ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VIII, 9 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki III Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Quelques exemples de l'allure asymptotique des solutions d'équations différentielles

Kilka przykładów asymptotycznego zachowania się rozwiązań równań różniczkowych

Несколько примеров асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений

Depuis 80 ans (voir Poincaré [22], [23] Lapounoff [10] on s'occupe des propriétés asymptotiques des solutions d'équations (ou de systèmes d'équations) diférentielles ordinaires d'ordre n. Dans une longue serie de travaux divers auteurs on établi des théorèmes moyennant des hypothèses suffisantes de plus en plus faibles. Il est temps d'étudier — au moins dans les cas les plus simples ($n=1$ ou $n=2$) — quelles sont les hypothèses *les plus faibles possibles*, qui entraînent diverses propriétés asymptotiques des solutions et de démontrer à l'aide de contre-exemples lesquelles de ces hypothèses sont indispensables, ce qui est le but du présent travail.

1. Notions préliminaires. Soit l'équation différentielle ordinaire, d'ordre n, *linéaire*, non singulière:

$$x^{(n)} = a_n(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_2(t)\, x' + a_1(t)\, x + f(t) \tag{1,1}$$

ou bien une équation plus générale, *non linéaire*:

$$x^{(n)} = a_n(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_2(t)\, x' + a_1(t)\, x + d(x, x', \dots, x^{(n-1)}, t) + f(t) \tag{1,2}$$

où

$$d(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$$

Nous supposons, ici et dans la suite, que toutes les fonctions sont définies pour $t \geqslant 0$ (ce n'est que dans le cas contraire que le domaine d'existance des fonctions sera donné explicitemment.) La fonction $d(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ est définie pour $t \geq 0$ et pour toutes les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ (ou bien pour pour toutes les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ assez petits absolument). En plus nous allons supposer que toutes les fonctions sont continues dans leurs domaines d'existance.

Nous dirons que l'équation (1,2) a la propriété:

$\mathbf{B}_k$ si elle possède une famille à k paramètres exactement de solutions *bornées.*

$\mathbf{O}_k$ si elle possède une famille à k paramètres exactement de solutions *tendant vers zéro.*

$\mathbf{E}_k$ si elle possède une famille à k paramètres exactement de solutions *ε-bornées pour $\varepsilon > 0$*, c'est-à-dire de solution $x(t)$ telles que

$$\lim_{t \to \alpha} x(t) \exp - \varepsilon t = 0$$

pour chaque $\varepsilon > 0$.

$\mathbf{B}_k(\varphi)$ si elle possède une famille à k paramètres exactement de solutions $x(t)$ telles que l'expression

$$x(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)$$

est *bornée* pour chaque $\varepsilon > 0$.

$\mathbf{O}_k(\varphi)$ si elle possède une famille à k paramètres exactement de solutions $x(t)$ telles que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0$$

pour chaque $\varepsilon > 0$.

(La fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ doit être monotone par rapport à t — voir § 7. Une famille à 0 *paramètres* est une famille contenant exactement *un élément).* Evidemment

$$\mathbf{O}_k(\varepsilon \hat{t}) = \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{O}_k(\hat{c}) = \mathbf{O}_k \text{ et } \mathbf{B}_k(\hat{c}) = \mathbf{B}_k$$

où $\hat{c}$ est une fonction constante.

Soit l'équation algébrique en λ (voir Cesari [6])

$$\lambda^n - a_n(t)\lambda^{n-1} - ... - a_2(t)\lambda - a_1(t) = 0 \tag{1,3}$$

Elle admet exactement n solutions

$$\lambda_i = \lambda_i(a_1, a_2, ..., a_n) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Nous allons appeler *cellule de rang k* et désigner par $Z_k^{(n)}$ l'ensemble de l'espace $E = \{a_1, ..., a_n\}$ à n dimensions, pour lequel exactement k fonctions

$$\mathrm{R}' \lambda_i(a_1, ..., a_n)$$

sont *non positives* ($\mathrm{R}'\lambda$ *partie réelle de* λ).

Les frontières des cellules $Z_k^{(n)}$ sont constituées par des portions de surfaces

$$R' \lambda_i (a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemples:

1⁰ $n = 1$. E est une droite et

$$Z_0^{(1)} = \underset{a_1}{E} |a_1 > 0| \qquad Z_1^{(1)} = \underset{a_1}{E} |a_1 < 0|$$

2⁰ $n = 2$. E est un plan et

$$Z_0^{(2)} = \underset{|a_1, a_2|}{E} |a_1 < 0, a_2 > 0|$$

(1,4) $$Z_1^{(2)} = \underset{|a_1, a_2|}{E} |a_1 > 0| + \underset{|a_1, a_2|}{E} |a_1 = 0, a_2 > 0|$$

$$Z_2^{(2)} = \underset{|a_1, a_2|}{E} |a_1 < 0, a_2 < 0|$$

3⁰ $n = 3$. E est une espace à trois dimensions et, par exemple, $Z_3^{(3)}$ a comme frontière un morceau *de plan* et une partie d'un *paraboloïde hyperbolique.*

La courbe de l'espace E représentée par les équations paramétriques

(1,5) $$a_i = a_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

sera désignée par K.

2. Aperçu sur les résultats obtenus jusqu'à présent. Si

(2,1) $$\lim_{t \to \infty} a_i(t) = \bar{a}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ou si

(2,2) $$\int_0^\infty |a_i(t) - \bar{a}_i| \, dt < +\infty \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

alors on dit que (1,1) est une équation à *coefficients presque constants.*

On peut montrer (voir, par exemple, P e y o v i t c h [21] et T a t a r k i e w i c z [29]) que si $|\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n| \in Z_k^{(n)}$ et f est *ε-bornée* pour $\varepsilon > 0$, alors l'équation (1,1) à coefficients presque constants possède la propriété E_k. (Des résultats semblables sont valables aussi pour certaines classes d'équations non linéaires (1,2).)

Pour que (1,1) possède la propriété B_k (ou O_k) il faut supposer non seulement que f est *bornée* (ou bien que $f \to 0$), mais aussi que $|\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n| \in I' Z_k^{(n)}$ (où $I' Z$ désigne *l'intérieur* de l'ensemble Z). Si l'on veut retenir seulement l'hypothèse $|\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n| \in Z_k^{(n)}$ alors il faut faire des hypothèses supplémentaires sur la manière dont les fonctions $a_i(t)$ convergent vers $\bar{a}_i$ et f tend vers zéro.

Ce n'est que récemment que l'on a abordé l'étude des équations dont les coefficients ne sont pas périodiques ou presque constants. (voir L e w i s [**13**], S t a r ż y ń s k i [**25**], [**26**], T a t a r k i e w i c z [**28**] V i n o g r a d [**30**].

Les exemples suggèrent que, si $f(t)\exp - \varepsilon t \to 0$ pour $\varepsilon > 0$ alors *pour que* (1,1) *ait la propriété* $\mathbf{E}_k$, *il suffit de supposer que la courbe K définie par* (1,5) *vérifie la condition* $K \subset \mathrm{I}' Z_k^{(n)}$ et si $f \to 0$ ou si f est bornée alors *pour qu'elle ait la propriété* $\mathbf{O}_k$ *ou* $\mathbf{B}_k$ *il suffit que K ne se rapproche pas indéfiniment de la frontière de* $Z_k^{(n)}$ c'est-à-dire qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|\mathrm{R}' \lambda_i (a_1(t), \ldots, a_n(t))| \geqslant \delta > 0$$

(Il faut — peut être — supposer en plus que K est bornée, mais les résultats de N a r d i n i [**15**] et T a t a r k i e w i c z [**28**] permettent d'espérer que cette dernière supposition est superflue).

A prèsent nous ne disposons pas encore pour $n \geqslant 2$ de theorèmes fondés sur des hypothèses aussi faibles que les exemples le suggèrent. (Par exemple, dans le travail T a t a r k i e w i c z [**28**] la cellule $Z_2^{(2)}$ est divisée en deux par une parabole, et K doit être bornée. Dans le travail de S t a r ż y ń s k i [**25**] $Z_2^{(2)}$ est remlacé par un rectangle dont les frontières peuvent être assez éloignées des droites $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$.)

Des exemples (exemples A et G) montrent que si $K \subset \mathrm{F}' Z_k^{(n)}$ (où $\mathrm{F}' Z$ désigne la *frontière* de l'ensemble Z), dans (1,1) peut *ne pas posséder* la propriété $\mathbf{E}_k$, et si $K \subset Z_k^{(n)} + Z_i^{(n)}$ alors (1,1) peut ne pas posséder ni la propriété $\mathbf{E}_k$ ni la propriété $\mathbf{E}_i$. De même avec les propriétés $\mathbf{B}_k$.

