ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. VIII, 4 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur quelques propriétés des fonctions de distances. II.

O niektórych własnościach funkcji odległości. II.

О некоторых свойствах функций расстояний II

§ **1.** Dans un article publié dans le „Journal de mathématiques pures et appliquées" [1] j'ai énoncé, sans démonstration, les deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ des droites situées dans un même plan P, et E un ensemble borné et fermé, contenu dans P. Désignons par d_i la distance d'un point de E à la droite D_i. On a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{E} d_i^2 \leqslant 3 \max_{E} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right);$$

*l'égalité a lieu, par exemple, lorsque $n = 3$ et D_1, D_2, D_3 sont les côtés d'un triangle équilatéral et E est ce triangle *).*

Théorème II. *Si les conditions du théorème I sont vérifiées et si les droites D_i passent toutes par le même point, on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{E} d_i^2 \leqslant 2 \max_{E} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right);$$

l'égalité a lieu, par exemple, lorsque E est l'ellipse, le long de laquelle $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ est constante.

*) cf. pour plus de détails en ce que concerne le signe d'égalité le dernier alinéa du § 3.

§ 2. Je commencerai par établir l'énoncé II. Il est clair qu'il suffit de le prouver dans le cas, où l'ensemble E se réduit à à un lieu géométrique de l'équation $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = \text{const}$, car l'ensemble arbitraire E est toujours contenu à l'intérieur de la courbe $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = \max_E (d_1^2 + + d_2^2 + \ldots + d_n^2)$. Supposons que le point commun à toutes les droites D_i est à l'origine, soient $y = m_i x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les équations de ces droites. L'équation du lieu géométrique $d_1^2 + d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \text{const}$ pourra s'écrire:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y - m_i x)^2}{1 + m_i^2} = C,$$

où C est une constante positive. En tournant convenablement les axes de coordonnées on peut supposer que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{1 + m_i^2} = 0.$$

En posant

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{1 + m_i^2}, \qquad \beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + m_i^2}$$

on voit que le lieu en question est l'ellipse $\alpha x^2 + \beta y^2 = C$.*) Or on trouve sans peine que le maximum du carré de la distance d'un point de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à la droite $y = mx$ est égal à

$$\frac{a^2 m^2 + b^2}{1 + m^2};$$

or $a^2 = \frac{c}{\beta}$, et $b^2 = \frac{c}{\beta}$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \max d_i^2 = \frac{c}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{1 + m_i^2} + \frac{c}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + m_i^2} = 2C;$$

*) Un des nombres m_i peut devenir infini après la rotation des axes. Les fractions correspondantes sont égales à 0 ou à $^1/_2$.

cette égalité entraîne immédiatement le théorème II. En ce qui concerne la discussion du cas où l'inégalité se réduit à l'égalité, cf. le dernier alinéa du § 3.

§ 3. Passons à la démonstration du théorème I. Il suffit encore de considérer le cas, où l'ensemble E est lieu géométrique de l'équation $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = C$. Si l'équation de la droite D_i est $y = m_i x + c_i$, l'équation du lieu géométrique en question peut s'écrire:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y - m_i x - c_i)^2}{1 + m_i^2} = C.$$

En choisissant convenablement les axes de coordonnées on peut supposer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{1 + m_i^2} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1 + m_i^2} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c_i}{1 + m_i^2} = 0,$$

de sorte que lieu géométrique en question est l'ellipse

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = C - \gamma,$$

où l'on a posé

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{1 + m_i^2}, \qquad \beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + m_i^2}, \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{1 + m_i^2},$$

$\gamma > 0$, car les droites D_i ne passent pas toutes par l'origine.

