ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. VIII, 3 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz. Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur les fonctions en aire multivalentes

O funkcjach polowo wielolistnych

О функциях поверхностно многолистных

§ 1. C'est D. C. Spencer qui a étudié le premier les fonctions en aire multivalentes [**9**], [**10**], [**11**]. Voici leur définition. Supposons que $f(z)$ soit holomorphe dans un domaine D et désignons par $N(t, \varphi)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = w = t \cdot e^{i\varphi}$, $t > 0$, dans le domaine D, en tenant compte de la multiplicité de ces racines.

Posons

$$N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(t, \varphi)\, d\varphi.$$

S'il existe un entier p tel que l'on a pour tout $R > 0$

$$\int_0^R N(t) \cdot t\, dt \leq \frac{p}{2} \cdot R^2, \tag{1}$$

$f(z)$ est dite p-valente en aire dans D*). La condition (1) exprime le fait que l'aire de le portion de la surface de Riemann qui se projette sur le cercle $|w| < R$ ne dépasse pas, quel que soit R, p fois l'aire de ce cercle. Une fonction p-valente est évidemment p-valente en aire.

Considérons, en particulier, des fonctions

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots + a_n z^n + \dots \tag{2}$$

holomorphes et en aire p-valentes dans le cercle $|z| < 1$. Il résulte de la

*) Cette définition s'étend évidemment au cas, où p est un nombre positif qquelconque, cependant je ne m'occuperai pas ici de cette extension.

définition de ces fonctions que $f(z)$ ne s'annule pas dans le domaine $0<|z|<1$ et que, par suite, la fonction

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = p + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots \tag{3}$$

est holomorphe dans le cercle $|z|<1$. Je vais établir les propositions suivantes, dans lesquelles $A_1(p)$, $A_2(p)$, $B(p)$, $C(p)$ désignent des nombres qui ne dépendent que de p.

I. *Si* $z=r\cdot e^{i\Theta}$, $0<r<1$, *on a*

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|^2 d\Theta < \frac{A_1(p)}{1-r} \log \frac{A_2(p)}{1-r}\,.\text{*)}$$

II. *On a* $\varlimsup_{n\to\infty} |b_n| \leqslant B(p)$. *Cependant* $|b_n|$ *n'est pas borné en général.*

L'énoncé II est, à ma connaissance, nouveau, même dans le cas particulier des fonctions multivalentes.

III. $\int f(z)\,dz$, $\int dz \int f(z)\,dz$, ... *sont des quotients de fonctions holomorphes et bornées dans le cercle* $|z|<1$*).

IV. *Désignons par* $M(r)$ *le maximum du module de la fonction (2) dans le cercle* $|z|\leqslant r<1$, et posons

$$\mathfrak{M}(r) = r^p + |a_{p+1}|r^{p+1} + \ldots + |a_n| r^n + \ldots$$

Si l'on a, pour tout n,

$$k|a_n|^2 \geqslant \frac{1+|a_{p+1}|^2+\ldots+|a_{n-1}|^2}{n}$$

k étant fixe (condition vérifiée avec $k=1$ *lorsque la suite* $|a_n|$ *est non décroissante), on a pour* $0<r<1$

$$\frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} \leq \sqrt{k}\cdot C(p)\,.$$

J'ignore si l'énoncé IV demeure exact lorqu'on y supprime l'hypothèse relative à la suite $|a_n|$. Dans le cas général, je n'ai pu établir [2] que l'inégalité

$$\frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} \leq 1 + C(p)\sqrt{\log\frac{1}{1-r}}\,.$$

*) Cet énoncé a été démontré dans le cas particulier des fonctions en moyenne multivalentes dans mon article [2].

§ **2.** Soit r_0 un nombre tel que $0 < r_0 < 1$ et D la couronne $r_0 < |z| < r < 1$, coupée suivant le rayon $z < 0$; une branche quelconque de $\log f(z)$ est holomorphe dans D et représente D sur une surface de Riemann tracée dans le plan de la variable $w = u + iv$. Supposons que u étant fixé, les valeurs de w qui correspondent aux points de cette surface soient situées sur le segment $v_1(u) < v < v_2(v)$, et désignons par $n(u, v)$ le nombre de fois dont le point w est recouvert par cette surface. Si la surface de Riemann en question est située dans la bande $u_0 < u < U$, son aire est égale à

$$S(r) = \int_{u_0}^{U} du \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} n(u, v) \cdot dv.$$

Or, on a évidemment $u = \log t$, $v = \varphi$ et

$$\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} n(u, v) \cdot dv = \int_0^{2\pi} N(t, \varphi)\, d\varphi = N(t),$$

donc

$$S(r) = \int_{t_0}^{T} N(t) \cdot \frac{dt}{t}, \qquad (t_0 = e^{u_0}, \quad T = e^{U}).$$

