$

où la signification des nombres $s_1, \ldots, s_r$ et $k_1, \ldots, k_r$ est la même qu'au (2,22).

**3,2.** Developpons la première équation vectorielle (3,12) en équations scalaires

$$
(3,21)\quad
\begin{aligned}
0 &= 0 \\
h(1,1) &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
h(k_1-1,1) &= 0 \\
(s_2-s_1)\,h(k_1+1,1) &= 0 \\
h(k_1+1,1) + (s_2-s_1)\,h(k_1+2,1) &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h(k_1+k_2-1,1) + (s_2-s_1)\,h(k_1+k_2,1) &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(s_r-s_1)\,h(n-k_r+1,1) &= 0 \\
h(n-k_r+1,1) + (s_r-s_1)\,h(n-k_r+2,1) &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h(n-1,1) + (s_r-s_1)\,h(n,1) &= 0 .
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$h(1,1) = \cdots = h(k_1-1,1) = 0$$

et $h(k_1,1)$ est indéterminé. Posons $h(k_1,1) = a_{11}^{(k_1-1)}$.

Il faut distinguer deux sous-cas.

1). $s_1 \neq s_i$ pour $i = 2, \ldots, r$. Alors $h(k_i+1,1) = 0$, pour $i = 1, \ldots, r$ et, par induction, $h(i,1) = 0$ pour $i > k_1$.

2). Pour fixer les idées supposons que $s_1 = s_2$. Alors le second groupe d'équations (3,21) donnera

$$0 = 0, \quad h(k_1+1, 1) = 0, \ldots, h(k_1+k_2-1, 1) = 0$$

et la valeur de $h(k_1+k_2, 1)$ sera indéterminée. Posons, $h(k_1+k_2, 1) = a_{21}^{(k_1-1)}$.

3,3. Les autres équations du premier groupe de (3,12) donnent comme équations scalaires pour $i = 2, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} 0 &= h(1, i-1) \\ h(1, i) &= h(2, i-1) \\ &\cdots\cdots \\ h(k_1-1, i) &= h(k_1, i-1) \end{aligned}$$

(3,31)
$$\begin{aligned} (s_2-s_1)\, h(k_1+1, i) &= h(k_1+1, i-1) \\ h(k_1+1, i) + (s_2-s_1)\, h(k_1+2, i) &= h(k_1+2, i-1) \\ &\cdots\cdots \\ h(k_1+k_2-1, i) + (s_2-s_1)\, h(k_1+k_2, i) &= h(k_1+k_2, i-1) \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ (s_r-s_1)\, h(n-k_r+1, i) &= h(n-k_r+1, i-1) \\ h(n-k_r+1, i) + (s_r-s_1)\, h(n-k_r+2, i) &= h(n-k_r+2, i-1) \\ &\cdots\cdots \\ h(n-1, i) + (s_r-s_1)\, h(n, i) &= h(n, i-1). \end{aligned}$$

Pour les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{h}(2)$ nous obtenons

$$h(1, 2) = 0, \ldots, h(k_1-2, 2) = 0, \quad h(k_1-1, 2) = a_{11}^{(k_1-1)}$$

$h(k_1, 2)$ est indéterminé, posons $h(k_1, 2) = a_{11}^{(k_1-2)}$.

Calculons les valeurs de $h(l, 2)$ pour $l > k_1$.

1). Si $s_1 \neq s_i$, $i = 2, \ldots, r$ alors $h(i, 2) = 0$ pour $i > k_1$.

2). Si, par exemple, $s_1 = s_2$, alors de même que pour $\boldsymbol{h}(1)$ nous obtenons

$$h(k_1, 2) = 0, \ldots, h(k_1+k_2-2, 2) = 0, \quad h(k_1+k_2-1, 2) = a_{21}^{(k_1-1)},$$

$h(k_1+k_2, 2)$ est indéterminé, posons $h(k_1+k_2, 2) = a_{21}^{(k_1-2)}$.

Nous pouvons appliquer la même méthode pour calculer $\boldsymbol{h}(l)$ pour $l > 2$.