Les équations non linéaires sont encore moins étudiées. Jusqu'à présent on ne s'est occupé (sauf T a t a r k i e w i c z [**28**]) que des équations dont la partie linéaire est à coefficients presque constants. De résultats partiels (B e l l m a n [**4**], L e v i s o n [**12**], T a t a r k i e w i c z [**28**], W e y l [**36**]) suggèrent que si la courbe K définie par (1,5) vérifie les mêmes conditions que dans le cas linéaire et l'hypothèse

$$|d(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a(|x_1| + \ldots + |x_n|) \tag{2,3}$$

(où a est une constante assez petite, ou bien une fonction convergeant vers zéro, ou bien une fonction intégrable dans $\langle 0, +\infty))$ est vérifiée, alors (1,2) a la propriété $\mathbf{B}_k$.

Ce n'est que pour les équations non linéaires vérifiant (2,3) (équations *presque linéaires*) qu'on peut espérer d'obtenir des résultats semblables au cas linéaire. (La relation entre la propriété $\mathbf{B}_n$ des équations linéaires et des équations non linéaires a étudiée S z m y d t [**27**]).

Il est évident que tous ces résultats devraient s'appliquer — mutatis mutandis — aux *systèmes* d'équations différentielles.

Dans la suite nous allons nous occuper (pour $n = 1$ ou ou $n = 2$) des hypothèses suffisantes les plus faibles, pour que (1,1) ou (1,2) possède la propriété $\mathbf{B}_k$, $\mathbf{O}_k$, $\mathbf{E}_k(\varphi)$ ou $\mathbf{O}_k(\varphi)$. Ces résultats vont rendre plausible la présomption que nous avons emise ci-dessus (voir p. 108).

3. Les solutions ε - bornées pour $\varepsilon > 0$. Soit l'équation

$$\dot{x} = [a(t) + b(t)]\, x + f(t) \tag{3,1}$$

(La forme $a(t) + b(t)$ du coefficient de x nous facilitera l'énonciation des théorèmes).

Sa solution générale est donnée par la formule

$$x(c,t) = \exp \int_{T_2}^{t} [a(t) + b(t)]\, dt \cdot \left\{ \int_{T_1}^{t} f(t) \exp - \int_{T_2}^{t} [a(t)+b(t)]\, dt\, dt + c \right\} \tag{3,2}$$

où T_1 et T_2 sont deux constantes quelconques (finies ou non).

Supposons que $a(t) + b(t) \to \varrho \neq 0$ et $f(t) \to \bar{f}$ (pour $t \to +\infty$). En appliquant à (3,2) le Théorème de l' H ô p i t a l nous obtenons le théorème connu de P e r r o n **[17]** (datant encore de 1913); *si $\varrho < 0$, alors toutes les solutions de* (3,1) *convergent vers $\bar{f}/\varrho$, et si $\varrho > 0$ exactement une solution de* (3,1) *converge vers cette limite $\bar{f}/\varrho$ et toutes les autres tendent absolument vers* $+\infty$ (voir par exemple S a n s o n e **[24]**). De même l'hypothèse $a(t) \to \bar{a}$, $\int_0^\infty b(t)\, dt$ converge, $f(t) \exp - \varepsilon t \to 0$ implique: que *ou bien toutes les solutions, ou bien exactement une vérifient la condition* $x(t, c) \exp - \varepsilon t \to 0$, c'est-à-dire que (3,1) possède la propriété $\mathbf{E}_1$ ou $\mathbf{E}_0$.

En employant d'autres méthodes de démonstration, on pout obtenir la même thèse avec des hypothèses plus faibles. Voici un théorème de ce type (il généralise — pour $n = 1$ — le résultat de P e y o v i t c h **[20]**) obtenu à l'aide du second théorème de moyenne du calcul intégral (Théorème de B o n n e t):

Théorème 1. *Supposons que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un M_ε, tel que*

$$\int_0^\infty |f(t)| \exp - \varepsilon t\, dt < M_\varepsilon \tag{3,3}$$

et que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t b(t)\, dt = 0 \tag{3,4}$$

Alors:

a). Si

(3,5) $$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, a(t) < 0$$

toutes les solutions $x(t, c)$ de (3,1) *vérifient pour chaque $\varepsilon > 0$ la condition*

(3,6) $$\lim_{t\to\infty} x(t, c) \exp - \varepsilon t = 0$$

(C'est-à-dire que (3,1) *possède alors la propriété* $\mathbf{E}_1$)

β). Si

(3,7) $$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, a(t) > 0$$

alors il existe exactement une solution $x(t, k)$ de (3,1), *telle que pour chaque $\varepsilon > 0$*

(3,8) $$\lim_{t\to\infty} x(t, k) \exp - \varepsilon t = 0$$

Pour les autres solutions ($c \neq k$) il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ alors

(3,9) $$\lim_{t\to\infty} |x(t, c)| \exp - \varepsilon t = +\infty$$

(C'est-à-dire que (3,1) *possède* alors *la propriété* $\mathbf{E}_0$).

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\varepsilon > 0$ une constante. Alors de (3,2) il résulte que

(3,10) $$x(t, c) =$$

$$= \exp \int_{T_2}^{t} (a + b)\, dt \cdot \left| \int_{T_1}^{t} f \exp \left| -2\varepsilon t - \int_{T_2}^{t} b\, dt \right| \cdot \exp \left| 2\varepsilon t - \int_{T_2}^{t} a\, dt \right| dt + c \right|$$

où T_1 et T_2 sont deux constantes qui seront déterminées ultérieurement. Posons

$$\Phi_\varepsilon(t) = f(t) \exp \left| -2\varepsilon t - \int_0^t b(t)\, dt \right|$$

$$\Theta_\varepsilon(t) = 2\varepsilon t - \int_0^t a(t)\, dt$$

Nous avons admis l'hypothèse (3,4). Il existe donc une constante $T_\varepsilon > 0$ telle que pour $t > T_\varepsilon$

(3,11) $$\varepsilon t > \left| \int_0^t b(t)\, dt \right|$$

α). Supposons que la condition (3,5) soit vérifiée. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $T'_\varepsilon \geqslant T_1$ tel que, si $t \geqslant T'_\varepsilon$, alors $a(t) < 2\varepsilon$. C'est-à-dire que

$$\frac{d\Theta_\varepsilon}{dt} = 2\varepsilon - a(t) > 0 \tag{3,12}$$

Donc pour $t \geqslant T'_\varepsilon$ la fonction $\Theta_\varepsilon(t)$ et la fonction $\exp \Theta_\varepsilon(t)$ sont croissantes.

Vu (3,11), on a

$$|\Phi_\varepsilon(t)| = |f(t)| \exp \left[-2\varepsilon t - \int_0^t b(t)\, dt \right] \leqslant |f(t)| \exp \varepsilon t$$

Posons dans (3,10) $T_1 = T'_\varepsilon$ et $T_2 = 0$. Appliquons le Théorème de B o n n e t

$$x(t, c) = \exp \int_0^t (a+b)\, dt \cdot \left| \int_{T'_\varepsilon}^t \Phi_\varepsilon \exp \Theta_\varepsilon\, dt + c \right| =$$

$$= \exp \int_0^t (a+b)\, dt \cdot \left| \exp \Theta_\varepsilon \cdot \int_{\xi(t,\varepsilon)}^t \Phi_\varepsilon\, dt + c \right|$$

où $\xi(t, \varepsilon)$ est une constante telle que $T'_\varepsilon < \xi(t, \varepsilon) < t$. Il s'ensuit

$x(t, c) \exp - 4\varepsilon t =$

$$= \frac{\exp \int_0^t b\, dt}{\exp 2\varepsilon t} \cdot \int_{\xi(t,\varepsilon)}^t f \exp \left[-2\varepsilon t - \int_0^t b\, dt \right] dt + c \frac{\exp \int_0^t (a+b)\, dt}{\exp 4\varepsilon t}$$

donc

$$|x(t, c)| \exp - 4\varepsilon t \leqslant \exp(-\varepsilon t) \cdot \int_{\xi(t,\varepsilon)}^t |f(t)| \exp - \varepsilon t\, dt +$$

$$+ |c| \exp(-\varepsilon t) \cdot \exp \int_0^t [-2\varepsilon + a(t)]\, dt$$

Vu (3,3) et (3,12), on a

$$|x(t, c)| \exp - 4\varepsilon t < \exp(-\varepsilon t) \cdot \int_{\xi(t,\varepsilon)}^t |f(t)| \exp - \varepsilon t\, dt + |c| \exp - \varepsilon t \leqslant$$

$$\leqslant [M_\varepsilon + |c|] \exp - \varepsilon t$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ quelconque,

$$\lim_{t \to \infty} |x(t, c)| \exp - 4\varepsilon t = 0$$

Mais cette dernière formule, étant vérifiée par chaque $\varepsilon > 0$, est vérifiée aussi par $\varepsilon/4$. On voit que, pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque solution de (3,1) vérifiée (3,6).

β). Supposons qque la condition (3,7) soit vérifiée. C'est-à-dire que, si nous posons

$$\underline{\lim}_{t\to+\infty} a(t) = \bar{a},$$

alors pour chaque ε tel que $\bar{a}/8 > \varepsilon > 0$ il existe un $T''_\varepsilon \geqslant T_\varepsilon$ tel que pour $t \geqslant T''_\varepsilon$ l'on ait $a(t) > 7\varepsilon$. La fonction

$$2\varepsilon t - \int_0^t a(t)\,dt \tag{3,13}$$

est alors pour $t \geqslant T'_\varepsilon$ décroissante.

