ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VIII, 2 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki III, Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr K. Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires

Własności asymptotyczne układów równań różniczkowych zwyczajnych prawie liniowych

Асимптотические свойства систем обыкновенных почти линейных дифференциальных уравнений

CHAPITRE I

1. Introduction. Depuis les travaux classiques de H. Poincaré [**12**] et de A. M. Liapounoff [**4**] on s'est beaucoup occupé des propriétés asymptotiques des équations différentielles ordinaires. Continuant les recherches de O. Perron et de H. Späth, T. Peyovitch leur a consacré quelques travaux. Il a démontré dans son Mémoire [**9**] que moyennant certaines hypothèses un système différentiel linéaire non homogène dont la partie non homogène est de *rang* ϱ, admet une famille de solutions $x_i(t)$, pour lesquelles

$$(1,1) \qquad \lim_{t\to\infty} x_i(t)\exp-(\varrho+\varepsilon)\,t=0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

où $\varepsilon>0$ (on trouvera plus de détails dans les remarques qui terminent le § 24, p. 60).

Dans ce travail nous étendons les résultats de Peyovitch aux certains systèmes d'équations *non linéaires* (3,1) (systèmes *presque linéaires)* et nous affaiblissons quelquesunes de ses hypothèses.

Jusqu'à présent les auteurs, pour établir la relation (1,1), suivant l'exemple de Poincaré [**12**], avaient recours au Théorème de l'Hôpital. Or il semble que le Théorème de Bonnet (II *Théorème de la Moyenne du Calcul Intégral*) permet d'obtenir des résultats plus forts (voir § 7 - § 9).

R. B e l l m a n a consacré une belle étude aux propriétés asymptotiques des équations différentielles (voir [1]). Mais il ne s'interesse qu'aux solutions qui tendent vers zéro ou restent bornées quand t croît idéfiniment. Une partie de ses résultats est contenue dans les Théorèmes A et B (voir § 3). Ses méthodes sont bien élégantes, mais il semble que les estimations qu'elles donnent sont trop peu precises pour l'établissement de relations du type (1,1).

Dernièrement M. S. Ł o j a s i e w i c z (voir [5]) en employant les méthodes de M. T. W a ż e w s k i a démontré quelques théorèmes sur les relations entre les solutions des systèmes non linéaires et les solutions des systèmes linéaires correspondantes. Comme corrolaire M. Ł o j a s i e w i c z obtient un théorème sur l'allure assymptotique des équations non linéaires dont les seconds membres ne dépendent pas de t. En plus il admet les hypothèses que 1° toutes les racines caractéristiques de la matrice A (de la matrice de la „partie linéaire du systéme") sont réelles et négatives, 2° la partie, „*non linéaire*" du système a des dérivées bornées par des fonctions des x_k.

Le Chapitre II (§ 4 - § 20) est consacré entièrement à la démonstration des Théorèmes A et B, qui est faite simultanément.

Au paragraphe 21 j'expose quelques généralisations des Théorèmes A et B, accompagnées de remarques sur leur démonstration. Etant donné que les Théorèmes A et B sont bien généraux (même sous leur forme non généralisée), mais en même temps tres compliqués, nous consacrons le reste du Chapitre III (§ 21 - § 25) à l'établissement à titre d'exemple de quelques théorèmes moins généraux, dont l'énoncé est pourtant beaucoup plus simple.

La formule (1,1) sert à comparer la vitesse de croissance des solutions, à celle de la fonction $\exp(\varrho+\varepsilon)t$. Dans ce travail nous allons comparer la vitesse de croissance des solutions à celles des fonctions $\exp\varphi(\varepsilon, t)$ d'un type plus général. Remarquons que malheuresement les fonctions $\varphi(\varepsilon, t)$ doivent vérifier certaines conditions qui sont indispensables; celles-ci impliquent que dans le cas général cette fonction ne diffère pas „*essentiellement*" de la fonction linéaire $(\varrho+\varepsilon)t$. Il y a pourtant des cas particuliers (par exemple lorsque ϱ est une partie réelle des valeurs propres simples de la matrice A - voir (2,1) et (3,1)) où elle peut se comporter d'une autre manière. En choisissant convenablement $\varphi(\varepsilon, t)$ on peut déduire des Théorèmes A et B quelques résultats qui ont déja été obtenus par des méthodes particulières. (Le résultat du § 22 est donné à titre d'exemple. Un autre fournit le théorème bien connu sur l'odre de croissance du logarithme — voir T a t a r k i e w i c z [15], p. 120).

Les conditions des Théorèmes A et B sont suffisantes, mais il est presque certain qu'elles ne sont pas nécessaires pour que leurs thèses soient vraies. Néanmoins des exemples montrent qu'il n'est pas possible de les affaiblir d'une manière essentielle. Ces exemples seront publiés ailleurs (voir **[15]**) [1]).

2. Notations. Nous désignerons par t, x_i, T_k, a_{ik}, ε, etc. des *nombres* et par $x_i(t)$, $Q_k(t)$, $a_{ik}(t)$, $\varphi(\varepsilon, t)$ etc. des fonctions.

Par $\boldsymbol{x} = \{x_1, ..., x_n\}$ etc. nous désignerons un *vecteur* de l'espace cartésien à n dimensions $\boldsymbol{R}_n$ ($\boldsymbol{0} = \{0, ..., 0\}$ — *vecteur-zéro*) et par $\boldsymbol{x}(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ etc. une *fonction-vecteur* (une *courbe*) de l'espace $\boldsymbol{R}_n$. Quand il n'y aura pas lieu à des malentendus nous dirons simplement *fonction* au lieu de *fonction-vecteur.*

Nous désignerons par $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$ une *fonction-vecteur* dépendant d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ et d'un nombre t, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \{g_1(x_1, ..., x_n, t), ..., g_n(x_1, ..., x_n, t)\}$$

Par $\{x_1, ..., x_n, t\}$ nous désignerous un *vecteur* de l'espace cartésien à n dimesions $\boldsymbol{R}_{n+1}$.

Les majuscules grasses désigneront les *matrices:*

$$\boldsymbol{A} = |a_{ik}|, \qquad \boldsymbol{A}(t) = |a_{ik}(t)|, \qquad \boldsymbol{E} = |\delta_{ik}| \text{ — } \textit{matrice-unité}.$$

L'équation séculaire de la matrice $\boldsymbol{A}$ c'est l'equation

$$\text{Det}\,|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0 \tag{2,1}$$

où $\text{Det}\,|\boldsymbol{B}|$ désigne le déterminant de la matrice $\boldsymbol{B}$. Les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ sont les racines de (2,1). Si λ_i est une racine de (2,1) de multiplicité k, alors nous dirons ques la valeur propre λ_i de $\boldsymbol{A}$ est de multiplicité k.

Le *produit d'une matrice* et *d'un vecteur* est défini *comme il suit:*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = |a_{ik}| \cdot \{x_1, ..., x_n\} \underset{df}{=} \left\{\sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k, ..., \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k\right\}$$

(on forme le produit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ comme si le vecteur $\boldsymbol{x}$ était une matrice à une colonne). Comme d'habitude nous posons $a\{x_1, ..., x_n\} \underset{df}{=} \{ax_1, ..., ax_n\}$.