**3,4.** Si $s_2 = s_1$ et $k_2 < k_1$ nous nous heurtons à une complication. Les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{h}(k_2)$ sont données par

$$h(1, k_2) = 0, \ldots, h(k_1 - k_2 - 1, k_2) = 0, \quad h(k_1 - k_2, k_2) = a_{11}^{(k_1-1)}, \ldots$$

$$\ldots, h(k_1, k_2) = a_{11}^{(k_1-k_2)}$$

$$h(k_1 + 1, k_2) = a_{21}^{(k_1-1)}, \ldots, h(k_1 + k_2, k_2) = a_{21}^{(k_1-k_2)}. \tag{3,41}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Calculons $\boldsymbol{h}(k_2 + 1)$ de (3,31) pour $i = k_2 + 1$.
Vu (3,41) nous avons

$$\begin{aligned}
0 &= h(1, k_2) = 0 \\
h(1, k_2 + 1) &= h(2, k_2) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
h(k_1 - k_2 - 2, k_2 + 1) &= h(k_1 - k_2 - 1, k_2) = 0 \\
h(k_1 - k_2 - 1, k_2 + 1) &= h(k_1 - k_2, k_2) = a_{11}^{(k_1-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
h(k_1 - 1, k_2 + 1) &= h(k_1, k_2) = a_{11}^{(k_1-k_2)} \\
0 &= h(k_1 + 1, k_2) = a_{21}^{(k_1-1)} \\
h(k_1 + 1, k_2 + 1) &= h(k_1 + 2, k_2) = a_{21}^{(k_1-2)} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $a_{21}^{(k_1-1)} = 0$. Des calculs semblables montrent que $a_{21}^{(i)} = 0$ pour $i = k_1, k_2 + 1, \ldots, k_1 - 1$.

**3,5.** Nous pouvons ainsi obtenir le resultat suivant:

**Théorême IV$^a$.** *Chaque matrice appartenant à $\Delta(\boldsymbol{K}_J^*)$ c'est-à-dire chaque matrice*

$$\boldsymbol{H}_J = \boldsymbol{C}_J(\boldsymbol{K}_J^*)$$

*a la forme d'une matrice partitionnée $\boldsymbol{H}_J = [\boldsymbol{H}_{ij}^{(k_i, k_j)}]$ en $r^2$ sous-matrices, où*

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(k_i, k_j)} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \\ & \text{pour} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{k_{ij}-1} a_{ij}^{(l)} \, \boldsymbol{V}_i^{(k_i, k_j)} & \end{cases} \quad \begin{matrix} s_i \neq s_j \\ \\ s_i = s_j \end{matrix} \tag{3,51}$$

*$k_{ij} = \min|k_i, k_j|$ et $a_{ij}^{(l)}$ étant des nombres déterminés par le choix de la matrice propre $\boldsymbol{C}_J(\boldsymbol{K}_J^*)$ et tels que $\det|\boldsymbol{H}_J| \neq 0$.*

**3,6. Exemple.** Supposons que la matrice $\boldsymbol{K}_J$ ait comme diviseurs élémentaires $(\lambda - s_1)$, $(\lambda - s_2)$, $(\lambda - s_3)^2$ et $(\lambda - s_4)^3$, alors chaque matrice

$H_J = C_J(K_J^*) \in \Delta(K_J^*)$ aura la forme suivante (les zéros ne sont pas inscrits, ou sont remplacés par des points):

si tous les nombres $s_1, s_2, s_3, s_4$ sont différents

$$H_J = \left[\begin{array}{c|c|cc|ccc}
a_{11}^{(0)} & & & & & & \\
\hline
 & a_{22}^{(0)} & & & & & \\
\hline
 & & \cdot & a_{33}^{(1)} & & & \\
 & & a_{33}^{(1)} & a_{33}^{(0)} & & & \\
\hline
 & & & & \cdot & \cdot & a_{44}^{(2)} \\
 & & & & \cdot & a_{44}^{(2)} & a_{44}^{(1)} \\
 & & & & a_{44}^{(2)} & a_{44}^{(1)} & a_{44}^{(0)}
\end{array}\right]$$