Or nous pouvons écrire, en intégrant par parties:

$$\int_{t_0}^{T} N(t) \frac{dt}{t} = \int_{t_0}^{T} N(t)\, t \cdot \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{T} N(t)\, t\, dt + 2 \int_{t_0}^{T} \left[\int_{t_0}^{t} N(t)\, t\, dt \right] \frac{dt}{t^3}.$$

En vertu de l'inégalité (1) on a donc

$$S(r) = \int_{t_0}^{T} N(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{p}{2} + p(\log T - \log t_0) = p\left(\frac{1}{2} + U - u_0\right).$$

Or, l'on a, d'après D. C. Spencer [10] et [9]

$$\frac{4^p |z|^p}{7^p (1 + |z|)^{2p}} \leq |f(z)| \leq \frac{A_3(p) |z|^p}{(1 - |z|)^{2p}}, \quad {}^{*})$$

donc

$$U < A_4(p) \log \frac{1}{1 - r}, \qquad u_0 > p(\log r_0 - \log 7)$$

(4) $$S(r) < p^2 \left(\log \frac{1}{r_0} + \log 7 \right) + p + p\, A_4(p) \log \frac{1}{1 - r}, \qquad (r_0 < r < 1).$$

---

*) On désigne généralement par $A_i(p)$ un nombre qui ne dépend que de p.

La fonction $g(z) = \log [z^{-p} f(z)]$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$. Soit $\psi(r)$ l'aire de la surface de Rieman engendrée par $g(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leqslant r$. Un calcul facile montre que l'on a

$$\psi(r) = S(r) - 2\pi p^2 \log r/r_0 + \psi(r_0). \tag{5}$$

Or, r_0 étant fixé, $\psi(r_0)$ ne dépasse pas un nombre qui ne dépend que de p (cela résulte par exemple des limitations connues des coefficients a_n), donc, d'après (4) et (5), on a pour $r > r_0$

$$\psi(r) < A_5(p) \log \frac{A_6(p)}{1-r}. \tag{6}$$

Or

$$\psi(r) = \int_0^r r\, dr \int_0^{2\pi} |g'(z)|^2 d\Theta, \qquad \text{où } g(z) = \log [z^{-p} f(z)].$$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{z f'(z)}{f(z)} \right|^2 d\Theta = r\psi'(r) + 2\pi p^2,$$

donc, en utilisant l'inégalité (6) et l'intégrale de Cauchy, appliquée à la fonction holomorphe $\psi(z)$, que

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{z f'(z)}{f(z)} \right|^2 d\Theta < \frac{A_1(p)}{1-r} \log \frac{A_2(p)}{1-r}. \tag{7}$$

Cette inégalité est établie pour $r_0 < r < 1$, mais pour $r < r_0$ le premier membre de (7) ne dépasse pas une fonction de p [cf., par exemple, B i e r n a c k i, [2], formule (8")], donc on peut supposer que (7) a lieu pour tout $0 < r < 1$.

§ 3. Pour établir l'énoncé II remarquons que si

$$\frac{z f'(z)}{f(z)} = p + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

et $g(z) = \log [z^{-p} f(z)]$, l'on a $g'(z) = -\dfrac{p}{z} + \dfrac{f'(z)}{f(z)}$

et, par suite,

$$g(z) = b_1 z + \frac{b_2 z^2}{2} + \dots + \frac{b_n z^n}{n} + \dots,$$

donc l' inégalité (6) peut s'écrire

$$\pi\left[|b_1|^2 r^2 + \frac{|b_2|^2}{2} r^4 + \ldots + \frac{|b_n|^2}{n} r^{2n} + \ldots\right] < A_5(p) \log \frac{A_6(p)}{1-r}\,.$$

En y posant $r = 1 - \frac{1}{n}$, on voit que l'on on a, pour tout n narel,

$$|b_1|^2 + \frac{|b_2|^2}{2} + \ldots + \frac{|b_n|^2}{n} < A_7(p) \log n\,.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) : \log n = 1$, donc $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |b_n| \leq \sqrt{A_7(p)} = B(p)$, cela entraîne la première partie de l'énoncé II.

Pour montrer que $|b_n|$ n'est pas généralement borné, supposons que $p = 1$ et que $f(z)$ soit univalente dans le cercle $|z| < 1$. On sait que la fonction

$$h(z) = \sqrt[k]{f(z^k)} = z + c_1 z^{1+k} + \ldots + c_n z^{1+nk} + \ldots, \tag{8}$$

où k est un nombre naturel quelconque, est aussi holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$; elle y est en outre k-symétriqque, car si $\tilde{\omega}$ est une racine k-ème de l'unité, l'on a $h(\tilde{\omega} z) = \tilde{\omega} h(z)$. On établit sans peine l'identité

$$z h'(z) = h(z) z^k f'(z^k)/f(z^k)\,. \tag{*}$$

En tenant compte des développements (3) et (8) et en égalant les coefficients de z^{1+nk} des deux membres de l'identité (*), on trouve que l'on a $(1 + nk)\, c_n = c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_{n-1} c_1 + b_n$.