---

[1]) Je tiens à remercier M. T. Ważewski d'avoir attiré mon attention sur le problème auquel est consacré ce Mémoire ainsi qu'à le remercier pour l'interêt qu'il a bien voulu temoigner aux progrès de mon trevail.

Introduisons la notion de *norme* d'un vecteur et d'une matrice:

$$|\boldsymbol{x}| = |\{x_1, \ldots, x_n\}| \underset{df}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$|\boldsymbol{A}| = |\,[a_{ik}]\,| \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|.$$

Il est évident que

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{x}|.$$

La *dérivée* (l'*intégrale*) d'un vecteur (d'une matrice) c'est le vecteur (la matrice) des dérivées (des intégrales).

Introduisons encore la définition récurrente:

$$\int_T^t \Phi(t)\,dt^1 \underset{df}{=} \int_T^t \Phi(t)\,dt$$

$$\int_T^t \Phi(t)\,dt^{j+1} \underset{df}{=} \int_T^t \left[\int_T^t \Phi(t)\,dt^j\right] dt \qquad \text{pour} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

3. **Enoncés des théorèmes.** *Soit une équation différentielle ordinaire* à une fonction-vecteur inconnue (c'est-à-dire si l'on n'emploie pas la notaton vectorielle *un systéme de n équations différentielles* ordinaires à n fonctions inconnues)

$$(3,1) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{f}(t)$$

où la matrice $\boldsymbol{A}$ est *constante* et les fonctions $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{f}(t)$ sont définies et continues pour tous les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et tous les nombres $t \in \langle T_0, +\infty)$.

Supposons qu'il existe des fonctions $\chi(t)$ et $\gamma(t)$ définies et continues pour $t \in \langle T_0, +\infty)$, et telles que pour tous les vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{x}}$ et tous les $t \geqslant T_0$ nous ayons

$$(3,2) \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, t) \equiv \boldsymbol{0}$$

$$(3,3) \qquad |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)| \leqslant \chi(t)\,|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|$$

où

$$(3,4) \qquad \lim_{t \to \infty} \chi(t) = 0$$

et

$$(3,5) \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) \equiv \boldsymbol{0}$$

$$(3,6) \qquad |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)| \leqslant \gamma(t)\,|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|$$

où l'intégrale

(3,7) $$\int_{T_0}^{+\infty} \gamma(t)\,dt \quad \textit{converge.}$$

C'est-à-dire, nous supposons que l'équation (3,1) est une équation *presque linéaire* non homogène à coefficients constants.

Supposons que

(3,8) $$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$$

soient toutes les différentes valeurs propres de la matrice A, ordonnées selon la partie réelle non décroissante. Supposons qu'elles soient de multiplicité

$$r_1, \ldots, r_p$$

respectivement. Evidemment $r_1 + \ldots + r_p = n$.

Considérons l'ensemble ordonné des différentes parties réelles des valeurs propres (3,8)

(3,9) $$\bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 < \ldots < \bar{\varrho}_q$$

(l'on a $q \leqslant p \leqslant n$). Soit $\bar{\varrho}_0 =$ un nombre réel quelconque $< \bar{\varrho}_1$ et soit $\bar{\varrho}_{q+1} = +\infty$.

Définition. *Nous dirons que la fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ est une fonction de comparaison du système* (3,1), *de rang m, si*

a) *La fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ est définie et continue dans l'ensemble* $(0, \Delta) \times \times \langle T_0, +\infty)$ *où Δ est un nombre* > 0.

b) *La fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ est non décroissante par rapport à ε. C'est-à-dire si $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ alors*

$$\varphi(\varepsilon_1, t) \leqslant \varphi(\varepsilon_2, t)$$

pour tout $t \in \langle T_0, +\infty)$.

c) *Il existe un nombre s* $(0 \leqslant s \leqslant q)$ *tel que la matrice A ait exactement m valeurs propres, en comptant leur multiplicité, qui ont des parties réelles* $\leqslant \bar{\varrho}_s$.

d) *Pour chaque* $\varepsilon \in (0, \Delta)$ *ile existe deux constantes β_ε et γ_ε telles que pour chaque couple* $t_1 \neq t_2$, $t_i \geqslant T_0$, *l'on ait*

(3,10) $$\beta_\varepsilon \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon, t_1) - \varphi(\varepsilon, t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \gamma_\varepsilon$$

où

(3,11) $$\bar{\varrho}_s < \beta_s$$

(3,12) $$\gamma_\varepsilon < \bar{\varrho}_{s+1}$$

Si $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)\equiv\boldsymbol{0}$ *et nous avons ou bien* $s=0$ *on bien* $\bar{\varrho}_s$ *est une partie réelle que des valeurs propres simples, alors on peut admettre au lieu de* (3,11) *l'inégalité*

$$\bar{\varrho}_s \leqslant \beta_\varepsilon \tag{3,13}$$

De même si $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)\equiv\boldsymbol{0}$ *et nous avons ou bien* $s=q$ *on bien* $\bar{\varrho}_{s+1}$ *est une partie réelle que des valeurs propres simples, alors on peut admettre au lieu de* (3,12) *l'inégalité*

$$\gamma_\varepsilon \leqslant \bar{\varrho}_{s+1} \tag{3,14}$$

e) *Nous allons supposer que si* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, *alors*

$$\beta_{\varepsilon_1} \leqslant \beta_{\varepsilon_2} \quad \text{et} \quad \gamma_{\varepsilon_2} \leqslant \gamma_{\varepsilon_1} \tag{3,15}$$

Définition. *Nous dirons qu'une fonction de comparaison du système* (3,1), *de rang m, est une fonction de forte comparaison du même système, de même rang, si*

$$\lim_{t\to\infty}\left|\varphi(\varepsilon,t)-\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| = +\infty \tag{3,16}$$

pour chaque $\varepsilon\epsilon(0,\Delta)$.

Supposons que pour chaque $\varepsilon\epsilon(0,\Delta)$ il existe un M_ε tel que

$$\int_{T_0}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp -\varphi(\varepsilon,t)\,dt < M_\varepsilon \tag{3,17}$$

Il s'ensuit que chaque intégrale

$$\int_{T_0}^{\infty} |f_i(t)| \exp -\varphi(\varepsilon,t)\,dt \qquad i=1,2,\ldots,n$$

est convergente et qu'elle a comme valeur un nombre $\leqslant M_\varepsilon$.

Enfin nous dirons qu'une famille de solutions de l'équation (3,1) est *à m paramètres* si l'ensemble d'intersection de ses éléments et de chaque hyperplan $t=T\geqslant T_0$ est une image homéomorphe (c'est-à-dire continue et biunivoque) de l'espace euclidien à m dimensions $\boldsymbol{R}_m$ (où $\boldsymbol{R}_0$ est l'ensemble formé d'un seul point).

Moyennant toutes ces notations et conditions, nous pouvons énoncer nos théorèmes:

Théorème A. *Si* $\varphi(\varepsilon,t)$ *une fonction de comparaison de l'équation* (3,1) *de rang m, cette équation admet une famille à m paramètres de solutions* *telle que pour chaque élément* $\boldsymbol{x}(t)$ *de la famille et pour chaque* $\varepsilon \in (0, \Delta\rangle$ *le produit*

$$|\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) \tag{3,18}$$

reste borné. Pour les solutions qui n'appartiennent pas à cette famille, le produit (3,18) *n'est pas borné pour* $\varepsilon \in (0, \Delta)$.