et si $s_1 = s_2 \neq s_3 = s_4$

$$H_J = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & & & & & \\
\hline
a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & & & & & \\
\hline
 & & \cdot & a_{33}^{(1)} & \cdot & \cdot & a_{34}^{(1)} \\
 & & a_{33}^{(1)} & a_{33}^{(0)} & \cdot & a_{34}^{(1)} & a_{34}^{(0)} \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{44}^{(2)} \\
 & & \cdot & a_{43}^{(1)} & \cdot & a_{44}^{(2)} & a_{44}^{(1)} \\
 & & a_{43}^{(1)} & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(2)} & a_{44}^{(1)} & a_{44}^{(0)}
\end{array}\right]$$

**3,7.** De même qu'au § 1, il est facile de démontrer le théorème réciproque:

**Théorème IV$^b$.** *Chaque matrice partitionnée $H = [H_{ij}^{(k_i, k_j)}]$, telle que $H_{ij}^{(k_i,k_j)}$ vérifie (3,51) et det $|H| \neq 0$, est une matrice propre $C_J(K_J^*)$ c'est-à-dire appartient à la classe $\Delta(K_J^*)$.*

Comme la matrice $F = \mathrm{Diag}\,(V^{(k_1)}, \ldots, V^{(k_r)})$ vérifie la condition (3,51) et det $|F| = \pm 1 \neq 0$ on obtient vu le Théorème III$^b$ (et apres avoir transposé la formule obtenue — voir (2,53)) le corollaire suivant, ayant une certaine importance dans les applications:

**Corollaire IV:** *Pour chaque matrice propre $C_J(A)$ il existe une matrice propre $C_J(A^*)$ telle que*

$$C_J^*(A^*)\cdot C_J(A) = \mathrm{Diag}\,(V^{(k_1)}, \ldots, V^{(k_r)})\,. \tag{3,71}$$

3,8. Remarquons que les Théorèmes IV$^a$ et IV$^b$ contiennent comme cas particuliers les Théorèmes I$^a$, II$^a$ et I$^b$, II$^b$ respectivement et que la formule (3,71) contient comme cas particulier la formule (1,61) transposée.

## § 4. Matrices canoniques réelles de Jordan

4,1. Posons $H_R \underset{df}{=} C_R(K_R^*)$. Le calcul de $H_R$ est beaucoup plus pénible que celui de $H_J$. Par économie de place, nous n'allons effectuer le calcul que pour un exemple; cela nous permettra sufisamment expliquer la méthode à suivre dans le cas général.

Considérons les matrices semblables d'ordre 8, ayant comme diviseurs élémentaires réels (ordonnés selon notre loi fixe)

$$[\lambda-\lambda_1]^2, \qquad [(\lambda-\varrho_2)^2+\sigma_2^2], \qquad [(\lambda-\varrho_3)^2+\sigma_3^2]^2$$

où $\lambda_1$, $\varrho_i$, $\sigma_i > 0$ sont des nombres réels.

Alors

$$K_R = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1 E^{(2)} + U_1^{(2)},\ U^{(2)}(\varrho_2, \sigma_2),\ U^{(4)}(\varrho_3, \sigma_3) + U_2^{(4)}) =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & \\
\cdot & \lambda_1 & & & & & & \\
\hline
 & & \varrho_2 & -\sigma_2 & & & & \\
 & & \sigma_2 & \varrho_2 & & & & \\
\hline
 & & & & \varrho_3 & -\sigma_3 & 1 & \cdot \\
 & & & & \sigma_3 & \varrho_3 & \cdot & 1 \\
 & & & & \cdot & \cdot & \varrho_3 & -\sigma_3 \\
 & & & & \cdot & \cdot & \sigma_3 & \varrho_3
\end{array}\right]$$

Nous avons à resoudre l'équation à matrices

$$K_R^*\cdot H_R = H_R\cdot K_R\,. \tag{4,11}$$

La méthode à suivre ressemblera à celle du § 3.