Soit $\widetilde{T}_\varepsilon > T''_\varepsilon$ une telle constante que pour $t \geqslant \widetilde{T}_\varepsilon$ on a

$$\varepsilon t \geqslant \left| \int_0^{T_\varepsilon} b(t)\,dt \right|$$

Considérons la formule (3,2), où nous avons posé $T_1 = +\infty$, $T_2 = T''_\varepsilon$, c'est-à-dire la formule

$$x(t,c) = \exp \int_{T''_\varepsilon}^t (a+b)\,dt \cdot \left| \int_\infty^t f \exp\left[- \int_{T''_\varepsilon}^t (a+b)\,dt\right] dt + c \right| \tag{3,14}$$

Observons que l'intégrale généralisée de la formule (3,14) converge. En effet vu (3,11) pour $t > \widetilde{T}_\varepsilon$ on a

$$- \int_{T''_\varepsilon}^t (a+b)\,dt \leqslant -7\varepsilon t - \int_{T''_\varepsilon}^t b\,dt \leqslant -6\varepsilon t < -\varepsilon t. \tag{3,15}$$

donc, vu (3,13),

$$\left| \int_\infty^t f \exp\left[- \int_{T''_\varepsilon}^t (a+b)\,dt\right] dt \right| \leqslant \int_\infty^t |f| \exp - \varepsilon t\,dt < M_\varepsilon$$

d'où il s'ensuit que l'intégrale généralisée converge.

Transformons (3,14) comme nous avons transformé (3,2) en (3,10). En vertu du Théorème de B o n n e t il existe une constante $\eta(t,\varepsilon)$ telle que $t < \eta(t,\varepsilon) < +\infty$ et que

$$x(t,c) = \exp \int_{T''_\varepsilon}^t (a+b)\,dt . \left| \int_\infty^t \Phi_\varepsilon \exp \Theta_\varepsilon\,dt + c \right| =$$

$$= \exp\left[2\varepsilon t + \int_{T''_\varepsilon}^t b\,dt\right] \cdot \int_{\eta(t,\varepsilon)}^t \Phi_\varepsilon\,dt + c \exp \int_{T''_\varepsilon}^t (a+b)\,dt$$

Donc, pour $t \leqslant \tilde{T}$,

$$|x(t,0)| \exp - 4\varepsilon t \leqslant \exp(-\varepsilon t) \cdot \int_{\eta(t,\varepsilon)}^{t} |f| \exp - \varepsilon t \, dt \leqslant M_\varepsilon \exp - \varepsilon t.$$

Il s'ensuit, que, pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

(3,16) $$\lim_{t \to \infty} x(t,0) \exp - \varepsilon t = 0$$

— c'est-à-dire la formule (3,8), dans laquelle on a posé $k = 0$.

On a

$$x(t,c) = x(t,0) + c \exp \int_{T''_\varepsilon}^{t} [a(t) + b(t)] \, dt$$

Vu (3,15),

$$\int_{T''_\varepsilon}^{t} [a(t) + b(t)] \, dt \geqslant 5\varepsilon t$$

Donc pour $\varepsilon < \bar{a}/8 \underset{df}{=} \varepsilon_0$ et $t > T''_\varepsilon$.

$$|x(t,c)| \exp - 4\varepsilon t \geqslant |c| \exp \varepsilon t - |x(t,0)| \exp - 4\varepsilon t$$

Etant donné que cette formule est valable pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et en tenant compte de (3,16) pour $c \neq 0$, nous aurons la formule (3,9), ce qui achève la démonstration.

Remarquons que, si pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

(3,17) $$\lim_{t \to \infty} f(t) \exp - \varepsilon t = 0$$

alors la condition (3,3) est vérifiée pour chaque $\varepsilon > 0$. La condition (3,17) peut donc remplacer (3,3) dans les prémisses du Théorème 1. Nous en reparlerons au § 8.

(3,4) peut être aussi remplacée par une condition plus commode (mais plus forte), à savoir: *il existe des nombres T, A et $\mu < 1$ tels que*

(3,18) $$\left| \int_0^t b(t) \, dt \right| < A t^\mu$$

pour $t \geqslant T$

4. On pourrait croire que si la condition (3,5) n'est pas vérifiée, alors avec les hypothèses (3,3) et (3,4) l'équation (3,1) aura au moins une solution vérifiant (3,8). C'est-à-dire que l'hypothèse (3,7) est faite pour qu'il

y ait *exactement* une solution vérifiant (3,8). On pourrait croire aussi que l'hypothèse (3,4) est inutile. L'exemple suivant montre que ces deux présomptions sont fausses.

Exemple A. Considérons l'équation

(4,1) $$\dot{x} = -|\sin\ln t + \cos\ln t|\, x + 1$$

où $t \in \langle 1, +\infty)$.

Nous allons montrer qu'*aucune* solution de (4,1) n'est ε - bornée pour $\varepsilon > 0$.

On a

(4,2) $$\int_1^\infty 1 \cdot \exp - \varepsilon t\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \exp - \varepsilon t \underset{df}{=} M,$$

et

(4,3) $$\int_1^t - |\sin\ln t + \cos\ln t|\, dt = -t \sin\ln t$$

Posons $t_k \underset{df}{=} \exp 2\pi k$ et $T_k \underset{df}{=} \exp(2k + 1/2)\pi$.

On a

$$-t \leqslant t\sin\ln t \leqslant t$$

donc

$$\exp - t \leqslant \exp [t\sin\ln t] \leqslant \exp t$$

et

$$I_k \underset{df}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp|t\sin\ln t|\, dt > \int_{t_k}^{T_k} \exp|t\sin\ln t|\, dt$$

Vu que, pour $t \in \langle t_k, T_k \rangle$, on a

$$2 > \sqrt{2} \geqslant \sin\ln t + \cos\ln t \geqslant 1 > 0$$

donc

$$I_k > \frac{1}{2} \int_{t_k}^{T_k} |\sin\ln t + \cos\ln t| \exp(t\sin\ln t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \exp(t\sin\ln t) \Big|_{t_k}^{T_k} = \frac{1}{2} \exp T_k - \frac{1}{2}$$

Supposons que $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$. Alors $\exp(2k - 3/2)\pi \geqslant t \exp(-7/2)\pi$ et, si nous posons

(4,4) $$\gamma \underset{df}{=} \exp(-7/2)\pi > 10^{-5} > 0$$

alors

$$\exp\,(2\,k - 3/2)\,\pi \geqslant \gamma\, t$$

Il s'ensuit que pour $k \geqslant 2$ (étant donné que exp exp $(2k - 7/2)\,\pi > 2$) on a

$$\begin{aligned}\int_1^t \exp(t\sin\ln t)\,dt &\geqslant I_{k-1} + I_{k-2} \geqslant \\ (4,5)\qquad &\geqslant \frac{1}{2}\exp\exp(2\,k - 3/2)\,\pi + \frac{1}{2}\exp\exp(2\,k - 7/2)\,\pi - 1 \geqslant \frac{1}{2}\exp\gamma\, t\end{aligned}$$

Trouvons la solution générale de (4,1) à l'aide de la formule (3,2)

$$x(t, c) = \exp(-\,t\sin\ln t)\cdot\left|\int_1^t \exp(t\sin\ln t)\,dt + c\right|.$$

Vu la définition de γ, pour chaque c il existe un T_c tel que, si $t \geqslant T_c$, alors

$$(4,6)\qquad \frac{1}{4}\exp\gamma\, t \geqslant |c|$$

Pour $t \in \langle t_k, t_{k+1}\rangle \cdot \langle T_c, +\infty)$ on a alors

$$\begin{aligned}x(t, c) &= \exp(-\,t\sin\ln t)\cdot\left|\int_1^t \exp(t\sin\ln t)\,dt + c\right| \geqslant \\ (4,7)\qquad &\geqslant \exp(-\,t\sin\ln t)\cdot\left|\frac{1}{2}\exp\gamma\, t - |c|\right| \geqslant \frac{1}{2}\exp|t\,(\gamma - \sin\ln t)|\end{aligned}$$

Soit

$$(4,8)\qquad k_0 \underset{df}{=} \max\left[\frac{1}{2\pi}\ln T_c, 2\right]$$

Pour $k > k_0$ on obtient

$$x(t_k, c)\exp - \varepsilon\, t_k \geqslant \frac{1}{4}\exp|\gamma\, t_k - t_k\sin\ln t_k|\cdot\exp - \varepsilon\, t_k = \frac{1}{4}\exp(\gamma - \varepsilon)\,t_k$$

Donc, pourvu que $\varepsilon > \gamma$,

$$\lim_{t\to\infty} x(t_k, c)\exp - \varepsilon\, t_k = +\infty$$

Nous voyons donc qu'aucune solution de (4,1) n'est ε - bornée pour $\varepsilon > 0$.

