ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VIII, 7 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr. A. Bielecki

ADAM BIELECKI et KONSTANTY RADZISZEWSKI

# Sur les parallélépipèdes inscrits dans les corps convexes

## O równoległościanach wpisanych w bryły wypukłe

## О параллелепипедах, вписанных в выпуклые тела

K. Radziszewski [3] a démontré que dans toute figure convexe plane d'aire $\sigma > 0$ on peut inscrire un rectangle dont l'aire n'est pas inférieure à $\sigma/2$, et que dans tout corps convexe de volume $V > 0$, ayant un plan de symétrie, on peut inscrire un parallélépipède rectangle dont le volume n'est pas inférieur à $\frac{2}{9}V$[1]. En utilisant une certaine modification de la méthode qui y a été appliquée nous allons démontrer la proposition suivante:

*Dans tout corps convexe de volume $V > 0$ il est possible d'inscrire un parallélépipède*[2] *de volume $v \geqslant \frac{2}{9}V$.*

Avant de procéder à la démonstration proprement dite, remarquons qu'il suffit de se borner au cas particulier où la frontière du corps convexe en question est une surface ne contenant aucun segment de droite.

En effet, on sait que tout corps convexe $R$ de volume $V > 0$ peut toujours être approché par une suite de corps convexes $R_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ayant cette propriété[3]. Désignons le volume du corps $R_n$ par $V_n$. Si l'on a déjà inscrit, dans chacun des corps convexes $R_n$, un parallélépipède $P_n$ de volume $v_n \geqslant \frac{2}{9}V_n$, il est évidemment possible[4] de former une suite partielle $P_{m_i}$ convergeant vers un parallélépipède $P$, qui doit être inscrit dans $R$. La suite des volumes $v_{m_i}$ tend alors vers une valeur limite qui n'est pas inférieure à $\frac{2}{9}V = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{9}V_n$.

[1]) Une autre démonstration a été donnée ultérieurement par W. Süss [5].

[2]) pas nécessairement rectangle

[3]) Il existe même une telle suite de corps convexes analytiques. Voir p. ex. T. Bonnesen und W. Fenchel [2], p. 36.

[4]) Voir p. ex. W. Blaschke [1], p. 62 „Auswahlsatz".

Admettons donc, une fois pour toutes, que la frontière du corps convexe $R$ ne contient aucun segment de droite.

Maintenant nous choisissons le plan $\alpha$ de manière que le corps convexe $R$ soit situé d'un côté de ce plan. Dans ce plan nous fixons un vecteur arbitraire $\boldsymbol{a} \neq 0$ et l'origine d'un système rectangulaire droit de coordonnées cartésiennes. Les axes $x$ et $y$ sont situés dans le plan $\alpha$ et l'axe $z$ est dirigé du côté où se trouve le corps convexe $R$. L'angle formé par l'axe $x$ et le vecteur $\boldsymbol{a}$ sera désigné par $\varphi$.

Les coordonnées des points du corps convexe $R$ satisfont à l'inégalité

$$f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y),$$

où le point de coordonnées $x, y$ décrit un certain domaine plan $\Delta$ fermé et convexe, et les fonctions $f$ et $g$ sont non négatives et continues. Le domaine à 3 dimensions $R'$, défini par l'inégalité

$$0 \leqslant z \leqslant g(x, y) - f(x, y)$$

où le point $(x, y)$ décrit le même domaine $\Delta$, est encore un corps convexe, dont nous dirons qu'il est engendré par déplacement de $R$ vers le plan $xy$ du système de référence. La frontière du corps convexe $R'$ se compose du domaine plan $\Delta$ et d'une portion de surface ne contenant aucun segment de droite.

D'une manière tout à fait analogue, en déplaçant le corps convexe $R'$ vers le plan $yz$ du système de référence on obtient le $R''(\varphi)$, ayant déjà deux faces planes et, en le déplaçant encore vers le plan $xz$, le corps convexe $R'''(\varphi)$, limité par les trois plans du système de coordonnées et une surface ne contenant aucun segment de droite.