Le maximum du carré de la distance d'un point de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

à la droite $y = mx + c$ est égal, d'après ce qui précède, à l'expression

$$\frac{[\sqrt{b^2 + a^2 m^2} + |c|]^2}{1 + m^2}.$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \max d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(C - \gamma)\left(\frac{m_i^2}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + |c_i|^2 + 2|c_i|\sqrt{C - \gamma}\sqrt{\frac{m_i^2}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}{1 + m_i^2} =$$

$$= 2(C - \gamma) + \gamma + 2\sqrt{C - \gamma}\sum_{i=1}^{n} \frac{|c_i|\sqrt{\frac{m_i^2}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}{1 + m_i^2}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy on constate que la dernière somme ne dépasse pas

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{|c_i|^2}{1+m_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{m_i^2}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{1+m_i^2}} = \sqrt{2\gamma}\,,$$

par suite on obtient l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \max d_i^2 < |\sqrt{\gamma} + \sqrt{2(C-\gamma)}\,|^2.$$

Or $0 < \gamma < C$ et l'on trouve sans peine que le maximum de $\sqrt{\gamma}+\sqrt{2(C-\gamma)}$ lorsque γ varie dans l'intervalle $0 \leqslant \gamma < C$ est atteint pour $\gamma = \frac{C}{3}$ et qu'il est égal à $\sqrt{3C}$, ce qui entraîne immédiatement le théorème I. Dans quelles conditions la limite 3 de l'énoncé I est-elle atteinte? D'après ce qui précède il faut et il suffit pour cela 1^0) que l'on ait le signe d'égalité dans l'inégalité de Cauchy ce qui a lieu lorsque les rapports

$$c_i^2 : (m_i^2/\alpha + \beta)$$

ne dépendent pas de l'indice i; les directions des droites D_i étant données cette condition sera réalisée si les rapports des distances des droites D_i à l'origine sont convenablement choisis, 2^0) que $C = 3\gamma$ et 3^0) que les sommes $\sum\limits_{i=1}^{n} \max\limits_{E} d_i^2$ soient les mêmes dans le cas de l'ensemble E donné et dans le cas de l'ellipse $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2 = C$ c. à. d. que E soit un ensemble contenu dans cette ellipse et contenant tous les n points de l'ellipse dont les distances des droites D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont les plus grandes. Dans le cas particulier où les droites D_i délimitent un triangle équilatéral dont les longueurs des cotés sont égales à 2 et dont le centre est à l'origine on trouve que l'ellipse $\alpha x^2 + \beta y^2 = C - \gamma$ se réduit au cercle $\frac{3}{2}(x^2+y^2) = C-1$ qui pour $C = 3$ est circonscrit au triangle, on obtient ainsi l'exemple de l'énomcé I.

§ 4. Il est probable que les théorèmes I et II s'étendent au cas de l'espace, en y remplaçant les droites D_i par des plans (cependant il est possible que les valeurs 3 et 2 des constantes qui figurent dans ces énoncés devront être remplacées par d'autres).

J'estime très probable qu'il est aussi possible de remplacer dans ces énoncés les sommes des carrés $\sum d_i^2$ et $\sum \max d_i^2$ par $\sum d_i$ et $\sum \max d_i$ respectivement, et cela *sans modification des constantes* 3 *et* 2. Je vais établir le théorème II ainsi modifié dans quelquqes cas particuliers. Il suffit encore de considérer le cas, où l'ensemble E est le lieu géométriquqe de l'équation $\Sigma d_i =$ const. Or, on a le lemme suivant:

Lemme. Considérons les droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ situées dans un même plan et passant par l'origine des coordonnées. Soit $d_i(x, y)$ la distance du point $M(x, y)$ à la droite d_i. Le lieu géométrique des points où $\sum_{i=1}^{n} d_i(x, y) =$ const est un polygone P convexe, qui contient l'origine à son intérieur et dont les sommets sont situés sur les droites D_i.

Il est d'ailleurs clair que deux polygones, qui correspondent à différentes valeurs de la constante, sont homothétiques par rapport à l'origine. La seule assertion du lemme, qui n'est pas évidente, est celle d'après laquelle le polygone P est convexe. Or, ceci est évident dans le cas particulier où les angles que font les droites entre elles sont tous égaux, car le polygone P est alors un polygone régulier. Si le polygone P n'était pas convexe dans le cas général, on pourrait modifier continuement les angles que font entre elles les droites D_i, de manière qu'ils deviennent tous égaux; il est clair qu'il existerait alors un système de droites D_i tel que le polygone P correspondant contiendrait deux côtés consécutifs, soit AB et BC, situés sur une même droite. Si l'équation de OB est $ax + by = 0$, où $a^2 + b^2 = 1$, la distance d'un point $M(x, y)$ à OB est égale à $\pm(ax + by)$, où le signe change lorsque M traverse OB. Il s'ensuit que les équations des côtés AB et BC seront respectivement de la forme