I. Si nous admettons $a(t) = 0$, $b(t) = -\,[\sin\ln t + \cos\ln t]$ nos voyons que toutes les hypothèses du Théorème 1, auf l'hypothèse (3,4) sont vérifiées. En effet (4,2) montre que (3,3) est vérifiée et (4,3) montre que

(3,4) n'est pas vérifiée. Des modifications évidentes fourniraient un exemple d'équations n'ayant aucune solution ε - bornée pour $\varepsilon > 0$, et telle que la valeur

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \left| \int_0^t b(t)\,dt \right|$$

soit arbitrairement petite (mais > 0).

Notre exemple montre aussi que dans la condition (3,18) l'hypothèse $\mu < 1$ est nécessaire.

II. Si nous admettons $a(t) = -[\sin \ln t + \cos \ln t]$, $b(t) = 0$ nous voyons que toutes les hypothèses du Théorème 1 sont vérifiées, sauf (3,5) ou (3,7).

Admettons (3,3). Notre exemple montre, que, si (3,4) et (3,5), ou bien (3,4) et (3,7), sont en défaut, alors la thèse du Théorème 1 peut cesser d'être vraie.

Remarquons enfin, que l'exemple banal de l'équation

$$\dot{x} = \exp a t$$

montre que si (3,3) est en défaut, la thèse du Théorème 1 peut aussi cesser d'être vraie.

5. Les solutions bornées. Il existe un grand nombre de théorèmes fournissant des critères moyennant lesquels les solutions des équations différentielles soient *bornées*, ou bien *tendent vers zéro*. Voici deux de ces théorèmes.

Théorème 2. *Supposons que les fonctions*

$$\int_0^t f(t)\,dt, \qquad \int_0^t b(t)\,dt \tag{5,1}$$

soient bornées

a). *Si* $a(t) \leqslant 0$ *alors toutes les solutions de* (3,1) *sont bornées*, (c'est-à-dire que (3,1) *possède la propriété* $\mathbf{B}_1$).

β) *Si* $a(t) \geqslant 0$, $\int_0^\infty a(t)\,dt = +\infty$,*alors exactement une solution de* (3,1) *est bornée, et elle converge même vers zéro*, (c'est-à-dire que (3,1) *possède la propriété* $\mathbf{O}_0$).

La démonstration est semblable à celle du Théorème 1. Elle s'appuie sur la formule (3,2), sur le Théorème de Bonnet et sur le lemme suivant: *si* $\int_0^t f(t)\,dt$ *est une fonction bornée et* $g(t)$ *décroît d'une façon monotone vers zéro, alors l'intégrale généralisée* $\int_0^\infty f(t).\ g(t)\,dt$ *converge* (voir — par exemple — Kowalewski [9] p. 288).

Il est facile à remarquer que, si $a(t) \geqslant 0$ et la fonction $\int_0^t a(t)\,dt$ est bornée (et si les fonctions $\int_0^t f(t)\,dt$, $\int_0^t b(t)\,dt$ sont bornées) alors il suffit de poser $\bar{a}(t) \equiv 0$ et $\bar{b}(t) = a(t) + b(t)$, pour se trouver avec les fonctions $\bar{a}(t)$ et $\bar{b}(t)$ dans le cas a.

La généralisation du Théorème 2 a pour n quelconque a ète établie par Bellman [5], p. 37, mais avec l'hypothèse supplémentaire que $f(t) \equiv 0$, $a(t) = a_0 + \beta(t)$ où a_0 est une constante et $\beta(t)$ est une fonction à variation bornée, telle que $\lim_{t \to \infty} \beta(t) = 0$.

Nous établirons maintenant un théorème dans lequel du fait que f est bornée il s'ensuit que l'équation correspondante possède la propriété $\mathbf{B}_k$.

Théorème 3. *Soit l'équation*

$$\dot{x} = a(t)x + f(t) \tag{5,2}$$

Supposons que $|f(t)| \leqslant M$ *et que* λ *soit une constante positive.*

a) *Si* $a(t) \leqslant -\lambda < 0$ *alors toutes les solutions de* (5,2) *sont bornées* (c'est-à-dire que (5,2) *possède la propriété* $\mathbf{B}_1$).

β) *Si* $a(t) \geqslant \lambda > 0$, *alors exactement une solution de* (5,2) *est bornée. Les autres croissent absolument plus vite que* $\exp \frac{\lambda}{2} t$ (c'est-à-dire que (5,2) *possède la propriété* $\mathbf{B}_0$).

Démonstration. La démonstration la plus courte peut être faite à l'aide de considérations topologiques.

a) Admettons $a(t) \leqslant -\lambda < 0$. Soit une zone V définie par l'inégalité $|x| < R$. Elle est bornée par les droites $x_1 = +R$, $x_2 = -R$. On voit aisément que, pour tout R assez grand ,toutes les solutions qui ont un point de contact avec ces droites entrent dans la zone V. Il s'ensuit que toutes les solutions de (5,2) sont bornées.

β) Si nous admettons $a(t) \geqslant \lambda > 0$,, alors on peut montrer de même que pour R assez grand, toutes les solutions qui ont un point de contact avec les droites $x = \pm R$ sortent de V. Il résulte du Théorème de rétracte de M. Ważewski [33] qu'il existe une solution au moins qui est bornée (dans notre cas on le peut démontrer élémentairement sans avoir recours au Théorème de rétracte).

Puisque toutes les solutions ayant un point de contact avec la courbe

$$\psi(t) = \frac{3M}{\lambda} \exp \frac{\lambda t}{2}$$

sortent de la zone $x < \psi(t)$ et l'équation (5,2) est linéaire, la solution bornée est unique.

On a obtenu des résultats semblables pour des équations *non linéaires* $\dot{x} = g(x) + f(t)$ où $\lim_{x\to\pm\infty} |g(x)| = +\infty$, $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$ (mais *seulement* pour $n = 1$ — voir Hartman [8].

6. La thése du Théorème 2β dit que l'unique solution bornée tend vers zéro. Il est à remarquer que sous les hypothèses des Théorèmes $2a$ et 3 les solutions tendant vers zéro peuvent *manquer*.

En effet, soient les équations $\dot{x} = const.$ $(a(t) = b(t) \equiv 0)$ ou bien $\dot{x} = x+1$ $(a(t) \equiv 1)$. Aucune de leurs solutions ne tend vers zéro.

Une supposition plus forte que (5,1) — à savoir que $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$ converge — serait nécéssaire pour que les solutions tendent vers zéro (voir — par exemple — Peyovitch [21]).

L'exemple de l'équation $\dot{x} = 1$ montre que dans le Théorème 2 il ne suffit pas de supposer que f est bornée (au lieu de (5,1)), et dans le Théorème 3 il ne suffit pas de supposer que $\lambda \geqslant 0$.

Remarquons que sous des hypothèses à peu prés les mêmes, on peut caractériser avec une plus grande précision le comportement des solutions bornées (voir par exemple Haag [7], Wintner [34], [35]).

7. Généralisations. Au § 3 nous avons comparé la vitesse de croissance des solutions à celle de $\exp \varepsilon t$. On peut les comparer à la vitesse de croissance d'une fonction plus générale $\exp \varphi(\varepsilon, t)$ en considérant les expressions

$$x(t, c) \exp - \varphi(\varepsilon, t) \tag{7,1}$$

Soit une fonction $\varphi(\varepsilon,t)$ définie et différentiable dans l'ensemble $(0,\Delta)\times\times(0,+\infty)$, Supposons qu'il existe deux fonctions $\beta(\varepsilon)$ et $\gamma(\varepsilon)$ définies dans $0, \Delta)$ et telles que

$$\beta(\varepsilon) \leqslant \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\varepsilon, t) \leqslant \gamma(\varepsilon) \tag{7,2}$$

où

$$0 \leqslant \beta(\varepsilon) \tag{7,3}$$

Supposons que pour, pour $\varepsilon \epsilon (0, \Delta)$,

$$\int_0^\infty f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\,dt \leqslant M, \tag{7,4}$$

Si, en plus $\operatorname{sgn} a(t) = const.$ et

$$\left|\int_0^t b(t)\,dt\right| \leqslant M \tag{7,5)}$$

pour $t \geqslant 0$, nous dirons que $\varphi(\varepsilon, t)$ est une *fonction de comparaison de l'équation* (3,1)

Si, en plus, la condition

$$\lim_{t\to\infty}\left[\varphi(\varepsilon, t) - \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}, t\right)\right] = +\infty \quad \text{pour} \quad \varepsilon \in (0, \Delta) \tag{7,6}$$

est vérifiée, alors nous dirons que la fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ est une *fonction de forte comparaison de l'équation* (3,1) (voir T a t a r k i e w i c z [**29**]).

Théorème 4. *Soit* φ *une fonction de comparaison de l'équation* (3,1) *α). Si*

$$a(t) \leqslant 0 \tag{7,7}$$

alors toutes les expressions (7,1) *sont bornées pour* $\varepsilon \in (0, \Delta)$, (c'est-à-dire que (3,1) *possède la propriété* $\mathbf{B}_1(\varphi)$).