Théorème B. *Si* $\varphi(\varepsilon, t)$ *est une fonction de forte comparaison de l'équation* (3,1), *de rang m, cette équation admet une famille à m paramètres de solutions telle que pour chaque élément* $\boldsymbol{x}(t)$ *de la famille et pour chaque* $\varepsilon \in (0, \Delta)$ *l'on ait*

$$\lim |\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0 \tag{3,19}$$

Les solutions qui n'appartiennent pas à cette famille, ne vérifient pas la condition (3,19) *pour* $\varepsilon \in (0, \Delta)$.

CHAPITRE II. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES A ET B.

4. Remarques préliminaires. La démonstration des Théorèmes A et B sera faite simultanément. Nous allons supposer que $\bar{\varrho}_s = 0$. Cette hypothèse supplémentaire ne sera écartée qu'au dernier paragraphe de la démonstration (§ 20).

Nous avons supposé que $\gamma(t)$ et $\chi(t)$ sont des fonctions continues. Il s'ensuit que dans chaque intervalle de longueur finie $\langle T_0, T\rangle$ l'équation (3,1) vérifiè la condition de Lipschitz. Donc par chaque point $\{\boldsymbol{x}_0, t\}, t_0 \geqslant T_0$ il passe une solution $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ et une seule, et cette solution (si elle est saturée) est définie dans $\langle T_0, +\infty)$.

Désignons par $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ les valeurs propres (3,8) qui ont des parties réelles non positives, et par $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_p$ celles qui ont des parties réelles positives. Nous voyons donc, en vertu de la condition $\bar{\varrho}_s = 0$ que

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_l = m$$

(évidemment si $s > 0$; dans les cas contraire nous aurons $l = m = 0$).

5. Solutions d'équations linéaires. Dans la suite nous allons plusieurs fois trouver les solutions d'équations linéaires qui ont le même premier membre que l'équation (3,1), c'est-à-dire d'équations de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}(t) \tag{5,1}$$

où A est une matrice constante et $\boldsymbol{w}(t)$ et une fonction définie et continue dans $\langle T_0, +\infty)$.

Il est facile de trouver les solutions de (5,1). Introduisons une nouvelle variable $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$. On peut choisir la matrice non singulière $\boldsymbol{C}$ de façon que (5,1) se transforme en

$$\dot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}(t) \tag{5,2}$$

où $\boldsymbol{K}$ est la matrice canonique de Jordan correspondant à $\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{K}$ est une matrice diagonale, alors chaque équation du systéme (5,2) peut être résolue séparement. Si $\boldsymbol{K}$ est d'un type plus général, alors chaque groupe de r_k équation correspondant à la valeur propre λ_k contient au moins une équation qui ne contienne qu'une variable dépendante y_i. En partant de cette équation on peut résoudre tout ce groupe d'équations (voir Goursat [2] t. 2 p. 510; Peyovitch [8] p. 18 et 19 énonce ces solutions explicitamment; voir aussi Tatarkiewicz [**16**]).

Revenons à la variable $\boldsymbol{x}$. Après des calculs faciles mais laborieux, on obtient la forme explicite des solutions de (5,1).

Mais si certaines valeurs propres λ_k sont complexes, les solutions ainsi obtenues peuvent l'être aussi. En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de cette solution, nous obtenons d'une façon bien connue la solution réelle générale de (5,1);

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} Q_k(t) \exp \varrho_k t. \left[\boldsymbol{p}^k(t) + \sum_{j=1}^{r_k} \boldsymbol{B}^{kj} \int_{T_k}^{t} Q_k(t)\, \boldsymbol{w}(t) \exp - \varrho_k t\, dt'\right] \tag{5,3}$$

où ϱ_k est la partie réelle de λ_k (en général ϱ_k diffère de $\bar{\varrho}_k$), $\boldsymbol{B}^{kj}$, $j = 1, \ldots, r_k$, $k = 1, \ldots, p$ est une suite de $r_1 + \cdots + r_p = n$ matrices réelles constantes, T_k sont des constantes $\geqslant T_0$ ou égales à $+\infty$, $\boldsymbol{p}^k(t) = \{p_1^k(t), \ldots, p_n^k(t)\}$ où $p_i^k(t)$ sont des polynômes de dégré $r_k - 1$ au plus.

Si λ_k est une valeur propre réelle (de multiplicité r_k), c'est-à-dire si $\lambda_k = \varrho_k$, alors les nr_k coefficients des polynômes $p_i^k(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont des fonctions linéaires homogènes de r_k constantes arbitraires $c_{k1}, \ldots, c_{kr_k}$ et il faut poser $Q_k(t) \equiv 1$.

Si λ_k est une valeur propre complexe (de multiplicité r_k) il existe une valeur propre complexe conjuguée $\lambda_{\bar{k}} = \bar{\lambda}_k$ (de même multiplicité r_k), c'est-à-dire que si $\lambda_k = \varrho_k + i\sigma_k$ $(\sigma_k \neq 0)$ alors il existe un $\lambda_{\bar{k}} = \varrho_k - i\sigma_k$ et $r_k = r_{\bar{k}}$. Les $2nr_k$ coefficients des polynômes $p_i^k(t), p_i^{\bar{k}}(t)$ $i = 1, \ldots, n$ seront des fonctions linéaires de $2r_k$ constantes arbitraires $c_{k1}, \ldots, c_{kr_k}$, $c_{\bar{k}1}, \ldots, c_{\bar{k}r_{\bar{k}}}$. Il faut alors prendre $Q_k(t) = \sin \sigma_k t$ et $Q_{\bar{k}}(t) = \cos \sigma_k t$.

Remarquons, qu'on pourrait obtenir les solutions réelles (5,3) directement (sans emploi intermediaire de solutions complexes), mais alors les équations transformées (5,2) devraient avoir une forme beaucoup plus compliquée (la matrice canonique réelle de Jordan K_R étant d'une forme assez compliquée — voir [11], [14] et [16]).

Posons

(5,4) $$b = \max_{k,j} |B^{kj}|$$

En prenant la *norme* de (5,3) nous obtenons la formule

(5,5) $$|x(t)| < \sum_{k=1}^{p} \exp \varrho_k t \left[|p^k(t)| + b \left| \int_{T_k}^{t} |w(t)| \exp - \varrho_k t \, dt^j \right| \right].$$

6. Début de la démonstration. Pour résoudre le système (3,1) nous appliquerons la méthode des approximations successives de Caqué — Fuchs.