$$(\alpha + a)x + (\beta + b)y + \gamma = 0$$

et

$$(\alpha - a)x + (\beta - b)y + \gamma = 0 \qquad (\gamma \neq 0)$$

Si BC est le prolongement de AB, les deux équations qui viennent d'être écrites représentent la même droite, on a donc $\alpha + a = \alpha - a$ et $\beta + b = \beta - b$, c.à d. $a = b = 0$, ce qui n'est pas possible. Le lemme est donc établi.

Supposons en particulier que les angles entre les droites D_i soient tous égaux, et que $n \geqslant 2$. On constate immédiatement que le long du polygone régulier ayant $2n$ côtés $\sum_{i=1}^{n} d_i = \text{const}$. Le rapport $\sum_{i=1}^{n} d_i : \sum_{i=1}^{n} \max d_i$ est plus grand ou égal à

$$\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin(n-1)\frac{\pi}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}} \geqslant \frac{2}{\pi}\,\frac{\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

Lorsque $n \to \infty$, le rapport étudié tend vers $2/\pi$.

Passons au cas où les angles que font entre elles les droites D_i sont quelconques. Lorsque $n = 2$, on trouve jue le polygone $d_1 + d_2 = \text{const}$ est un rectangle dont les droites D_1 et D_2 sont des diagonales, un calcul élémentaire montre que dans ce cas le rapport $(d_1 + d_2) : (\max d_1 + \max d_2)$ est égal à $1/2$.

Supposons maintenant $n = 3$. Supposons qu'en tournant dans le sens direct autour de l'origine on rencontre successivement les droites D_1, D_2, D_3. Désignons par φ_1 et φ_3 les angles que font les droites D_1 et D_3 respectivement avec la droite D_2 $(0 < \varphi_1 < \pi,\ 0 < \varphi_3 < \pi,\ \varphi_1 + \varphi_3 < \pi)$, et par r_i la distance à l'origine d'un point d'intersection de la droite D_i avec le polygone P d'équation $d_1 + d_2 + d_3 = \text{const}$ (D_i coupe P en deux points, dont les distances à l'origine sont les mêmes). La valeur de $d_1 + d_2 + d_3$ étant constante le long de P, on aura:

$$(1) \quad r_1\,|\sin\varphi_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_3)| = r_2\,|\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3| = r_3\,|\sin\varphi_3 + \sin(\varphi_1 + \varphi_3)|$$

et on peut admettre que la valeur commune de ces 3 produits est égale à 1. Admettons, en premier lieu, que le maximum de la distance d'un point de P à la droite D_1 est atteint en un point de D_2, que le maximum de la distance d'un point de P à la droite D_2 est atteint en un point de D_3 et que le maximum de la distance d'un point de P à la droite D_3 est atteint et un point de D_1. On peut décrire cette situation symboliquement de la manière suivante: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$. Cela posé, l'inégalité à démontrer peut s'écrire

$$r_2 \sin\varphi_1 + r_3 \sin\varphi_3 + r_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_3) \leqslant 2$$

c.à d., et tenant compte des égalités (1):

$$(2) \quad \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3} + \frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_3 + \sin(\varphi_1 + \varphi_3)} + \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_3)}{\sin\varphi_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_3)} \leqslant 2.$$