4,2. Soit $H=[h_{ik}]$, $h^{(k)}=[h_{ik}]_{(i)}$. En remplaçant l'équation à matrices (4,11) par des équations vectorielles, nous obtenons pour les vecteurs $h^{(5)}, h^{(6)}, h^{(7)}$ et $h^{(8)}$ le système d'équations

$$
\begin{aligned}
K_R^* h^{(5)} &= \varrho_3 h^{(5)} + \sigma_3 h^{(6)} \\
K_R^* h^{(6)} &= -\sigma_3 h^{(5)} + \varrho_3 h^{(6)} \\
K_R^* h^{(7)} &= h^{(5)} + \varrho_3 h^{(7)} + \sigma_3 h^{(8)} \\
K_R^* h^{(8)} &= h^{(6)} - \sigma_3 h^{(7)} + \varrho_3 h^{(8)}.
\end{aligned}
\tag{4,21}
$$

Calculons les 4 dernières coordonnées des vecteurs $h^{(5)}, h^{(6)}$. Les deux premières équations du système (4,21) fournissent pour eux 8 équations scalaires:

$$
\begin{aligned}
\sigma_3 h_{65} &= \sigma_3 h_{56} \\
-\sigma_3 h_{55} &= \sigma_3 h_{66} \\
h_{55} + \sigma_3 h_{85} &= \sigma_3 h_{76} \\
h_{65} - \sigma_3 h_{75} &= \sigma_3 h_{86}
\end{aligned}
\tag{4,22}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_3 h_{66} &= -\sigma_3 h_{55} \\
-\sigma_3 h_{56} &= -\sigma_3 h_{65} \\
h_{56} + \sigma_3 h_{86} &= -\sigma_3 h_{75} \\
h_{66} - \sigma_3 h_{76} &= -\sigma_3 h_{85}.
\end{aligned}
\tag{4,23}
$$

Les deux premières équations de (4,22) et de (4,23) donnent

$$h_{65} = h_{56}, \quad -h_{55} = h_{66}.$$

En posant ces valeurs dans les troisièmes et quatrièmes équations des systèmes (4,22) et de (4,23) et en les additionnant, on obtient

$$h_{55} = 0 = h_{65}, \quad h_{85} = h_{76}, \quad -h_{75} = h_{86}.$$

Posons

$$h_{75} = \beta_{33}^{(1)}, \quad h_{85} = \alpha_{33}^{(1)}.$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
&h_{55} = 0, \quad h_{65} = 0, \quad h_{75} = \beta_{33}^{(1)}, \quad h_{85} = \alpha_{33}^{(1)} \\
&h_{56} = 0, \quad h_{66} = 0, \quad h_{76} = \alpha_{33}^{(1)}, \quad h_{86} = -\beta_{33}^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{4,24}
$$

Vu (4,24) la troisième et la quatrième équation (4,21) donnent 8 équations pour les 4 dernières coordonnées des vecteurs $h^{(7)}$, $h^{(8)}$:

$$
(4,25)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_3 h_{67} &= \sigma_3 h_{58} \\
-\sigma_3 h_{57} &= \sigma_3 h_{68} \\
h_{57} + \sigma_3 h_{87} &= \sigma_3 h_{78} + \beta_{33}^{(1)} \\
h_{67} - \sigma_3 h_{77} &= \sigma_3 h_{88} + \alpha_{33}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
(4,26)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_3 h_{68} &= -\sigma_3 h_{57} \\
-\sigma_3 h_{58} &= -\sigma_3 h_{67} \\
h_{58} + \sigma_3 h_{88} &= -\sigma_3 h_{77} + \alpha_{33}^{(1)} \\
h_{68} - \sigma_3 h_{78} &= -\sigma_3 h_{87} - \beta_{33}^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Les deux premières équations des systèmes (4,25) et (4,26) donnent

$$h_{67} = h_{58}, \quad -h_{57} = h_{68}.$$

Les troisièmes et quatrièmes équations des systèmes (4,25) et (4,26) donnent

$$h_{58} = \alpha_{33}^{(1)}, \quad h_{57} = \beta_{33}^{(1)}, \quad h_{78} = h_{87}, \quad -h_{77} = h_{88}.$$