Posons $x^{-1}(t) \equiv 0$. Soit $x^\nu(t)$ $(\nu \geqslant 0)$ la solution de l'équation linéaire

(6,1) $$\dot{x}^\nu - Ax^\nu = h(x^{\nu-1}, t) + g(x^{\nu-1}, t) + f(t).$$

Or en vertu de (3,2) et (3,5) nous aurons

$$h(x^{-1}, t) = h(0, t) \equiv 0$$
$$g(x^{-1}, t) = g(0, t) \equiv 0.$$

Donc, pour $\nu = 0$, l'équation (6,1) se reduit à l'équation

(6,2) $$\dot{x}^0 - Ax^0 = f(t).$$

Pour $\nu \geqslant 0$ posons

(6,3) $$z^\nu = x^\nu - x^{\nu-1}.$$

Donc

(6,4) $$z^0 = x^0.$$

Désignons $h^0(t) \equiv 0$, $g^0(t) \equiv 0$, et posons pour $\nu \geqslant 1$

(6,5) $$h^\nu(t) = h(x^{\nu-1}, t) - h(x^{\nu-2}, t)$$

(6,6) $$g^\nu(t) = g(x^{\nu-1}, t) - g(x^{\nu-2}, t).$$

Prenons la différence de la ν-ième et la $\nu - 1$-ième équation (6,1). Nous obtenons

(6,7) $$\dot{z}^\nu - Az^\nu = h^\nu(t) + g^\nu(t).$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants (non homogènes).

Soit $\eta > 0$ une *constante*. Sa valeur sera déterminée ultérieurement. De (3,4) il resulte que pour chaque $\eta > 0$, il existe un nombre $\overline{T}_\eta \geqslant T_0$, le plus petit possible, tel que si $t \geqslant \overline{T}_\eta$, alors

$$0 \leqslant \chi(t) \leqslant \eta. \tag{6,8}$$

De même de (3,7) (et vu que la fonction $\gamma(t)$ est non négative — voir (3,6)) il s'ensuit qu'il existe un nombre $\overline{\overline{T}}_\eta \geqslant T_0$, le plus petit possible, tel que si $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \overline{\overline{T}}_\eta$ alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma(t)\, dt \leqslant \eta. \tag{6,9}$$

Posons

$$T_\eta = \max\, |\overline{T}_\eta, \overline{\overline{T}}_\eta|.$$

Dans la suite nous nous bornerons à l'intervalle $\langle T_\eta, +\infty)$. Considérons les équations (6,7). Or ce sont des équations linéaires, donc leurs solutions saturées seront définies dans $\langle T_0 + \infty)$. Pour trouver des estimations de ces solutions, nous allons employer la formule (5,5), où nous poserons $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{h}^\nu(t) + \boldsymbol{g}^\nu(t)$ et

$$\begin{aligned} T_k &= T_\eta & & k \leqslant l \\ & & \text{pour} & \\ T_k &= +\infty & & k > l. \end{aligned} \tag{6,10}$$

Dans la suite nous montrerons, que les intégrales généralisées (ayant une limite infinie) qui vont figurer dans les solutions ou dans les majorations des solutions ainsi obtenues, sont convergentes. Toutefois, avant de le démontrer et de procéder à nos estimations, nous devrons déduire encore quelques majorations d'intégrales.

7. Estimation de quelques intégrales simples. Soit un nombre $\varepsilon \in (0, 1)$. Sa valeur sera fixe dans la suite, jusqu'au § 17 inclusivement.

Posons

$$^1F_k(t) = \int_{T_k}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varrho_k t\, dt. \tag{7,1}$$

Nous aurons

$$^1F_k(t) = \int_{T_k}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varrho_k t\, dt = \int_{T_k}^{t} \exp\,[-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)] \cdot |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt.$$

Il faut distinguer deux cas

I. $k < l$, c'est-à-dire $\varrho_k \leq \varrho_l = \bar{\varrho}_s = 0$. En vertu de (6,10) nous aurons $T_k = T_\eta$. Nous allons considérer seulement les valeurs de $t \geqslant T_\eta$. Alors $-\varrho_k t$ est une fonction non décroissante. De même, de la condition $\bar{\varrho}_k = 0$ il s'ensuit que les rapports

$$\frac{\varphi(\varepsilon, t_1) - \varphi(\varepsilon, t_2)}{t_1 - t_2}$$

(où $t_1 \neq t_2$) sont non négatifs. Donc $\varphi(\varepsilon, t)$ est non décroissante. Par suite

$$-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)$$

est une fonction non décroissante.

Il résulte du Théorème de Bonnet (II *Théorème de la Moyenne du Calcul Integral* — voir de la Vallée Poussin, [17] t. 2, p. 1) qu'il existe une constante $\xi_k \epsilon (T_\eta, t)$, telle que

$${}^1F_k(t) = \exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)| \cdot \int_{\xi_k}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt$$

En vertu de (3,17) nous obtenons

$$|{}^1F(t)| \leq M_1 \exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)|.$$

II. $k > l$. En tenant compte de (6,10) il faut poser $T_k = +\infty$. Or (3,10) — (3,14) montre que pour $\bar{\varrho}_k > \bar{\varrho}_{s+1} > 0$, l'inégalité $t_1 < t_2$ implique

$$\varphi(\varepsilon, t_2) - \varphi(\varepsilon, t_1) \leq \varrho_{s+1}(t_2 - t_1) \leq \varrho_k t_2 - \varrho_k t_1$$

donc

$$-\varrho_k t_2 + \varphi(\varepsilon, t_2) \leq -\varrho_k t_1 + \varphi(\varepsilon, t_1)$$

c'est-à-dire la fonction $-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)$ est non croissante. Il s'ensuit du Théorème de Bonnet qu'il existe une constante $\xi_k \epsilon (t, +\infty\rangle$ telle que

$${}^1F_k(t) = \int_{\infty}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varrho_k t\, dt =$$

$$= -\int_{t}^{+\infty} \exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)| \cdot |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt =$$

$$= \exp[-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)| \cdot \int_{\xi_k}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt$$

ce qui donne

(7,2) $$|{}^1F_k(t)| \leqslant M_\varepsilon \exp[-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)]$$

c'est-à-dire la même formule que dans le cas I.

De (7,2) il résulte que l'intégrale généralisée

$$\int_{+\infty}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varrho_k t\, dt$$

converge ($k > l$). Donc les intègrales

$$\int_{+\infty}^{t} f_i(t) \exp - \varrho_k(t)\, dt \qquad k > l, \qquad i = 1, \ldots, n$$

sont absolument convergentes.

8. Estimation des intégrales (suite). Dans ce paragraphe nous allons déterminer quelques estimations dont nous n'aurons besoin que dans le cas où ϱ_s est la partie réelle d'au moins une valeur propre multiple. Nous allons donc supposer que les inégalités fortes (3,11) et (3,12) sont vérifiées.