β) Si

$$a(t) \geqslant \gamma(\varepsilon) \geqslant 0$$

alors, pour une solution au moins, l'expression (7,1) *est bornée pour* $\varepsilon \in (0, \Delta)$. *Si en plus, la fonction*

$$\varphi(\varepsilon, t) - \int_0^t a(t)\, dt \tag{7,8}$$

n'est pas bornée inférieurement, pour chaque $\varepsilon > 0$ *alors cette solution est unique* (c'est-à-dire que (3,1) *possède la propriété* $\mathbf{B}_0(\varphi)$). *Dans le cas contraire* ((7,8) *bornée pour un* $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$) *toutes les expressions* (7,1) *sont bornées* (c'est-à-dire que (3,1) *possède la propriété* $\mathbf{B}_1(\varphi)$).

Théorème 5. *Soit* φ *une fonction de forte comparaison de l'équation* (3,1). *Alors toutes les solutions, pour lesquelles l'expression* (7,1) *est bornée en vertu du* Théorème 4, *vérifient aussi la condition*

$$\lim_{t\to\infty} x(t, c) \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0 \tag{7,9}$$

(c'est-à-dire que (3,1) *possède la propriété* $\mathbf{O}_k(\varphi)$).

La démonstration du Théorème 4 ressemble à celle du Théorème 1. Il suffit d'y remplacer εt par $\varphi(\varepsilon, t)$. Le Théorème 5 est une conséquence immédiate du Théorème 4 et de la définition de la fonction de forte comparaison.

Les généralisations fournies par les Théorèmes 4 et 5 sont d'importance étant donné que, si nous posons $\varphi(\varepsilon, t) = const.$ (ce n'est pas une fonction de forte comparaison!), nous obtenons un théorème semblable au Théorème 2, et, si nous posons $\varphi(\varepsilon, t) = \varepsilon t$, nous obtenons la partie essentielle du

Théorème 1. En choisissant d'autres fonctions $\varphi(\varepsilon, t)$ en peut obtenir encore d'autres critères. En voici un exemple:

Exemple B. Soit $\varphi(\varepsilon, t) = \varepsilon \ln t$, $a(t) = b(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv 1/t$ (c'est-à-dire l'équation $\dot{x} = 1/t$). En appliquant le Théorème 5 nous obtenons le résultat bien connu sur l'*ordre de croissance* du logarithme

$$x(t, c) \cdot \exp(-\varepsilon \ln t) = \frac{\ln t + c}{t^{\varepsilon}} \to 0$$

pour chaque $\varepsilon > 0$.

Remarquons que les hypothèses (7,5) et (7,7) sont plus fortes que (3,4) et (3,5) (et même plus fortes que (3,18) et (3,5)). Au lieu d'admettre (7,3) supposons que

$$0 < \beta(\varepsilon) \tag{7,10}$$

pour chaque $\varepsilon > 0$. Il est facile à montrer qu'alors les conditions (3,4) et (3,5) suffiraient pour que le Théorème 4 reste vrai. En effet, si nous admettons (3,3) et (7,10), alors (7,2) implique l'existence d'une fonction $\overline{\beta}(\varepsilon)$, telle que

$$\overline{\varphi}(\varepsilon, t) \underset{df}{=} \overline{\beta}(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) t \leqslant \varphi(\varepsilon, t)$$

Donc, vu le Théorème 1, on a pour chaque $\varepsilon > 0$.

$$|x| \exp - \varphi(\varepsilon, t) \leqslant |x| \exp - \overline{\varphi}(\varepsilon, t) \to 0$$

Mais si nous ne supposons que (7,3), alors les hypothèses (7,5) et (7,7) sont indispensables. L'exemple suivant le démontre.

Exemple C. Soit l'équation

$$\dot{x} = [a(t) + b(t)]x + 1 \tag{7,11}$$

où la fonction

$$[a(t) + b(t)] \underset{df}{=} \frac{1}{t} |\sin \ln \ln t + \cos \ln \ln t|$$

est définie pour $t \geqslant e$. Admettons

$$\varphi(\varepsilon, t) = (1 + \varepsilon) \ln t$$

Vu que

$$\int_e^\infty 1 \cdot \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt = \int_e^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon e} \underset{df}{=} M_\varepsilon$$

la condition (7,4) est vérifiée.

Posons

$$A(t) \underset{df}{=} \int_{e}^{t} |a(t) + b(t)|\, dt = \ln t . \sin \ln \ln t$$

et

$$\tau_k = \exp\exp \frac{\pi k}{2}$$

Remarquons que

(7,12) $$\tau_{4k+1} = \tau_{4k-2}^{\exp \frac{3}{2}\pi}$$

et que

(7,13) $$\exp A(\tau_{4k+1}) \exp - \varphi(\varepsilon, \tau_{4k+1}) = \tau_{4k+1}^{\sin \ln \ln \tau_{4k+1} - 1 - \varepsilon} = \frac{1}{\tau_{4k+1}^{\varepsilon}} .$$

On a $A(t) \leqslant 0$ pour $t \in \langle \tau_{4k-2}, \tau_{4k} \rangle$ et $\exp \pi > 23$, donc

$$\int_{e}^{\tau_{4k+1}} \exp - A(t)\, dt \geqslant \int_{\tau_{4k-2}}^{\tau_{4k}} \exp - A(t)\, dt \geqslant \tau_{4k} - \tau_{4k-2} \geqslant \tau_{4k-2}(\tau_{4k-2}^{20} - 1)$$

Soit un c quelconque et $k \geqslant 1$ assez grand pour que

$$\tau_{4k-2} > |c|$$

Alors, vu (7,12) et (7,13),

$$x(\tau_{4k+1}, c) \exp - \varphi(\varepsilon, \tau_{4k+1}) \geqslant \frac{\tau_{4k-2}(\tau_{4k-2}^{20} - 1) + c}{\tau_{4k+1}^{\varepsilon}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\tau_{4k-2}}{\tau_{4k+1}^{2}} = \tau_{4k-2}^{1-\varepsilon \exp \frac{3}{2}\pi} > \tau_{4k-2}^{1-200\varepsilon} .$$

Donc, si $0 < \varepsilon < 0{,}005$, alors

$$\lim_{k \to \infty} x(\tau_{4k+1}, c) \exp - \varphi(\varepsilon, \tau_{4k+1}) = + \infty$$

— les expressions (7,1) ne sont bornées pour aucune solution de (7,11).

Posons $b(t) \equiv 0$ et $a(t) = A'(t)$; alors la condition (3,5) est vérifiée mais la condition (7,7) ne l'est pas. Posons $a(t) \equiv 0$ et $b(t) = A'(t)$; alors les condition (3,18) et (3,4) sont vérifiées, mais (7,5) ne l'est pas. Si nous admettons (3,3), les conditions (3,4) et (3,5) ne suffisent donc pas, même pour qu'une équation possède la propriété $\mathbf{E}_{\text{II}}(\varphi)$.

Remarquons que les hypothèses du type (7,8) sont assez artificielles, mais il est assez difficile de s'en passer — comparer avec (3,12) et voir par exemple Niemyckij-Stiepanow **[16]**.

8. Nous avons déjà remarqué que, si la condition (3,17) est vérifiée pour chaque $\varepsilon > 0$, alors (3,3) a lieu, donc (3,6) ou (3,8) respectivement sont vraies. Étudions rapidement la situation qui se présente si l'on remplace εt par $\varphi(\varepsilon, t)$.

Les exemples suivants montrent que pour $\varphi(\varepsilon, t)$ quelconque, l'hypothèse $f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) \to 0$ ne suffit pas, et que l'équation (3,1) peut posséder la propriété $\mathbf{O}_1(\varphi)$ même quand $\int\limits_0^\infty f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt$ diverge.

Exemple D. Soit

$$\dot{x} = e^{\sqrt{t}} \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right] \overline{\overline{df}}\, f(t)$$

et $\varphi(\varepsilon, t) = \sqrt{t} + \varepsilon \ln t$ (c'est une fonction de forte comparaison). Alors

$f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) \to 0$ mais $\int\limits_1^\infty f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt$ *diverge* pour $\varepsilon \leqslant 1/3$.

Enfin pour toutes les solutions

$$x(t, c) \exp - \varphi(\varepsilon, t) = [\sqrt[3]{t} \exp \sqrt{t} + c].t^{-\varepsilon} \exp - \sqrt{t} \to +\infty$$

pour $\varepsilon < 1/3$.

Exemple E. Soit

$$x = \frac{\exp \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \overline{\overline{df}}\, f(t)$$

et $\varphi(\varepsilon, t) = \sqrt{t} + \varepsilon \ln t$. Alors $f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) \to 0$, $\int\limits_1^\infty f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt$ *diverge*, mais toutes les solutions vérifient la condition (7,9).

Bien que nous supposions dans le Théorème 4 que

$$\int\limits_1^\infty f(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt$$

converge, dans la thèse nous obtenons que l'expression (7,1) est bornée, et non que l'intégrale

$$\int\limits_1^\infty x(t, c) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt \tag{8,1}$$

converge. Dans la thèse du Théorème 1 *a* on peut remplacer la condition (3,6) par la suivante: „*l'intégrale*

$$\int\limits_0^\infty x(t, c) \exp - \varepsilon t\, dt$$

converge pour tout $\varepsilon > 0$" et le théorème reste vrai. L'exemple suivant montre qu'en remplaçant la thèse du Théorème $4a$ par la thèse: „*l'intégrale* (8,1) *converge*" on obtient un théorème faux.