En posant $h_{77} = \beta_{33}^{(0)}$, $h_{78} = \alpha_{33}^{(0)}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
&h_{57} = \beta_{33}^{(1)}, \quad && h_{67} = \alpha_{33}^{(1)}, \quad && h_{77} = \beta_{33}^{(0)}, \quad && h_{87} = \alpha_{33}^{(0)} \\
&h_{58} = \alpha_{33}^{(1)}, && h_{68} = -\beta_{33}^{(1)}, && h_{78} = \alpha_{33}^{(0)}, && h_{88} = -\beta_{33}^{(0)}.
\end{aligned}
$$

**4,3.** Calculons $h_{ik}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, et $k = 5, 6, 7, 8$. Pour $k = 5, 6$ de (4,21) nous obtenons

$$
(4,31)\qquad
\begin{aligned}
(\varrho_2 - \varrho_3) h_{35} - \sigma_3 h_{36} + \sigma_2 h_{45} &= 0 \\
\sigma_3 h_{35} + (\varrho_2 - \varrho_3) h_{36} + \sigma_2 h_{46} &= 0 \\
-\sigma_2 h_{35} + (\varrho_2 - \varrho_3) h_{45} - \sigma_3 h_{46} &= 0 \\
-\sigma_2 h_{36} + \sigma_3 h_{45} + (\varrho_2 - \varrho_3) h_{46} &= 0.
\end{aligned}
$$

Il est facile de calculer le déterminant de ce système

$$D = (\varrho_2 - \varrho_3)^4 + 2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)(\varrho_2 - \varrho_3)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)^2.$$

Il faut considérer quelques sous-cas.

1). $\varrho_2 \neq \varrho_3$. Alors $D \neq 0$ et (4,31) ne possède que des solutions banales

2). $\varrho_2 = \varrho_3$. Alors $D = (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)^2$.

2,1). Si $\sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$ — c'est-à-dire avec notre hypothèse $\sigma_i > 0$ — si $\sigma_2 \neq \neq \sigma_3$. Alors $D \neq 0$ et (4,31) n'à que des solutions banales.

Donc si $\lambda_2 = \varrho_2 + i\sigma_2 \neq \varrho_3 + i\sigma_3$, alors $h_{ij} = 0$ pour $i = 3,4$ et $j = 5,6$.

2,2). Si $\varrho_2 = \varrho_3$ et $\sigma_2 = \sigma_3$ c'est-à-dire si $\lambda_2 = \lambda_3$ on a $D = 0$. Alors de (4,31) il s'ensuit

$$h_{35} = -h_{46}, \quad h_{36} = h_{45}.$$

De la troisième et quatrième équation vectorielle (4,21) nous obtenons des équations scalaires pour $h_{ij}, i = 3,4\ j = 5,6$. De même qu'au $n^0$ 4,2, nous aurons $h_{35} = 0 = h_{45}$ et

$$h_{37} = -h_{48}, \quad h_{38} = h_{47}.$$

Pour déterminer $h_{1i}, h_{1i}, i = 5,6,7,8$ on obtient un système linéaire homogène ayant comme déterminant

$$D_1 = (\lambda_1 - \varrho_3)^2 + \sigma_3^2 > \sigma_3^2 > 0.$$

Donc

$$h_{1i} = 0 = h_{2i}, \quad i = 5,6,7,8.$$

**4,4.** Pour calculer $\boldsymbol{h}^{(1)}, \boldsymbol{h}^{(2)}, \boldsymbol{h}^{(3)}, \boldsymbol{h}^{(4)}$ nous obtenons de (4,11) un système linéaire de quatre équations vectorielles. Ce système ne contient pas les inconnues $\boldsymbol{h}^{(i)}$ pour $i = 5,6,7,8$.