Posons

(8,1) $${}^1\overline{F}_k(t) = \int_{T_k}^{t} \exp[-\varrho_k(t) + \varphi(\varepsilon, t)]\, dt.$$

Il faut distinguer 3 cas

I. $\varrho_k < 0$. Alors $T_k = T_\eta \leqslant t$. En vertu de (3,11) et de l'égalité $\overline{\varrho}_s = 0$ la fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ est croissante. En applicant le Théorème de B o n n e t on obtient

$$|{}^1\overline{F}_k(t)| = \int_{T_\eta}^{t} \exp[\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)]\, dt = \exp\varphi(\varepsilon, t) \cdot \int_{\xi_k}^{t} \exp - \varrho_k t\, dt =$$

$$= \exp\varphi(\varepsilon, t) \left. \frac{\exp - \varrho_k t}{-\varrho_k} \right|_{\xi_k}^{t} = \frac{1}{-\varrho_k} \exp\varphi(\varepsilon, t)\, |\exp - (\varrho_k t) - \exp \varrho_k \xi_k| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{-\varrho_k} \exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)|.$$

II. $\varrho_k = 0$. Alors $T_k = T_\eta \leqslant t$. De (3,11) il s'ensuit que la fonction

$$-\beta_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon, t)$$

est non décroissante. Donc

$$|{}^1\overline{F}_k(t)| = \int_{T_\eta}^{t} \exp\varphi(\varepsilon,t)\,dt = \int_{T_\eta}^{t} \exp|-\beta_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)\cdot\exp\beta_\varepsilon t\,dt =$$

$$= \exp|-\beta_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)|\cdot\int_{\xi_k}^{t}\exp\beta_\varepsilon t\,dt =$$

$$= \exp|-\beta_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)|\,\frac{\exp\beta_\varepsilon t - \exp\beta_\varepsilon\xi_k}{\beta_\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\beta_\varepsilon}\exp\varphi(\varepsilon,t) =$$

$$= \frac{1}{\beta_\varepsilon}\exp[-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon,t)].$$

III. $\varrho_k > 0$ c'est-à-dire $k > l$. Nous devons trouver une majorante de l'expression

$$|{}^1\overline{F}_k(t)| = \int_{t}^{+\infty}\exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon,t)|\,dt. \tag{8,2}$$

Nous utilisons encore une fois la condition (3,12). Il s'ensuit qu'il existe un μ_ε tel que

$$\varphi(\varepsilon,t) \leqslant \mu_\varepsilon + \gamma_\varepsilon t$$

ce qui donne

$$-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon,t) \leqslant \mu_\varepsilon + (\gamma_\varepsilon - \varrho_k)\,t.$$

Or $\gamma_\varepsilon < \bar{\varrho}_{s+1} \leqslant \varrho_k$, donc l'intégrale (8,2) converge. De même de (3,12) il résulte que

$$-\gamma_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)$$

est une fonction non croissante. Nous avons donc

$$|{}^1\overline{F}_k(t)| = \int_{t}^{+\infty}\exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon,t)|\,dt =$$

$$= \int_{t}^{+\infty}\exp|-\gamma_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)|\cdot\exp|\gamma_\varepsilon t - \varrho_k t|\,dt =$$

$$= \exp[-\gamma_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)]\cdot\int_{t}^{\xi_k}\exp(\gamma_\varepsilon - \varrho_k)\,t\,dt =$$

$$= \exp[-\gamma_\varepsilon t + \varphi(\varepsilon,t)]\,\frac{\exp(\gamma_\varepsilon - \varrho_k)\,t - \exp(\gamma_\varepsilon - \varrho_k)\,\xi_k}{\varrho_k - \gamma_\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varrho_k - \gamma_\varepsilon}\exp[-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon,t)]$$

où il faut poser $\exp - \varrho_k \xi_k = 0$ pour $\xi_k = +\infty$.

Posons

(8,3)
$$a_{\varepsilon k} \underset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{-\varrho_k} & \varrho_k < 0 \\ \dfrac{1}{\beta_\varepsilon} \quad \text{pour} & \varrho_k = 0 \\ \dfrac{1}{\varrho_k - \gamma_\varepsilon} & \varrho_k > 0 \end{cases}$$

$a_{\varepsilon k}$ croît quand ε décroît (voir 3,15).

Alors nous aurons,

(8,4)
$$|{}^1F_k(t)| \leqslant a_{\varepsilon k} \exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)|$$

pour k quelconque.

9. Estimation de quelques intégrales multiples. La formule (8,1) définit ${}^1\overline{F}_k(t)$. Pour $r > 1$ posons

$${}^r\overline{F}_k(t) = \int_{T_k}^{t} {}^{r-1}\overline{F}_k(t)\,dt.$$

En répétant les raisonnements du paragraphe précédent nous obtenons l'estimation

(9,1)
$$|{}^r\overline{F}_k(t)| \leqslant a_{\varepsilon k}^r \exp|-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon. t)|.$$

La formule (7,1) définit ${}^1F_k(t)$. Pour $r > 1$ posons

$${}^rF_k(t) = \int_{T_k}^{t} {}^{r-1}F_k(t)\,dt.$$

Or, en appliquant les formules (7,2), (8,3) et (8,4) nous aurons

$$|{}^2F_k(t)| = \left| \int_{T_k}^{t} {}^1F_k(t)\,dt \right| \leqslant M_\varepsilon \left| \int_{T_k}^{t} \exp[\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)]\,dt \right| =$$

$$= M_\varepsilon |{}^1\overline{F}_k(t)| \leqslant a_{\varepsilon k} M_\varepsilon \exp[-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)].$$

Donc de (9,1) il s'ensuit que pour $r \geqslant 1$ nous aurons

(9,2)
$$|{}^rF_k(t)| \leqslant |{}^{r-1}F_k(t)| \cdot M_\varepsilon \leqslant a_{\varepsilon k}^{r-1} M_\varepsilon \exp[-\varrho_k(t) + \varphi(\varepsilon, t)]$$

10. Estimation de z^0. A l'aide des formules (5,5) et (9,2) nous allons trouver une estimation des solutions de l'équation (6,2). Admettons l'hypothèse (6,10). Posons, de plus

$$
(10,1)\qquad \begin{aligned} &c_{kj} = \textit{constante}\ \text{arbitraire} \\ &c_{kj} = 0 \end{aligned} \qquad \text{pour} \qquad \begin{aligned} &k \leqslant l \\ &k > l. \end{aligned}
$$

Il s'ensuit que pour $k > l$

$$
(10,2)\qquad \boldsymbol{p}^k(t) = \boldsymbol{0}
$$

Lemme 1. *Pour chaque $\eta > 0$ il existe un $N_{\varepsilon\eta}$ tel que pour $t \geqslant T_\eta$* et *pour $k = 1, 2, \ldots, n$ l'on ait*

$$
(10,3)\qquad |\boldsymbol{p}^k(t)| \exp \varrho_k t \leqslant N_{\varepsilon\eta} \exp \varphi(\varepsilon, t).
$$

$N_{\varepsilon\eta}$ est une fonction des c_{ik}. Si $\lim\limits_{\nu\to\infty} {}^{\nu}c_{ik} = 0$, on peut déterminer les constantes correspondantes $N_{\varepsilon\eta}$ (pour ε, η constantes de manière que

$$\lim_{\nu\to\infty} {}^{\nu}N_{\varepsilon\eta} = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n d u L e m m e. En vertu de (10,2) nous aurons $|\boldsymbol{p}^k(t)| = 0$ pour $k > l$ (c'est-à-dire pour $\varrho_k > 0$). Si $\varrho_k = 0$ et $r_k = 1$ alors $\boldsymbol{p}^k(t) = \textit{const.}$, donc $|\boldsymbol{p}^k(t)| \exp \varrho_k t = \textit{const.}$. D'autre part, la fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ est non décroissante donc la borne inférieure de $\exp \varphi(\varepsilon, t)$ est positive et il existe une constante $N_{\varepsilon\eta}^{(k)}$ qui vérifie (10,3). Si $r_k > 1$ alors en vertu de (3,10) il existe un π_ε tel que

$$
\exp(\pi_\varepsilon + \beta_\varepsilon t) \leqslant \exp \varphi(\varepsilon, t)
$$

donc cette fonction sera une majorante du polynôme $\boldsymbol{p}^k(t)$. Pour $\varrho_k < 0$ le premier membre de (10,3) est borné, il existe donc un $N_{\varepsilon\eta}^{(k)}$ qui vérifie (10,3).