Suposons que la suite $|b_n|$ soit bornée; on aurait donc $|b_n| < B$, où B ne dépend pas de n, et par suite

$$|c_n| < \frac{(1 + |c_1| + \ldots + |c_n|) B}{nk}$$

Or, j'ai établi dans mon travail [1] l'inégalité $1 + |c_1| + \ldots + |c_n| < A(k)\, n^{\frac{2}{k}}$, où $A(k)$ ne dépend que de k; il en résulterait donc l'inégalité $|c_n| < B_1 n^{\frac{2}{k}-1}$, où B_1 ne dépend pas de n. Cette inégalité constitue l'hypothèse bien connue de G. Szegö *), cependant J. E. Littlewood a reconnu [7]

---

*) G. Szegö a supposé, plus précisément, que l'on a

$$|c_n| < B_1(k)\, n^{\frac{2}{k}-1}$$

que cette hypothèse est inexacte, ainsi donc la suite $|b_n|$ n'est pas bornée en général.

§ **4**. L'énoncé III s'établit tout pareillement comme dans le cas particulier des fonctions en moyenne multivalentes (cf. mon travail [**2**]). En posant notamment

$$\varphi(z) = \int_0^z f(z)\,dz$$

on déduit de l'inégalité (7) et d'une inégalité que j'ai établie dans mon article [**4**], à savoir

$$\int_0^{2\pi} \left| R\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \right| d\Theta \leq \int_0^{2\pi} \left| R\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \right| d\Theta,$$

où R désigne la partie réelle d'une fonction holomorphe sur une circonférence $|z| = r$, sur laquelle $f(z)$ et $f'(z)$ ne s'annulent pas, que l'on a:

$$\int_0^{2\pi} r \left| \frac{\partial \log|\varphi|}{\partial r} \right| d\Theta \leq 2\pi + \int_0^{2\pi} \left| R\left(\frac{zf'}{f}\right) \right| d\Theta \leq 2\pi + \\ + \sqrt{2\pi \frac{A_1(p)}{1-r} \log \frac{A_2(p)}{1-r}}\,.$$

En intégrant par rapport à r on trouve que l'expression

$$T(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\varphi(re^{i\Theta})|\,d\Theta$$

est bornée lorsque $r \to 1$, donc, d'après R. N e v a n l i n n a [**8**], que $\varphi(z)$ est le quotient de fonctions holomorphes et bornées dans le cercle $|z| < 1$.

§ **5**. Passons à la démonstration de l'énoncé IV. En appliquant l'inégalité bien connue de L. F e j e r et F. R i e s z [**6**] à la fonction $z^p + |a_{p+1}| z^{p+1} + \ldots + |a_n| z^n + \ldots$, on trouve que

$$\int_0^r M^2(r)dr \leq \int_0^r \mathfrak{M}^2(r)\,dr \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2\,d\Theta,$$

donc, en tenant compte de l'hypothèse relative à la suite $|a_n|$.

$$\frac{\int_0^r M^2(r)\,dr}{1-r^2} \leqq 2\pi \sum_{n=p}^{\infty} (|a_p|^2 + |a_{p+1}|^2 + \ldots + |a_n|^2)\, r^{2n} \leqq$$

$$\leqq 2\pi k \sum_{n=p}^{\infty} (n+1)\, |a_{n+1}|^2 r^{2n} \leqq 2k \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2 d\Theta,$$

$$(a_p = 1,\ r > 1/2).$$

En utilisant maintenant l'inégalité de D. C. S p e n c e r [11]:

$$r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2 d\Theta < A_7(p) M^2(r),$$

on trouve

$$(*) \qquad \frac{\int_0^r M^2(r)\,dr}{1-r^2} < 2k\, A_7(p)\, M^2(r).$$

Or j'ai établi ([5], énoncé II *a*), que l'on a généralement

$$\mathfrak{M}(r) \leqq \sqrt{\frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\sqrt{r}\, e^{i\Theta})|^2 d\Theta}{1-r}},$$

donc, d'après l'inégalité citée de D. C. S p e n c e r

$$\mathfrak{M}(r) \leqq A_8(p) \sqrt{\frac{\int_{1/2}^{\sqrt{r}} M^2(r)\,dr + A_9(p)}{1-r}}$$

et, d'après (*), $\mathfrak{M}(r) < \sqrt{k}\, A_{10}(p) M(\sqrt{r})$. Cependant $f(z)$ est „très lentement croissante", car le rapport $M(r) : M(r^2)$ ne dépasse pas une fonction de p (cf. mes travaux [2] et [3]), on a donc en effet $\mathfrak{M}(r) < \sqrt{k}\, C(p)\, M(r)$. Cette inégalité établie pour $r > 1/2$, s'étend sans peine au cas $0 < r < 1/2$ (cf. § 1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Biernacki, *Sur les fonctions univalentes et k-symétriques*. Bulletin des sci. math. **69** (1945), p. 204—214.