**4,5.** En exécutant tous ces calculs on obtient la forme des éléments de $\Delta(\boldsymbol{K}_k^*)$.

Si l'on suppose $\lambda_2 = \varrho_2 + i\sigma_2 \neq \varrho_3 + i\sigma_3 = \lambda_3$ alors

$$\boldsymbol{H}_R = \left|\begin{array}{cc:cc:cccc}
\cdot & \alpha_{11}^{(1)} & & & & & & \\
\alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{11}^{(0)} & & & & & & \\
\hdashline
 & & \beta_{22}^{(0)} & \alpha_{22}^{(0)} & & & & \\
 & & \alpha_{22}^{(0)} & -\beta_{22}^{(0)} & & & & \\
\hdashline
 & & & & \cdot & \cdot & \beta_{33}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} \\
 & & & & \cdot & \cdot & \alpha_{33}^{(1)} & -\beta_{33}^{(1)} \\
 & & & & \beta_{33}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} & \beta_{33}^{(0)} & \alpha_{33}^{(0)} \\
 & & & & \alpha_{33}^{(1)} & -\beta_{33}^{(1)} & \alpha_{33}^{(0)} & -\beta_{33}^{(0)}
\end{array}\right|$$

et si l'on suppose $\lambda_2 = \lambda_3$ alors.

$$H_R = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
\cdot & \alpha_{11}^{(1)} & & & & & & \\
\alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{11}^{(0)} & & & & & & \\
\hline
 & & \beta_{22}^{(0)} & \alpha_{22}^{(0)} & \cdot & \cdot & \beta_{23}^{(0)} & \alpha_{23}^{(0)} \\
 & & \alpha_{22}^{(0)} & -\beta_{22}^{(0)} & \cdot & \cdot & \alpha_{23}^{(0)} & -\beta_{23}^{(0)} \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{33}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{33}^{(1)} & -\beta_{33}^{(1)} \\
 & & \beta_{32}^{(0)} & \alpha_{32}^{(0)} & \beta_{33}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} & \beta_{33}^{(0)} & \alpha_{33}^{(0)} \\
 & & \alpha_{32}^{(0)} & -\beta_{32}^{(0)} & \alpha_{33}^{(1)} & -\beta_{33}^{(1)} & \alpha_{33}^{(0)} & -\beta_{33}^{(0)}
\end{array}\right]$$

où les nombres $\alpha_{ij}^{(k)}$, $\beta_{ij}^{(k)}$ sont déterminés par $\boldsymbol{C}_R(\boldsymbol{K}_R^*)$ et tels que $\det|\boldsymbol{H}_R| \neq 0$. (Il est intéressant de comparer la forme de $\boldsymbol{H}_R$ et de $\boldsymbol{H}_J$ — voir $n^0$ 3,6).

**4,6.** Dans le cas général il suffit de modifier un peu les calculs de $n^0$ 4,3. En effet, il faut employer la méthode des éléminations successives comme au $n^0$ 4,2. (Le calcul direct du déterminant $D$ serait trop compliqué dans le cas général).

Nous pouvons obtenir ainsi le Théorème:

**Théorème V$^{\text{a}}$.** *Supposons que $\boldsymbol{K}_R$ ait comme diviseurs élémentaires réels*

$$(4.61)\qquad \begin{array}{ccc} (\lambda - \lambda_j)^{k_j} & & j = 1, \ldots, \nu \\ & \textit{pour} & \\ [(\lambda - \varrho_j)^2 + \sigma_j^2]^{k_j/2} & & j = \nu + 1, \ldots, \nu + \mu \end{array}$$

*où $\lambda_j$, $\varrho_j$, $\sigma_j > 0$ sont des nombres réels ($n = \nu + 2\mu$).*

*Posons*

$$s_j = \begin{cases} \lambda_j & \\ & \textit{pour} \\ \varrho_j + i\,\sigma_j & \end{cases} \quad \begin{array}{l} j = 1, \ldots, \nu \\ \\ j = \nu + 1, \ldots, \nu + \mu . \end{array}$$