Les corps convexes de ce genre ont été étudiés en détail dans le travail cité plus haut [3]. En particulier, il y a été démontré que parmi les parallélépipèdes rectangles, contenus dans le corps convexe $R'''$ (pas nécessairement inscrits), dont trois faces sont parallèles respectivement aux trois plans du système de référence, il y a exactement un parallélépipède rectangle maximal $P'''(\varphi)$, ayant le plus grand volume possible $v(\varphi)$. Le volume $v(\varphi)$ n'est pas inférieur à $\frac{2}{9}V$, et tous les sommets du $P'''(\varphi)$ sont situés sur la frontière de $R'''(\varphi)$. Au parallélépipède rectangle $P'''(\varphi)$ correspondent un parallélépipède $P''(\varphi)$ et un parallélépipède $P'(\varphi)$ de même volume $v(\varphi)$, inscrits dans les corps convexes $R''(\varphi)$ et $R'(\varphi)$ respectivement, tels que $P'''(\varphi)$ est engendré par déplacement de $P''(\varphi)$ vers le plan $xz$ et $P''(\varphi)$ par déplacement de $P'(\varphi)$ vers le plan $yz$. Le parallélépipède $P'(\varphi)$ a une face contenue dans le plan $\alpha$ et deux arêtes parallèles aux axes des

$x$ et des $z$. Celle des arêtes qui n'est pas parallèle à ces axes et qui est contenue dans le plan $a$ fait avec la direction $\boldsymbol{a}$ un angle $\omega(\varphi)$.

En appliquant la propriété, mentionnée auparavant, des frontières des corps convexes en question nous trouvons immédiatement que le parallélépipède $P'(\varphi)$ est déterminé univoquement. Il en résulte tout de suite que le parallélépipède maximal, qui est contenu dans $R'$ et qui a deux arêtes parallèles aux axes des $x$ et des $z$ respectivement, se confond avec $P'(\varphi)$, il est donc univoquement déterminé par l'angle $\varphi$.

Les quatres sommets consécutifs $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ de celle des faces du parallélépipède $P'(\varphi)$, qui est contenue dans le plan $a$, ont les coordonnées $x_i(\varphi), y_i(\varphi), 0$, où $i=1, 2, 3, 4$. Les indices 1 et 3 correspondent aux points situes sur la diagonale.

Soit

$$t_i(\varphi)=f(x_i, y_i), \qquad u_i(\varphi)=g(x_i, y_i),$$

$$t^*(\varphi)=\frac{t_1+t_3}{2}, \qquad t^{**}(\varphi)=\frac{t_2+t_4}{2}, \qquad \delta(\varphi)=t^{**}(\varphi)-t^*(\varphi),$$

Dans le cas où $\delta(\varphi)=0$, les quatre points de coordonnées $x_i(\varphi), y_i(\varphi), t_i(\varphi)$ sont situés dans un plan et les quatre points $x_i(\varphi), y_i(\varphi), u_i(\varphi)$ sont contenus dans un plan parallèle. Évidemment tous ces points sont alors les sommets d'un parallélépipède $P(\varphi)$ de volume $v(\varphi)$ inscrit dans le corps convexe $R$. Pourtant on a, en générale, $\delta(\varphi)\neq 0$ et ces points ne déterminent pas un parallélépipède. L'idée fondamentale de notre démonstration consiste à prouver qu'il existe un angle $\varphi_0$ tel que $\delta(\varphi_0)=0$.