[2] M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*. Bulletin des sci. math. **70** (1946), p. 51—76.

[3] M. Biernacki, *Sur les fonctions lentement croissantes*. Bulletin scient. de l'Ecole Polyt. de Timisoara, **12** (1946), p. 146—162.

[4] M. Biernacki, *Sur une inégalité entre les moyennes des dérivées logarithmiques*. Mathematica, Cluj, **23** (1947-8), p. 54—59.

[5] M. Biernacki, *Sur quelques applications de la formule de Parseval*, Annales UMCS, sectio A, **4** (1950), p. 23—40.

[6] L. Fejer et F. Riesz, *Über einige funktionentheoretische Ungleichungen*. Math. Zeitschr. **11** (1921), p. 305—314.

[7] J. E. Littlewood, Quart. Journ. of Mathem., **9** (1938), p. 14—20.

[8] R. Nevalinna, *Eindeutige analytische Funktionen*. Berlin, J. Springer, (1936), p. 178.

[9] D. C. Spencer, *On finitely mean valent functions*. Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), p. 418—435.

[10] D. C. Spencer, *On mean one-valent functions*. Annals of Math., **42**, (1941), p. 614—633.

[11] D. C. Spencer, Proc. Lond. Math. Soc. **47** (1942), p. 201—211.

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk.

Institut Mathématique
de l'Académie Polonaise
des Sciences.

Streszczenie

Badam klasę funkcji $f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots + a_n z^n + \dots$ holomorficznych i polowo p-listnych w kole $|z| < 1$. Oznaczając przez $A_1(p)$, $A_2(p)$, $B(p)$, $C(p)$ liczby zależne wyłącznie od p, udowadniam twierdzenia następujące:

I. Jeśli $z = r e^{i\Theta}$, $0 < r < 1$, to

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|^2 d\Theta < \frac{A_1(p)}{1-r} \log \frac{A_2(p)}{1-r} .$$

II. Jest $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |b_n| \leq B(p)$, ale ciąg $|b_n|$ (§ 3) nie jest na ogół ograniczony.

III. $\int f(z)dz$ i całki iterowane są ilorazami funkcji holomorficznych i ograniczonych w kole $|z| < 1$.

IV. Niech $M(r)$ oznacza maximum modułu funkcji $f(z)$ w kole $|z| \leqslant r < 1$, a $\mathfrak{M}(r) = r^p + |a_{p+1}| r^{p+1} + \dots + |a_n| r^n + \dots$

Jeśli dla każdego n jest

$$k|a_n|^2 \geqslant (1 + |a_{p+1}|^2 + \ldots + |a_{n-1}|^2)\, n\,,$$

gdzie k jest stałą to

$$\mathfrak{M}(r) < \sqrt{k}\; C(p)\, M(r).$$

dla $0 < r < 1$.

Резюме

Исследуется класс функций $f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots + a_n z^n + \ldots$ голоморфных и площадно p — листных в круге $|z| < 1$. Обозначая через $A_1(p)$, $A_2(p)$, $B(p)$, $C(p)$ числа, зависящие исключительно от p, я доказываю следующие теоремы

1. Если $z = re^{i\Theta}$, $0 < r < 1$, то

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|^2 d\Theta < \frac{A_1(p)}{1-r} \log \frac{A_2(p)}{1-r}$$

2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |b_n| \leqslant B(p)$ но последовательность $|b_n|$ $\left(\int 3\right)$ в общем случае не ограничена.

3. $\int f(z)\, dz$ и итерированные интегралы являются частными от деления функций голоморфных и ограниченных в круге $|z| < 1$.

4. Пусть $M(r)$ обозначает максимум модуля функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r < 1$, а $\mathfrak{M}(r) = r^p + |a_{p+1}| r^{p+1} + \ldots + |a_n| r^n + \ldots$

Если для всякого n

$$k|a_n|^2 \geqslant (1 + |a_{p+1}|^2 + \ldots + |a_{n-1}|^2)/n$$

где k — постоянная то

$$\mathfrak{M}(r) < \sqrt{k}\; C(p)\, M(r)$$

для $0 < r < 1$.