Exemple F. Soit $x = t^{-3/2}$, $t \geqslant 1$, et $\varphi(\varepsilon, t) = \varepsilon \ln t$ pour $\varepsilon > 0$. Alors $\int_1^\infty t^{-3/2} \exp(-\varepsilon \ln t)\, dt$ *converge*, mais

$$\int_1^\infty x(t, c) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt = \int_1^\infty (c - 2\, t^{-1/2})\, t^{-\varepsilon}\, dt$$

diverge pour $\varepsilon \leqslant 1/2$.

9. Les équations d'ordre supérieur. Nous étudierons dans ce paragraphe quelques particularités des équations d'ordre supérieur à un.

Exemple G. Soit l'équation (définie pour $t \geqslant 1$)

(9,1) $$\ddot{y} + [\sin \ln t + \cos \ln t]\, \dot{y} = 1$$

On voit que, si $x(t, c)$ est la solution générale de (4,1), alors

$$y(t, c, c^1) = \int_1^t x(t, c)\, dt + c^1$$

est la solution générale de (9,1). Supposons que $t \geqslant T_c$ (voir (4,6)).

Comme au § 4, pour $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$ et k assez grand on a (voir (4,5))

(9,2) $$\int_1^\infty \exp(-t \sin \ln t)\, dt \geqslant \frac{1}{2} \exp \delta\, t,$$

où

$$\delta = \exp - \frac{5}{2}\pi > \exp - \frac{7}{2}\pi = \gamma$$

(voir (4,4))

Vu (4,7) et (9,2), on a pour $t \geqslant t_{k_0}$ (voir (4,8))

$$y(t, c, c^1) = \int_1^t x(t, c)\, dt + c^1 \geqslant \frac{1}{4} \int_1^t \exp \gamma\, t . \exp(-t \sin \ln t)\, dt + c^1 =$$

$$= \frac{1}{4} \exp \gamma\, \tau . \int_1^t \exp(-t \sin \ln t)\, dt + c^1 \geqslant \frac{1}{8} \exp \gamma\, \tau . \exp \delta\, t + c^1$$

où $1 < \tau < t$. Donc pour $t \geqslant t_{k_0}$

$$y(t, c, c^1) \geqslant \frac{1}{8} \exp \delta\, t + c^1$$

et pour $0 < \varepsilon < \delta$ on a

$$\lim_{t \to \infty} y(t, c, c^1) \exp - \varepsilon\, t = +\infty$$

pour chaque couple c, c^1.

Bien que touts les coefficients de (9,1) soient bornés, cette équation ne possède même pas la propriété $\mathbf{E}_0$. La cause de ce phénomène consiste en ce que la courbe K, dont les équations paramétriques sont

$$a_1(t) = 0, \qquad a_2(t) = \sin \ln t + \cos \ln t,$$

est contenue dans les frontières des cellules $Z_k^{(2)}$ (voir (1,4)). L'exemple de l'équation „non régulière" donné par Niemyckij-Stiepanow [16] p. 192—200 ne reussit non plus que grâce au fait que la courbe (1,5) passe d'une cellule a l'autre. De même pour l'exemple connu de Perron [19] et de Vinograd [31] (ce dernier exemple montre aussi qu'un passage à limite peut donner une équation ayant *moins* de solutions bornées que les équations primitives).

Evidemment il ne suffit pas que la courbe K (voir (1,5)) passe d'une cellule à l'autre ou qu'elle soit contenue dans les frontières des cellules, pour que l'équation correspondante n'ait pas des solutions bornées (ou ε-bornées pour $\varepsilon > 0$). La situation est ici assez compliquée — consulter les travaux de G. Ascoli, par exemple [2].

Si l'on veut généraliser le Théorème 4 pour des équations d'ordre supérieur, et si l'on ne veut admettre que l'hypothèse (7,3) (et non (7,10), qui implique (3,3)), on peut y avoir des difficultés. Celles-ci surgissent si la courbe (1,5) passe par des points appartenant à deux surfaces $\mathbf{R}' \lambda_i(t) = 0$ en même temps (Si l'équation est à coefficients constants, cela correspond aux racines multiples de l'équation séculaire $\lambda^n - \bar{a}_n \lambda^{n-i} - \ldots - \bar{a}_2 \lambda - \bar{a}_1 = 0$ ayant la partie réelle égale à zéro.

Il est intéressant de comparer l'exemple B au suivant

Exemple H. Pour la fonction de forte comparaison $\varphi(\varepsilon, t) = \varepsilon \ln t$ l'équation $\ddot{x} = 1/t$ ne possède même pas la propriété $\mathrm{B}_0(\varphi)$. (Ici $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0$ et $a_1(t) = a_2(t) = 0$).

Des propriétés asymptotiques pour des équations d'ordre supérieur peuvent être démontrées non seulement à aide de la *méthode des approximations succesives* (voir — par exemple — Perron [18] et Tatarkiewicz [29] ou bien des diverses *méthodes topologiques* (voir — par exemple — Bellman [3], Levinson [11], Tatarkiewicz [28] et Ważewski [33], mais aussi a l'aide de la *„seconde" méthode de Lapounov* (voir — par exemple — Antosiewicz-Davis [1], Starżyński [25], [26]).

10. Les équations non linéaires. En général l'allure asymptotique des équations non linéaires est différente de celle des équations linéaires. (L'exemple des differences — voir Vinograd [32]). Mais les résultats obtenus pour les équations qui „*diffèrent peu*" des équation linéaires sont assez semblables à ceux qui concernent les équations linéaires. Citons un de ces résultats.

Soit l'équation (l'équation (1,2) pour $n = 1$)

$$\dot{x} = a(t)x + d(x, t) + f(t) \tag{10,1}$$

où

$$d(0, t) \equiv 0$$

Supposons que $a(t) \to \bar{a}$. Supposons, en plus que f et d sont continues et qu'il existe deux fonctions $\gamma(t)$ et $\chi(t)$ non négatives, continues et telles que

$$|d(x, t) - d(x, t)| \leq [\gamma(t) + \chi(t)] . |x - x| \tag{10,2}$$

où

$$\lim_{t\to\infty} \chi(t) = 0, \qquad \int_0^{\infty} \gamma(t)\, dt < +\infty \tag{10,3}$$

Supposons que $\varphi(\varepsilon, t)$ soit une fonction de comparaison et supposons que si $\chi(t) \neq 0$ alors

$$0 < \beta(\varepsilon) \tag{10,4}$$

(voir (7,2)), et soit

$$\int_0^{\infty} |f(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt \leq M.$$

Nous avons alors (voir T a t a r k i e w i c z [29]).

Théorème 6. *a*). *Si* $\bar{a} \leq 0$, *alors, pour toutes les solutions* $x(t)$ *de* (10,1), *les expressions*

$$x(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) \tag{10,5}$$

soit bornée, (c'est-à-dire que (10,1) *possède la propriété* $\mathrm{B}_1(\varphi)$).

β). *Si* $\bar{a} > 0$, *alors il existe une solution* $x_0(t)$ *exactement, telle que l'expression*

$$x_0(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)$$

soit bornée, (c'est-à-dire que (10,1) *possède la propriété* $\mathrm{B}_0(\varphi)$).

Remarquons que si φ est une fonction de *forte comparaison*, alors (10,1) *possède la propriété* $\mathrm{O}_1(\varphi)$, respectivement $\mathrm{O}_0(\varphi)$ (comparer au Théorème 5).

L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse que si $\chi(t) \neq 0$, alors $0 < \beta(\varepsilon)$, c'est-à-dire qu'alors φ ne peut différer essentiellement de la fonction linéaire εt.

Exemple I. Soit l'équation (définie pour $t \geqslant 1$)

(10,6) $$\dot{x} = \frac{|x|}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et posons $\varphi(\varepsilon, t) = (1/2 + \varepsilon) \ln t$.

Alors

$$\int_1^\infty |f(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}$$

converge, $a = 0$ et comme $\int_1^\infty t^{-1/2}\, dt$ diverge, il faut poser $\chi(t) = t^{-1/2}$. Les solutions de (10,6) sont données par les formules

$$x(t) = \begin{cases} -1 + k \exp + 2\sqrt{t} & \text{pour} \quad x \geqslant 0 \\ 1 - k \exp - 2\sqrt{t} & \phantom{\text{pour}} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Chaque solution, pour laquelle $x(1) < 0$ croît jusqu'à l'axe $0t$, et chaque solution qui prend une fois une valeur $x(t) \geqslant 0$ tend vers l'infini aussi vite que $k \exp 2\sqrt{t}$. C'est-à-dire plus vite que $t^{1/2+\varepsilon}$. Donc, pour chaque solution de (10,6)

(10,7) $$\lim_{t \to \infty} x(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) = +\infty$$

Exemple J. Soit

$$\dot{x} = \frac{|x|}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et posons $\varphi(\varepsilon, t) = (1/2 + \varepsilon) \ln t$. Dans cet exemple les expressions (10,5) sont bornées pour une partie de solutions, pour les autres, nous avons par contre (10,7).