En prenant $N_{\varepsilon\eta}$ egal au plus grand de tous les $N_{\varepsilon\eta}^{(k)}$ nous trouverons la constante exigée par notre lemme.

Etant donné que les coefficients de $\boldsymbol{p}^k(t)$ sont des fonctions linéaires homogènes des c_{ik}, nous voyons que si $N_{\varepsilon\eta}$ correspond à un ensemble de constantes $\{c_{ik}\}$ vérifiant (10,3), $\overline{N}_{\varepsilon\eta} = \delta N_{\varepsilon\eta}$ va vérifier (10,3) pour l'ensemble des constantes $\{\overline{c}_{ik}\}$, où $\overline{c}_{ik} = \delta c_{ik}$. La démonstration du Lemme est ainsi achevée. —

Posons $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ dans la formule (5,5). Le Lemme 1 et les résultats des paragraphes précédents fournissent l'estimation suivante de $\boldsymbol{z}^0(t) = \boldsymbol{x}^0(t)$

$$|\boldsymbol{z}^0(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \exp \varrho_k t \left[b \sum_{j=1}^{r_k} \left| \int_{T_k}^{t} \boldsymbol{f}(t) \exp - \varrho_k t \, dt^j \right| + |\boldsymbol{p}^k(t)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant bM_\varepsilon \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \exp \varrho_k t \cdot a_{\varepsilon k}^{j-1} \exp [-\varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)] + \sum_{k=1}^{p} \exp \varrho_k |\boldsymbol{p}^k(t)| \leqslant$$

$$\leqslant bM_\varepsilon R_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, t) + pN_{\varepsilon\eta} \exp \varphi(\varepsilon, t),$$

où

(10,4) $$R_\varepsilon \underset{df}{=} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_k} a_{\varepsilon k}^{j} \geqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} a_{\varepsilon k}^{j-1}$$

(R_ε croît quand ε décroît — voir (8,3)). Donc

$$|\boldsymbol{z}^0(t)| = |\boldsymbol{x}^0(t)| \leqslant [bM_\varepsilon R_\varepsilon + pN_{\varepsilon\eta}] \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Posons

$$U_{\varepsilon\eta} \underset{df}{=} bM_\varepsilon R_\varepsilon + pN_{\varepsilon\eta}$$

Nous aurons alors l'estimation

(10,5) $$|\boldsymbol{z}^0(t)| \leqslant U_{\varepsilon\eta} \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

11. Un lemme auxiliaire. Soient deux vecteurs $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ et $\boldsymbol{x}(t)$. Posons

(11,1) $$\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), t)$$
$$\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), t)$$

et

$$H(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \left| \int_{T_k}^{t} |\boldsymbol{h}(t)| \exp - \varrho_k t \, dt^j \right| \exp \varrho_k t$$

$$G(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \left| \int_{T_k}^{t} |\boldsymbol{g}(t)| \exp - \varrho_k t \, dt^j \right| \exp \varrho_k t.$$

Avec ces notations nous avons le Lemme suivant:

Lemme 2. *Si, nous avons, pour* $t \geqslant T_\eta$

(11,2) $$|\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t)| \leqslant d \exp \varphi(\varepsilon, t)$$

alors

$$(11,3) \qquad |G(t) + H(t)| \leqslant 2\eta R_\varepsilon d \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

D é m o n s t r a t i o n d u L e m m e. De (11,2) (3,3) et (6,8) il résulte que

$$|h(t)| = |h(x(t), t) - h(\bar{x}(t), t)| \leqslant \chi(t)\,|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant \eta d \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Les estimations du § 9 donnent

$$|H(t)| = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \left| \int_{T_k}^{t} h(t) \exp - \varrho_k t \, dt^j \right| \exp \varrho_k t \leqslant$$

$$\leqslant \eta d \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \left| \int_{T_k}^{t} \exp [- \varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)] \, dt^j \right| =$$

$$= \eta d \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} a^j_{\varepsilon k} \exp \varphi(\varepsilon, t)$$

c'est-à-dire que

$$|H(t)| \leqslant \eta d R_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Des formules (11,2) et de (3,6) nous obtenons

$$|g(t)| \leqslant |g(x(t), t) - g(\bar{x}(t), t)| \leqslant \gamma(t)\,|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant d\,\gamma(t) \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Considérons $t \geqslant T\eta$. Nous pouvons appliquer le Théorème de B o n n e t. Avec les estimations du § 9 et en vertu de l'hypothèse (6,9) nous aurons

$$\left| \int_{T_k}^{t} \gamma(t) \exp [- \varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)] \, dt^j \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{T_k}^{t} \exp [- \varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)] \left\{ \int_{\xi_k}^{t} \gamma(t) \, dt \right\} dt^{j-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \eta \left| \int_{T_k}^{t} \exp [- \varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)] \, dt^{j-1} \right| \leqslant \eta a^{j-1}_{\varepsilon k} \exp [- \varrho_k t + \varphi(\varepsilon, t)].$$

De même nous aurons

$$|G(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \exp \varrho_k t \left| \int_{T_k}^{t} |g(t)| \exp - \varrho_k t \, dt^j \right| \leqslant \eta R_\varepsilon d \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Donc

$$|G(t)+H(t)| \leqslant |G(t)|+|H(t)| \leqslant 2\eta R_\varepsilon d \exp\varphi(\varepsilon,t).$$

12. Estimation de $z^\nu(t)$. Considérons les équations (6,7) pour $\nu > 0$. Nous allons nous borner aux solutions (5,3) des équations (6,7) pour lesquelles les valeurs de T_k sont données par (6,10) et les constantes arbitraires c_{ik}^ν sont nulles, c'est-à-dire $p^k(t) \equiv 0$, $k=1,2,\dots,p$.

Posons dans (5,5) $w(t) = h^\nu(t) + g^\nu(t)$. Nous aurons

$$|z^\nu(t)| \leqslant b \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_k} \exp \varrho_k t \cdot \left| \int_{T_k}^{t} |h^\nu(t) + g^\nu(t)| \exp - \varrho_k t \, dt^j \right|.$$

Nous disons que pour chaque $\varepsilon \epsilon (0,\Delta)$ et chaque $\eta \geqslant 0$ et pour tous les $\nu \geqslant 0$ il existe alors des constantes $U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)}$ telles que

$$(12,1) \qquad |z^{\nu-1}(t)| \leqslant U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)} \exp\varphi(\varepsilon,t).$$

En effet:

1°. La formule (10,5) montre qu'il suffit de poser

$$U_{\varepsilon\eta}^{(1)} = U_{\varepsilon\eta}.$$

2°. Supposons que $U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)}$ existe. Posons $d = U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)}$, $x = x^{\nu-1}$, $\bar{x} = x^{\nu-2}$ et appliquons le Lemme 2:

$$|z^\nu(t)| \leqslant 2 R_\varepsilon \eta b U_{2\eta}^{(\nu)} \exp\varphi(\varepsilon,t).$$