Nous démontrerons d'abord que $\delta(\varphi)$ est une fonction continue. Soit $\lim_{\nu\to\infty}\varphi_\nu=\bar{\varphi}$. La suite des parallélépipèdes $P'(\varphi_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots$, est évidemment bornée. On peut donc extraire de chaque suite partielle $P'(\varphi_{\mu(i)})$ une suite partielle $P'(\varphi_{\mu(j(k))})$ qui converge vers un parallélépipède $\bar{P}$, dont une arête est contenue dans le plan $a$ et fait avec $\boldsymbol{a}$ l'angle $\bar{\varphi}$ et une autre est perpendiculaire au plan $a$. Il s'ensuit que le volume de $\bar{P}$ n'est pas supérieur à $v(\bar{\varphi})$. D'autre part, pour $\nu$ suffisamment grand, il existe évidemment un parallélépipède $P^\nu$, contenu dans $R'$, ayant une arête parallèle à l'axe des $z$ et une autre située dans le plan $a$ faisant avec la direction de $\boldsymbol{a}$ un angle $\varphi_\nu$, tel que la différence entre le volume de $P^\nu$ et $v(\bar{\varphi})$ soit aussi petite que l'on veut. Le volume du parallélépipède $P'(\varphi_\nu)$ n'est pas inférieur à celui de $P^\nu$. Donc le volume de $\bar{P}$ n'est pas inférieur non plus à $v(\bar{\varphi})$. Ainsi, finalement, le volume de $\bar{P}$ est égal à $v(\bar{\varphi})$ et, par suite,

$$P'(\bar{\varphi})=\bar{P}=\lim_{k\to\infty}P'(\varphi_{\mu(j(k))}),$$

d'où l'on a
$$\delta(\overline{\varphi}) = \lim_{k\to\infty} \delta(\varphi_{\mu(j(k))}).$$
Nous avons démontré que toute suite partielle $\delta(\varphi_{\mu(i)})$ extraite de la suite $\delta(\varphi_\nu)$, contient une suite partielle convergente vers $\delta(\varphi)$. Il en résulte immédiatement que $\lim\limits_{\nu\to\infty} \delta(\varphi_\nu) = \delta(\overline{\varphi})$. La fonction $\delta(\varphi)$ est donc continue.

Pour achever la démonstration, admettons que $v(\varphi_0) = \max v(\varphi)$ et remarquons que si $\omega_0 = \omega(\varphi_0)$, on a $P(\omega_0) = P(\varphi_0)$ et $\delta(\omega_0) = -\delta(\varphi_0)$, car la suite des points $A_1(\omega_0), A_2(\omega_0), A_3(\omega_0), A_4(\omega_0)$ est dans ce cas évidemment une permutation cyclique de la suite $A_1(\varphi_0), A_2(\varphi_0), A_3(\varphi_0), A_4(\varphi_0)$, où les indices pairs et impairs sont échangés. La fonction $\delta(\varphi)$ étant continue dans l'intervalle $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \omega_0$ doit prendre au moins une fois la valeur zéro, ce qu'il fallait démontrer.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916.

[2] T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.

[3] K. Radziszewski, *Sur un probème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 6, (1952), p. 5—18.

[4] K. Radziszewski, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonserites aux figures convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **235**, (1952), p. 771—773.

[5] W. Süss, *Ueber Parallelogramme und Rechtecke, die sich ebenen Eibereiche einschreiben lassen*, Rend. Mat. de Appl. (5) **14**, (1955), p. 338—341.

## Streszczenie

K. Radziszewski udowodnił, że w dowolny owal płaski o polu $S > 0$ można wpisać prostokąt o polu $s \geqslant S/2$ a w owal przestrzenny o objętości $V > 0$ mający płaszczyznę symetrii można wpisać prostopadłościan o objętości $v \geqslant \frac{2}{9} V$.

W pracy obecnej podobną metodą dowodzi się, że w dowolny owal przestrzenny o objętości $V$ można wpisać równoległościan o objętości $v \geqslant \frac{2}{9} V$.

## Резюме

К. Радзишевский доказал*), что в произвольный плоский овал с площадью $S > 0$ можно вписать прямоугольник с площадью $s \geqslant S/2$ а в пространственный овал объёма $V > 0$, обладающий площадью симметрии, можно вписать прямой параллелепипед объёма $v \geqslant \frac{2}{9} V$.

В настоящем труде сходным методом доказывается, что в произвольный пространственный овал объёма $V > 0$ можно вписать параллелепипед объёма $v \geqslant \frac{2}{9} V$.