*Alors chaque matrice appartenant à $A(\boldsymbol{K}_R^*)$ c'est-à-dire chaque matrice*

$$\boldsymbol{H}_R = \boldsymbol{C}_R(\boldsymbol{K}_R^*)$$

*a la forme d'une matrice partitionnée* $H_R = |H_{ij}^{(k_i,k_j)}|$ *en* $(\nu+\mu)^2$ *sous--matrices, où*

$$(4,62)\qquad H_{ij}^{(k_i,k_j)} = \begin{cases} 0 & s_i \neq s_j \\ \sum_{l=0}^{k_{ij}-1} a_{ij}^{(l)}\, V_l^{(k_i,k_j)} & \text{pour} \quad s_i = s_j, \quad i \leqslant \nu \\ \sum_{l=0}^{k_{ij}-1} V_l^{(k_i,k_j)}\,(\beta_{ij}^{(l)}, a_{ij}^{(l)}) & s_i = s_j, \quad i > \nu \end{cases}$$

$k_{ij} = \min|k_i, k_j|$, *et* $a_{ij}^{(l)}, \beta_{ij}^{(l)}$ *sont des nombres déterminés par le choix de la matrice propre* $C_R(K_R^*)$ *et tels que* $\det|H_R| \neq 0$.

**4,7.** Il est facile de demontrer le Théorème reciproque:

**Théorème V**$^{\mathrm{b}}$**.** *Supposons que* $K$ *ait comme diviseurs elementaires réels* (4,61). *Alors chaque matrice partitionnée* $H_R = [H_{ij}^{(k_i,k_j)}]$, *où les matrices* $H_{ij}^{(k_i,k_j)}$ *vérifient* (4,62) *et* $\det|H| \neq 0$ *est une matrice propre* $C_R(K_R^*)$, *c'est-à-dire appartient à la classe* $\Delta(K_R^*)$.

Vu (0,23), (0,25) et puisque la matrice $F = \mathrm{Diag}(V^{(k_1)}, \ldots, V^{(k_{\nu+\mu})})$ vérifie la condition (4,62) et $\det|F| \neq 0$, on obtient du Théorème III$^{\mathrm{b}}$ le corollaire suivant:

**Corollaire V.** *Pour chaque matrice propre* $C_R(A)$ *il existe une matrice propre* $C_R(A^*)$ *telle que*

$$(4,71)\qquad C_R^*(A^*)\cdot C_R(A) = \mathrm{Diag}(V^{(k_1)}, \ldots, V^{(k_{\nu+\mu})}).$$

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Aitken A. C., Turnbull H. W., *Theory of canonical matrices*, London 1952.
[2] Bôcher M., *Introduction to higher algebra*, New York 1947.
[3] Collar A. R., Duncan W. J., Frazer R. A., *Elementary matrices*, Cambridge 1938.
[4] Jacobson N., *Lectures in abstract algebra*, vol. II, New York 1953.
[5] Lefschetz S., *Lectures in differential equations*, Princeton 1948.
[6] Mostowski A., Stark M., *Algebra Wyższa*, t. III, Warszawa 1954.
[7] Niemyckij W. W., Stiepanow W. W., *Kaczestwiennaja tieorija diffierencjalnych urawnienij*, Moskwa 1949.

## Streszczenie

Przez macierz *kanoniczną uogólnioną* w klasie $\Gamma$ będziemy rozumieli wartość pewnej funkcji przypisującej każdej macierzy $A$ należącej do $\Gamma$ pewną macierz $K(A)$ należącą do tej samej klasy i taką, że $1^0$ dwu macierzom podobnym $A$ i $B$ odpowiada ta sama macierz kanoniczna $K(A) = K(B)$, $2^0$ $K(A)$ jest podobna do $A$.