Il en résulte que la constante $U_{\varepsilon\eta}^{(\nu+1)}$ existe et que

$$U_{\varepsilon\eta}^{(\nu+1)} = 2\eta b R_\varepsilon U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)}.$$

Toutes les constantes $U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)}$ existent et il est aisé de voir que

$$U_{\varepsilon\eta}^{(\nu)} = [2\eta b R_\varepsilon]^{\nu-1} U_{\varepsilon\eta}.$$

Posons

$$V_{\varepsilon\eta} \underset{df}{=} 2\eta b R_\varepsilon.$$

Jusqu'à présent le nombre positif η était arbitraire. $\varepsilon \epsilon (0,\Delta)$ étant fixée nous pouvons choisir $\eta = \eta_\varepsilon$ de manière que $V_{\varepsilon\eta} < 1$, par exemple, il suffit de poser

$$(12,2) \qquad \eta_\varepsilon = \frac{1}{3bR_\varepsilon}.$$

Alors

$$V_\varepsilon \underset{df}{=} V_{\varepsilon\eta_\varepsilon} = \frac{2}{3}.$$

Etant donné que $a_{\varepsilon\nu}$ ne dépend pas du choix de η (voir (8,3)), la valeur de R_ε (voir (10,4) ne dépend pas de η et cette définition ne mène pas à un cercle vicieux. Posons

(12,3) $$T(\varepsilon) = T_{\eta_\varepsilon}.$$

En vertu de l'hypothèse, suivant laquelle T_η est le plus petit nombre tel que pour $t \geqslant T_\eta$ les formules (6,8) et (6,9) soient satisfaites, $T(\varepsilon)$ est une fonction de ε qui croît quand ε décroît (c'est-à-dire que $T(\varepsilon_1) \geqslant T(\varepsilon_2)$ si $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$).

Posons encore

(12,4) $$U_\varepsilon \underset{df}{=} U_{\varepsilon\eta_\varepsilon} \quad \text{et} \quad S_\varepsilon \underset{df}{=} \frac{U_\varepsilon}{1 - V_\varepsilon} = 3U_\varepsilon.$$

La valeur de S_ε dépend seulement du choix de ε et des constantes c_{ik} qui entrent dans la définitien de z^0 (et vérifient (10,1)).

Nous avons donc

(12,5) $$|z^\nu(t)| \leqslant U_\varepsilon V_\varepsilon^\nu \exp\varphi(\varepsilon, t).$$

Nous voyons que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu(t)$$

peut être majorée dans chaque intervalle fini $\langle T(\varepsilon), T\rangle$ (où $T > T(\varepsilon)$) par une série géometrique. Elle converge donc presque uniformément et absolument. Elle a donc comme somme une fonction continue $x_\varepsilon(t)$. (Nous écrivons $x_\varepsilon(t)$ étant donné que sa construction dépend du choix de ε).

Pour $t \geqslant T(\varepsilon)$ nous avons

$$|x_\varepsilon(t)| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu(t)\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} |z^\nu(t)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\varepsilon V_\varepsilon^\nu \exp\varphi(\varepsilon, t).$$

En vertu de (12,4) nous avons pour $t \geqslant T(\varepsilon)$

(12,6) $$|x_\varepsilon(t)| \leqslant S_\varepsilon \exp\varphi(\varepsilon, t).$$

Donc le produit

(12,7) $$x_\varepsilon(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)$$

est uniformément borné sur $\langle T_0, +\infty)$.

13. Convergence de la suite $\dot{x}^\nu(t)$. Il s'ensuit de (6,3) et de (6.4) que

$$\lim_{\nu\to\infty} x^\nu(t) = \lim_{\nu\to\infty} [x^0 + (x^1 - x^0) + \cdots + (x^\nu - x^{\nu-1})] =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} z^\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu(t) = x_\varepsilon(t).$$

Donc la suite $\boldsymbol{x}^{\nu}(t)$ converge presque uniformément vers $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$ pour $\langle T(\varepsilon), +\infty)$, c'est-à-dire converge uniformément dans chaque intervalle $\langle T(\varepsilon), T\rangle$. Il existe alors, pour chaque $\delta > 0$, un N_{δ} tel que pour $t \in \langle T(\varepsilon), T\rangle$ l'on ait

$$(13,1) \qquad |\boldsymbol{x}^{\nu}(t) - \boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)| < \delta$$

pourvu que $\nu > N_{\delta}$.

Il s'ensuit que

$$|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\nu}, t) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{\varepsilon}, t)| \leqslant \chi(t)\,|\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{x}_{\varepsilon}| \leqslant \eta_{\varepsilon}\,\delta.$$

La suite $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\nu}(t), t)$ converge presque uniformément.

Nous avons supposé que la fonction $\gamma(t)$ est continue. Elle est donc bornée dans chaque intervalle $\langle T(\varepsilon), T\rangle$, c'est-à-dire il existe une constante G_T telle que

$$0 \leqslant \gamma(t) \leqslant G_T \quad \text{pour} \quad t \in \langle T(\varepsilon), T\rangle.$$

Il s'ensuit que, si la condition (13,1) est vérifiée, alors

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{\nu}, t) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\varepsilon}, t)| \leqslant \gamma(t)\,|\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{x}_{\varepsilon}| \leqslant G_T\,\delta.$$

La suite $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{\nu}(t), t)$ converge presque uniformément.

La formule (6,1) donne

$$(13,2) \qquad \dot{\boldsymbol{x}}^{\nu}(t) = A\boldsymbol{x}^{\nu} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\nu-1}(t), t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{\nu-1}(t), t) + \boldsymbol{f}(t).$$

Les seconds membres étant des combinaisons linéaires des suites $\boldsymbol{x}^{\nu}(t)$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{\nu-1}(t), t)$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\nu-1}(t), t)$ qui convergent presque uniformément, la suite $\dot{\boldsymbol{x}}^{\nu}(t)$ converge presque uniformément dans $\langle T(\varepsilon), +\infty)$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème sur la différentiation des suites. Il s'ensuit que

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\nu}(t) \to \dot{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon}(t)$$

presque uniformément dans $\langle T(\varepsilon), +\infty)$.

En même temps nous avons démontré que les seconds membres de (6,1) convergent presque uniformément au second membre de l'équation (3,1). La fonction $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$ est donc une solution de (3,1).

14. Les solutions trouvées dépendent de m paramètres. Rappelons la méthode qui à permis de construire la solution $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$ vérifiant la condition (12,5). Nous avons trouvé une famille $\boldsymbol{x}^{0}(t)$ de solutions de (6,1) pour $\nu = 0$, qui dépendent de ε et de m constantes arbitraires c_{lk} vérifiant la condition (10,1). À différents ensembles de constantes correspondent évidemment différentes solutions $\boldsymbol{x}^{0}(t)$. En partant de $\boldsymbol{x}^{0}(t)$ et en appliquant la méthode des approximations successives nous construisons $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$. Nous allons désigner leur ensemble par $W(\varepsilon)$. Etant donné que les approximations successives étaient définies univoquement (dans (5,3) nous avons posé les constantes arbitaires égales à 0) la valeur $\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$ dépend uniquement du choix de $\boldsymbol{x}^0(t)$. Donc ε et les constantes c_{ik} étant choisies, tous les $\boldsymbol{x}^\nu(t)$ sont déterminés univoquement.