Si nous généralisons le Théorème 6 pour n quelconque, alors il faut supposer en plus (10,4) — même si $\chi(t) \equiv 0$ — pourvu que zéro soit la partie réelle des racines multiples de l'équation séculaire (1,3) de l'équation linéaire correspondant à (1,2). L'exemple H le démontre.

Nous avons supposé (voir (10,3) que $\chi(t) \to 0$. Il ne suffit pas de supposer que $\chi(t)$ est bornée. (Il suffit de supposer que $\chi(t)$ est bornée par un nombre positif suffisamment petit — voir le Théorème 7). L'exemple suivant le démontre:

Exemple K. Soit

(10,8) $$\dot{x} = ax + \beta |x| + 1$$

et posons $\varphi(\varepsilon, t) = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$.

Les solutions sont données par les formules

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{a+\beta} + k\exp(a+\beta)t & x > 0 \\ & \text{pour} \\ -\dfrac{1}{a-\beta} + k\exp(a-\beta)t & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Si $a \leqslant 0$ et $|a| < \beta$ alors pour toutes les solutions de (10,8)

$$\lim_{t\to\infty} x(t)\exp - \varepsilon t = +\infty$$

pour $\varepsilon < \beta - |a|$. (Bien que $\varphi(\varepsilon, t) = \varepsilon t$ soit ici une fonction linéaire de t).

Parmi les autres théorèmes de ce genre, les plus intéressants sont ceux qui n'utilisent pas la „*condition de Lipschitz généralisée*" (10,2) et (10,3). Voici deux de ces resultats (voir Levinson [**12**]).

Théorème 7. *Si* $\bar{a} < 0$, $f(t) \equiv 0$ *et*

$$|d(x,t)| \leqslant \vartheta |\bar{a}| . |x|$$

où $\vartheta < 1$, *alors* (10,1) *possède la propriété* $\mathbf{O}_1$.

Théorème 8. *Si* $\bar{a} \leqslant 0$, $f(t) \equiv 0$ *et*

$$|d(x,t) \leqslant \gamma(t)|x|$$

où $\gamma(t)$ *est bornée et* $\int\limits_0^\infty \gamma(t)\,dt$ *converge, alors* (10,1) *possède la propriètè* $\mathbf{B}_1$.

Il est facile de montrer à l'aide d'exemples qu'avec les hypothèses du Théorème 8 l'équation (10,1) peut ne pas possèder la propriété $\mathbf{O}_1$ ($\dot{x} = x/t^2$) et que l'hypothèse $\gamma(t) \to 0$ peut ne pas suffire pour que (10,1) possède la propriété $\mathbf{B}_1$ ($\dot{x} = x/t$). Un autre exemple montre que dans le Théorème 7 l'hypothèse $\vartheta < 1$ est indispensable ($\dot{x} = -x + 2|x|$). Enfin, les deux théorèmes seraient faux si l'on supposait seulement que $|d(x,t)| \leqslant \Theta |x|^\mu$ où $\mu > 1$ et Θ est une constante.

Un autre type de majoration de la fonction f, suffisante pour que l'équation (10,1) possède la propriété $\mathbf{O}_1$ a éte trouvé par Łojasiewicz [**14**].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. A. Antosiewicz, P. Davis, *Some implication of Liapunov's conditions for stability*. J. Rat. Mech. Anal. 3 (1954) p. 447—458.

[2] G. Ascoli *Sul compartamento asintotico delle soluzioni dell' equazione* $y'' + [1 + \eta(x)]\,y = 0$, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 8 (1953) p. 115—123.

[3] R. Bellman *On an application of a Banach — Steinhaus Theorem to the study of the boudness of solutions of non linear differential and difference equations*, Ann. of Mat. **49** (1948) p. 515—522.

[4] ——— *On the boudness of solutions of nonlinear differential and difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947) p. 357—386.

[5] ——— *Stability Theory of differential equations*, New York 1953.

[6] L. Cesari *Un nouvo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari*, Ann. Scuola Norm. super. Pisa (2) **32** (1940) p. 163—186.

[7] J. Haag *Cols, noeuds et et foyers*. Bull. Sci. Math. (2) **74** (1950), p. 167—192.

[8] P. Hartman *Unrestricted solutions fields of almost-separable differential equations*, Trans. Amer. Mat. Soc. **63** (1948) p. 560—580.

[9] G. Kowalewski, *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, tłumaczył I. Roliński, Warszawa 1923.

[10] A. Lapounoff *Problème général de la stabilité du mouvement*, Princeton 1947.

A. M. Lapunov *Obszczaja zadacza ob ustojczivosti dwiżenja*, Moskwa-Leningrad 1935.

[11] N. Levison *Transformations theory of non-linear differential equations of the second order*, Ann. of Math. **45** (1944) p. 723—737.

[12] ——— *On stability of non-linear systems of differential equations*, Coll. Math. **2** (1949) p. 40—45.

[13] D. C. Lewis *Inequalities for complex linear differential systems of the second order*, Proc. Am. Nat. Acad. of Sc. **38** (1952) p. 65—68.

[14] S. Łojasiewicz *Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage du point sigulier*, Ann. Pol. Math. **1** (1954) p. 34—72.

[15] R. Nardini *Sul comportamento asintotico degli integrali di un'equazione differentiale della dinamica*, Atti. Ac. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fiz., Mat., Nat. (8) **7** (1949) p. 47—52, 52—61.

[16] W. W. Niemyckij, W. W. Stiepanow *Kaczestwiennaja tieorja diffierencjalnych urawnienii*, Moskwa 1949.

[17] O. Perron *Über lineare Differentialgleichungen bei denen die unabchängige Variable relle ist*, Jour. f. d. rein. u. ang. Math. **142** (1913) p. 251—270.

[18] ——— *Über Stabilität und asymptotisches Verschalten der Integrale von Differentialgleichungssysteme*, Math. Zeit. **29** (1929) p. 129—160.

[19] ——— *Über ein Vermeintliches Stabilitätskriterium*, Gott. Nachr., Math.-Phys. Kl. **5** (1930) p. 28—29.

[20] T. Peyovitch *Sur la valeur des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires*, Bull. Soc. Math. de France **61** (1933) p. 84—95.

[21] ——— *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Premier Congrès des Math. et Phys. de la RPFY 1949, vol. 2 Communications p. 121—145, Belgrade 1951.

[22] H. Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Oeuvres, t. 1, Paris 1928, p. 3—84, 90—158, 167—222.

[23] ——— *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 3, Paris 1892—1899.

[24] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale* 2 éd., vol. 2. Bologna 1948—1949.

[25] W. M. Starżynskij *Dostatecznyje uslowija ustoicziwosti odnoj miehaniczeskoj sistemy s odnoj stiepieniu swobody*, Prikł. Mat. Meh. **16** (1952) p. 369—374.
[26] ——— *Ob ustoicziwosti nieustarawiszihsja dwiżenia w odnom słuczeje*, Prikł. Mat. Meh. **16** (1952) p. 500—504.
[27] Z. Szmydt *Sur les systèmes d'équations différentielles dont toutes les solutions sont bornées*, Ann. Pol. Math. **2** (1955) p. 234—236.
[28] K. Tatarkiewicz *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle de second ordre*, Ann. UMCS, sec. A, **7** (1953) p. 19—84.
[29] ——— *Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires*, Ann. UMCS sec. A, **8** (1954) p. 25—69.
[30] A. E. Vinograd *Niekotoryje kriterii ograniczenosti reszenii sistemy dwuh liniejnych differencjalnych uravnienij*, Dokł. Akad. Nauk SSSR n. s. **85** (1952) p. 265—268.
[31] ——— *Nieustojczywost harakteristiczeskich czisel pokazatelnej prawitelnych sistem*, Dokł. Akad. Nauk SSSR n. s. **91** (1955) p. 999—1002.
[32] ——— *Otricatelnoje reszenije waprosa ob ustoicziwostii harakteristiczeskich czisel pokazatelnoj pravitelnych sistem*, Prikł. Mat. Meh. **17** (1953) p. 645—650.
[33] T. Ważewski *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Pol. Math. **20** (1948) p. 279—313.
[34] A. Wintner *Asymptotic equilibria*, Amer. J. Math. **76** (1954) p. 183—190.
[35] ——— *On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary differential equations*, Amer. J. Math. **76** (1954) p. 183—190.
[36] H. Weyl *Comment on the proceding paper*, Amer. J. Math. **68** (1946) p. 7—12.