Or, il suffit d'établir que la somme des trois nominateurs des fractions qui viennent d'être écrites ne dépasse par l'un quelconque des trois dénominateurs, multiplié par 2, car la somme (2) ne peut qu'augmenter lorsqu'on y remplace chacun des trois dénominateurs par le plus petit d'entre eux. On établit cependant facilement l'inégalité $\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3 + \sin(\varphi_1+\varphi_3) \leqslant 2(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3)$, car $\sin(\varphi_1+\varphi_3) \leqslant \sin\varphi_1 + \sin\varphi_3$. On a aussi $\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3 + \sin(\varphi_1+\varphi_3) \leqslant 2\sin\varphi_3 + 2\sin(\varphi_1+\varphi_3)$ c. à d. $\sin(\varphi_1+\varphi_3) \geqslant \sin\varphi_1 - \sin\varphi_3$, car en posant $\varphi_1+\varphi_3 = \alpha$ l'inégalité s'écrit $\sin(\alpha-\varphi_3) \leqslant \sin\alpha + \sin\varphi_3$. On a enfin $\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3 + \sin(\varphi_1+\varphi_3) \leqslant 2\sin\varphi_1 + 2\sin(\varphi_1+\varphi_3)$, car $\sin(\varphi_1+\varphi_3) \geqslant \sin\varphi_3 - \sin\varphi_1$.

Supposons maintenant que le maximum de la distance d'un point du polygone P à la droite D_1 soit atteint en un point de D_2, que le maximum de la distance d'un point de P à la droite D_2 soit atteint en un point de D_1 et que le maximum de la distance d'un point de P à la droite D_3 soit atteint en un point de D_1. On peut décrire cette situation symboliquement de la manière suivante: $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 1$. r_1, r_2, r_3 ayant la même signification que dans le cas précédent, l'inégalité à démontrer peut s'écrire:

$$r_2 \sin\varphi_1 + r_1 [\sin\varphi_1 + \sin(\varphi_1+\varphi_3)] \leqslant 2$$

c.à d., en tenant compte des égalités (1)

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_3} \leqslant 1$$

ce qui est évident.

Les deux cas que nous avont étudiés épuisent le problème, car on voit aisément que d'autres cas possibles se ramènent aux deux cas précédents par un changement de notations.

La méthode que nous venons d'exposer dans le cas où $n = 3$ réussit aussi lorsque $n = 4$, mais le nombre des cas à envisager augmente considérablement et, par suite, la démonstration devient sensiblement plus longue. Il est donc indiqué de rechercher une autre méthode de démonstration, valable dans le cas de l'entier n arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Biernacki, *Sur quelques propriétés des fonctions de distances*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, **31**, (1952), p. 305—318.

Streszczenie

Udowadniam twierdzenia następujące:

I. Jeśli $D_1, D_2, \ldots, D_n$ są położonymi na płaszczyźnie P prostymi, E leżącym na P zbiorem domkniętym i ograniczonym, a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ odległościami punktu zbioru E od prostych $D_1, D_2, \ldots, D_n$ odpowiednio, to zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \max_E d_i^2 \leqslant 3 \max_E \sum_{i=1}^{n} d_i^2 .$$

przy czym znak równości ma miejsce, gdy $n = 3$, E jest trójkątem równobocznym a proste D_1, D_2, D_3 są bokami tego trójkąta.

II. Jeśli, przy założeniach twierdzenia poprzedniego, proste $D_1, D_2, \ldots, D_n$ przechodzą przez jeden i ten sam punkt, to zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \max_E d_i^2 \leqslant 2 \max_E \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

przy czym znak równości ma miejsce, gdy E jest elipsą wzdłuż której $d_1^2 + d_2^2 + \ldots, + d_n^2 = \text{const}$.

Резюме

Я доказываю следующие теоремы:

1. Если $D_1, D_2, \ldots, D_n$ суть прямые, лежащие на плоскости P, E есть ограниченное и замкнутое множество, расположенное на P a d_1, $d_2 \ldots, d_n$ — расстояния точки множества E соответственно от $D_1, D_2, \ldots, D_n$, то имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \max_E d_i^2 \leqslant 3 \max_E \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

причём знак равенства имеет место тогда, когда $n = 3$, E — равносторонний треугольник, а прямые D_1, D_2, D_3 суть стороны этого треугольника.

2. Если при условиях предыдущей теоремы прямые $D_1, D_2, \ldots, D_n$ проходят через ту же самую точку, то имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \max_E d_i^2 \leqslant 2 \max_E \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

причём знак равенства имеет место, когда E есть эллипс, вдоль которого

$$d_i^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = \text{const}.$$