Jak wiadomo istnieje taka (niejednoznacznie wyznaczona) macierz $C(A)$ — zwana *uogólnioną macierzą własną* — że

$$C^{-1}(A) \cdot A \cdot C(A) = K(A).$$

Wykazuję, że dla każdej pary macierzy $C(A^*)$ i $C(A)$ istnieje macierz $C(K^*(A))$, taka, że

$$C(K^*(A)) = C^*(A) \cdot C(A^*) \tag{1}$$

i naodwrót do każdej pary macierzy $C(K^*(A))$ i $C(A)$ istnieje taka macierz własna $C(A^*)$, że (1) jest spełnione.

Jeśli wartości własne macierzy $A$ są pojedyńcze, a $K(A)$ jest macierzą kanoniczną zespoloną Jordana, to wtedy, jak wiadomo, $C(A)$ jest macierzą własną $A$ (to jest jej kolumny są wektorami własnymi macierzy $A$). Wiadomo, że wtedy $C(K^*(A))$ jest macierzą przekątniową. Uogólniając ten wynik na dowolne macierze kwadratowe, pokazuję, że gdy $K$ jest macierzą kononiczną zespoloną Jordana $K_J$ lub też macierzą kanoniczną rzeczywistą Jordana $K_R$ to wtedy macierz $C(K^*(A))$ jest zbudowana w pewien sposób z dość prostych podmacierzy i naodwrót, każda macierz w ten sposób zbudowana jest jakąś macierzą $C(K^*(A))$.

W szczególności dla każdego $C(A^*)$ istnieje $C(A)$ takie, że

$$C^{-1*}(A^*) = C(A) \cdot F \tag{2}$$

gdzie $F$ jest uogólnioną macierzą przekątniową, mająca w okienkach głównych macierze rzędu $m$ typu $V^{(m)} = |\delta_{m+1,\nu+\mu}|_{(\nu,\mu)}$ gdzie $\delta_{ik}$ są deltami Kroneckera.



## Резюме

Под *обобщенной канонической матрицей* в классе $\Gamma$ будем подразумевать значение некоторой функции, которая каждой матрице $A$, принадлежащей к $\Gamma$, приупочивает некоторую матрицу $K(A)$, принадлежащую к тому-же классу и при том такую, что $1^0$ двум подобным матрицам $A$ и $B$ соответвует та-же каноническая матрица: $K(A) = K(B)$; $2^0$ $K(A)$ подобна матрице $A$.

Как известно, существует такая (неоднозначно определённая) матрица $C(A)$, называемая *обобщённой собственной матрицей*, что

$$C^{-1}(A)\cdot A\cdot C(A)=K(A).$$

Я показываю, что для всякой пары матриц $C(A^*)$ и $C(A)$ существует матрица $C(K^*(A))$ такая, что

$$C(K^*(A))=C^*(A)\cdot C(A^*) \tag{1}$$

и обратно, для всякой пары матриц $C(K^*(A))$ и $C(A)$ существует такая собственная матрица $C(A)$, что равенство (1) исполнено.

Если собственные значениа матрицы $A$ однократны, а $K(A)$ каноническая комплексная матрица Жордана, то, как известно, $C(A)$ является собственной матрицей $A$ (т.-е. её колонны представляют собственные векторы матрицы $A$). Известно, что тогда $C(K^*(A))$ есть диагональная матрица. Обобщая этот результат на произвольные квадратные матрицы, я показываю, что, когда $K$ есть каноническая комплексная матрица Жордана $K_J$, или действительная каноническая матрица Жордана $K_R$, то и матрица $C(K^*(A))$ построена известным образом из довольно простых подматриц, и обратно всякая так построенная матрица есть некоторая матрица $C(K^*(A))$.

В частности, для всякого $C(A^*)$ существует $C(A)$ такая, что

$$C^{1-*}(A^*)=C(A)\cdot F \tag{2}$$

где $F$ есть обобщенная диагональная матрица, имеющая в главных окошках матрицы порядка $m$ типа $V^{(m)}=|\delta_{m+1,\nu+\mu}|_{(\nu,\mu)}$ при чём $\delta_{ik}$ суть дельты Кронекера.