Streszczenie

W ostatnich czasach poświęcono wiele uwagi osłabieniu założeń asymptotycznych twierdzeń teorii równań różniczkowych. Mimo to, uzyskano dotychczas ogólne wyniki tylko dla równań

$$x^{(k)} = a_k(t)\,x^{(k-1)} + \ldots + a_2(t)\,x' + a_1(t)\,x + f(t) + d(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)}) \quad (1)$$

o *niemal stałych współczynnikach* (tj. takich, że bądź $a_k(t) \to \bar{a}_k$, bądź też całki $\int_0^\infty |a_k(t) - \bar{a}_k|\,dt$ są zbieżne), *niemal liniowych* (tj. takich, że funkcja d w pewien sposób *„mało"* odchyla się od zera).

Weźmy *krzywą* K przestrzeni n wymiarowej, daną parametrycznymi równaniami

$$a_1 = a_1(t), \ldots, a_n = a_n(t) \quad (2)$$

Analizując znane dotychczas wyniki dla $n = 1$ lub dla $n = 2$ wypowiadam w § 2 przypuszczenie, jakie własności powinna mieć krzywa (2)

by równanie (1) posiadało dokładnie k parametrową rodzinę rozwiązań $x(t)$ ograniczonych lub spełniających warunki

$$\lim_{t\to\infty} x(t)\exp - \varepsilon t = 0 \tag{3}$$

Weźmy mianowicie równanie algebraiczne względem λ

$$\lambda^n - a_n(t)\lambda^{n-1} - \ldots - a_2(t)\lambda - a_1(t) = 0$$

ma ono dokładnie n pierwiastków

$$\lambda_i = \lambda_i(a_1, \ldots, a_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Nazwijmy *komórką* $Z_k^{(n)}$, tę część przestrzeni n wymiarowej $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ w której *dokładnie k części rzeczywistych funkcji* $\lambda_i(a_1, \ldots, a_n)$ *jest niedodatnich.*

Prawdopodobnie $K \subset \mathrm{I}' Z_k^{(n)}$ *jest warunkiem wystarczającym* na to by *k parametrowa rodzina rozwiązań* (1) (dla d dość „*małego*“ lub $d \equiv 0$) *spełniała warunek* (3). Podobny acz nieco mocniejszy warunek jest prawdopodobnie wystarczający na to by k *parametrowa rodzina* rozwiązań równania (1) *była ograniczona.*

Przykłady pokazują że jeśli $K \subset \mathrm{F}' Z_k^{(n)}$ to może nie istnieć k parametrowa rodzina rozwiązń (1) spełniających (3). Podobnie, gdy $K \subset Z_k^{(n)} + Z_e^{(n)}$ to może nie istnieć rodzina k lub l parametrowa spełniająca ten warunek.

Dalsza część pracy poświęcona jest udowodnieniu twierdzeń asymptotycznych dla równań (1) liniowych, pierwszego rzędu ($n = 1$ $d \equiv 0$), oraz pokazanie na przykładach, że żadnego z podanych założeń opuścić nie można.

Jednym z tych twierdzeń jest (pierwsza część Twierdzenia 1):

Przypuśćmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ *istnieje* M_ε *takie, że*

$$\int_0^\infty |f(t)| \exp - \varepsilon t \, dt < M_\varepsilon \tag{4}$$

i że

$$\lim_{k\to\alpha} \frac{1}{t}\int_0^t b(t)\,dt = 0 \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{t\to\alpha}}\, a(t) < 0 \tag{6}$$

Wtedy wszystkie rozwiązania równania

$$\dot{x} = [a(t) + b(t)]\,x + f(t) \tag{7}$$

spełnią dla każdego $\varepsilon > 0$ *warunek* (3).

Przyjmijmy

$$a(t) = 0, \quad b(t) = -[\sin \ln t + \cos \ln t], \quad f(t) = 1.$$

Wtedy warunki (4), (6) są spełnione, zaś nie spełniony jest warunek (5) oraz żadne rozwiązanie (7) nie spełnia warunku (3) (dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$). Widzimy więc, że warunek (5) nie daje się opuścić, ani nawet zastąpić nieco słabszym warunkiem ograniczoności funkcji

$$\frac{1}{t} \int_0^t b(t)\, dt .$$

W paragrafach 7 i 8 omówione są zmiany jakie należy zrobić w założeniach i tezach uzyskanych twierdzeń, by móc zastąpić funkcję liniową $\varepsilon\, t$ przez dowolną funkcję $\varphi(\varepsilon, t)$ monotoniczną i spełniającą pewne dodatkowe warunki. Okazuje się, że otrzymać można w ten sposób twierdzenia, które wprawdzie wymagają mocniejszych założeń, lecz za to mają ogólniejsze tezy.

Ostatni paragraf (§ 10) poświęcony jest warunkom jakie musi spełniać część *nieliniowa* równania (1) (dla $n = 1$), by równanie to posiadało k parametrową rodzinę rozwiązań ograniczonych lub też spełniających warunek (3).

Oczywiście — z odpowiednimi zmianami — powyższe uwagi odnoszą się też do *układów* równań różniczkowych zwyczajnych.

Резюме

В последнее время много внимания посвящено ослаблению предпосылок при асимптотических теоремах теории дифференциальных уравнений. Несмотря на это до сих пор получены общие результаты только для уравнений

$$x^{(n)} = a_n(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, x' + a_1(t)\, x + f(t) + d(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \qquad (1)$$

с *почти постоянными коэффициентами* (т.е. такими, что или $a_k(t) \to \bar{a}_k$, или же интегралы $\int_0^\infty |a_k(t) - \bar{a}_k|\, dt$ сходятся) *почти линейных* (т. е. таких, что функция d некоторым образом „*мало*" отклоняется от нуля).

Возмём кривую K n-мерного пространства, данную параметрическими уравнениями

$$a_1 = a_1(t), \quad \ldots, \quad a_n = a_n(t) \qquad (2)$$

Анализируя известные до настоящего времени результаты полученные для $n = 1$ или $n = 2$, я высказываю в § 2 предположение, ка-

кими свойствами должна обладать кривая K (2), чтобы уравнение (1) имело в точности k-параметровое семейство решений $x(t)$ ограниченных или исполняющих условия:

$$\lim x(t) \exp - \varepsilon t = 0 \tag{3}$$

Именно, возьмем алгебраическое уравнение относительно λ

$$\lambda^n - a_n(t)\lambda^{n-1} - \cdots - a_2(t)\lambda + a_1(t) = 0;$$

у него в точности n корней

$$\lambda_i = \lambda_i(a_1, \ldots, a_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Назовем ячейкою $Z_k^{(n)}$ ту часть n-мерного пространства $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$, в которой число неположительных действительных частей функций λ в точности равно k.

Вероятно $K \subset \mathrm{I}' Z_k^{(n)}$ ($\mathrm{I}' Z_k^{(n)}$ множество внутренних точек $Z_k^{(n)}$) является достаточным условием, чтобы k-параметровое семейство решений уравнения (1) исполняло условие (3) (для достаточно малого d или для $d = 0$).

Похожее, хотя несколько более сильное условие, вероятно, является достаточным для того, чтобы k-параметровое семейство решений уравнения (1) было ограничено.

Примеры показывают, что если $K \subset \mathrm{F}' Z_k^{(n)}$ ($\mathrm{F}'Z$- граница множества Z), то может не существовать k-параметровое семейство решений, исполняющих условие (3). Подобным образом, когда $K \subset Z_k^{(n)} + Z_l^{(n)}$, то может не существовать k- или l-параметровое семейство, исполняющее это условие.

Далее доказаны асимптотические теоремы для уравнений (1) линейных первого порядка ($n = 1$, $d = 0$), и показано на примерах, что нельзя пропустить ни одной из приведенных предпосылок.

Одна из этих теорем следующая (первая часть теоремы 1):

Предположим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое M_ε, что

$$\int_0^\infty |f(t)| \exp - \varepsilon t \, dt < M_\varepsilon \tag{4}$$

и же

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b(t)\, dt = 0 \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, a(t) \leqslant 0 \tag{6}$$

Тогда все решения уравнения

$$\dot{x} = [a(t) + b(t)]\, x + f(t) \tag{7}$$

исполняют условие (3) *при всяком* $\varepsilon > 0$.

Примем

$$a(t) = 0, \qquad b(t) = -[\sin\ln t + \cos\ln t], \qquad f(t) = 1.$$

Тогда исполнены условия (4) и (6), но условие (5) не исполнено, и никакое решение уравнения (7) не исполняет условия (3) (для достаточно малых ε). Итак, мы видим, что условие (5) не может быть пропущено или даже заменено более слабым условием ограниченности функции

$$\frac{1}{t}\int_0^t b(t)\,dt.$$

В §§ 7,8 оговорены необходимые изменения в предпосылках и тезисах полученных теорем, чтобы можно было заменить линейную функцию $\varepsilon < t$ произвольной монотонной функцией $\varphi(\varepsilon, t)$, исполняющей некоторые добавочные условия, хотя и требующие более сильных предпосылок, но зато имеющие более общие тезисы.

Последний § 10 посвящён условиям, которые должна исполнять *нелинейная* часть уравнения (1) (при $n = 1$), чтобы это уравнение имело k – параметровое семейство решений ограниченных, или не исполняющих условие (3).

Эти замечания — с соответственными изменениями — касаются тоже *систем* обыкновенных дифференциальных уравнений.