Nous allons montrer que: 1[0] À différents ensembles des c_{ik} vérifiant (10,1) corerspondent des solutions différentes $\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$, 2[0] Nous obtenons ainsi toutes les solutions $\boldsymbol{x}(t)$ de (3,1) pour lesquelles les produits

$$\boldsymbol{x}(t)\exp\varphi(\varepsilon,t)$$

sont bornés. 3[0] La correspondance entre les ensembles des c_{ik} (considérés comme points de l'espace cartésien à m dimensions $\boldsymbol{R}_m$) et les valeurs initiales des solutions $\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$ est continue.

La formule (5,3) appliquée a l'équation (6,2) donne

$$\boldsymbol{z}^0(t)=\boldsymbol{x}^0(t)=\sum_{k=1}^{p}Q_k(t)\exp\varrho_k t\cdot\left[\boldsymbol{p}^k(t)+\sum_{j=1}^{r_k}\boldsymbol{B}^{kj}\int_{T_k}^{t}Q_k(t)\boldsymbol{f}(t)\exp-\varrho_k t\,dt^j\right]$$

où, en vertu de nos hypothèses, T_k est égale à $+\infty$ ou à $T(\varepsilon)$. Evidemment dans cette formule les intégrales généralisées convergent absolument.

De même pour resoudre l'équation (6,1) nous appliquons la formule (5,3) et nous obtenons pour $\nu>0$:

$$\boldsymbol{z}^\nu(t)=\sum_{k=1}^{p}Q_k(t)\exp\varrho_k t\cdot\left\{\sum_{j=1}^{r_k}\boldsymbol{B}^{kj}\int_{T_k}^{t}Q_k(t)\,[\boldsymbol{h}^\nu(t)+\boldsymbol{g}^\nu(t)]\exp-\varrho_k t\,dt^j\right\}.$$

Au paragraphe précédent nous avons démontré que la suite $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^\nu(t),t)$ converge dans $\langle T(\varepsilon),+\infty)$ presque uniformément vers $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_\varepsilon(t),t)$. Or

$$\sum_{\nu=1}^{\mu}\boldsymbol{h}^\nu(t)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^0,t)+[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^1,t)-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^0,t)]+\cdots+$$
$$+[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\mu-1},t)-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\mu-2},t)]=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{\mu-1}(t),t).$$

Donc la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\boldsymbol{h}^\nu(t)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_\varepsilon(t),t) \tag{14,1}$$

converge presque uniformément dans $\langle T(\varepsilon),+\infty)$. Vu (6,5) (6,3), (3,3) et (12,5) cette convergence est absolue.

De même vu (6,6) la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \boldsymbol{g}^{\nu}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t), t) \tag{14,2}$$

converge presque uniformément et absolument.

En tenant compte de (14,1) et de (14,2) et en employant le théorème sur l'intégration des séries nous obtenons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t) = \sum_{k=1}^{p} Q_k(t) \, [\exp \varrho_k t] \times \\ \times \Big\{ \boldsymbol{p}_k(t) + \sum_{j=1}^{r_k} \boldsymbol{B}^{kj} \int_{T_k}^{t} Q_k(t) \, [\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t), t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t), t) + \boldsymbol{f}(t)] \exp \varrho_k t \, dt^j \Big\} \end{aligned} \tag{14,3}$$

On pourrait être tenté d'obtenir l'équation intégrale (14,3) en partant directement de l'équation (3,1) à l'aide de la formule (5,3), (voir ci-dessous (15,3)). Mais alors nous ne saurions pas si les polynômes $\boldsymbol{p}^k(t)$ utilisés dans la première étape de l'approximation de $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$ sont les mêmes que les polynômes qui figurent au second membre de (14,3).

Soient deux systèmes de constantes $\{{}_1c_{ik}\}$, $\{{}_2c_{ik}\}$ vérifiant la condition (10,1). Supposons qu'ils soient différents, c'est-à-dire qu'il existe au moins un couple i, k pour lequel ${}_1c_{ik} \neq {}_2c_{ik}$. Il s'ensuit (ce qui est aisé à vérifier) qu'à ces deux systèmes différents de constantes correspondent deux systèmes ${}_1p_i^k$ et ${}_2p_i^k$ de polynômes qui sont différents, c'est-à-dire que pour un couple i, k au moins

$${}_1p_i^k(t) \not\equiv {}_2p_i^k(t). \tag{14,4}$$

Il leur correspond deux solutions ${}_1\boldsymbol{x}^0(t)$ *et* ${}_2\boldsymbol{x}^0(t)$ de (6,2). Appliquons notre méthode d'approximation succesive. Supposons que nous aboutissions les deux fois à la même solution $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$ de (3,1). En posant

$${}_1\boldsymbol{p}^k(t) = \{{}_1p_1^k(t), \ldots, {}_1p_n^k\} \quad \text{et} \quad {}_2\boldsymbol{p}^k(t) = \{{}_2p_1^k(t), \ldots, {}_2p_n^k\}$$

au lieu de $\boldsymbol{p}^k(t)$ dans (14,3), nous obtenons deux équations intégrales qui sont vérifiées par $\boldsymbol{x}_{\varepsilon}(t)$. En prenant leur différence nous obtenons

$$0 \equiv \sum_{k=0}^{l} Q_k(t) \exp \varrho_k t \, [{}_1p_i^k(t) - {}_2p_i^k(t)] \qquad i = 1, \ldots, n$$

Cette derniere égalité implique ${}_1p_i^k(t) - {}_2p_i^k(t) \equiv 0$ (voir Kamke [3] § 100 et § 101), ce qui est en contradiction avec (14,4). Donc deux systémes différents de constantes ${}_1c_{ik}$ et ${}_2c_{ik}$ vérifiant (10,1) conduisent aux différentes solutions ${}_1\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$ et ${}_2\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$.

Notre famille $W(\varepsilon)$ de solutions $\boldsymbol{x}_\varepsilon$ dépend donc de m paramètres:

$$c_{11}, \ldots, c_{1r_1}, \ldots, c_{l1}, \ldots, c_{lr_l}.$$

Pour toutes ces solutions le produit (12,7) est borné.

15. Suite. Dans ce paragraphe nous allons démontrer que si pour une solution de $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ (3,1) le produit (12,7) est borné, c'est-à-dire si pour notre valeur fixe de ε il existe une constance s_ε telle que

$$|\bar{\boldsymbol{x}}(t)| \leqslant s_\varepsilon \exp \varrho(\varepsilon, t) \tag{15,1}$$

alors cette solution appartient à la famille $W(\varepsilon)$.

Si $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ est une solution de (3,1) elle est une solution de l'équation linéaire

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), t) + \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), t) + \boldsymbol{f}(t) \tag{15,2}$$

dont le second membre est égal à celui de (3,1), dans lequel on à posé $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}(t)$. En appliquant la formule (5,3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}(t) = & \sum_{k=1}^{p} Q_k(t) \left|\exp \varrho_k t\right| \times \\ & \times \left\{ \bar{\boldsymbol{p}}^k(t) + \sum_{j=1}^{r_k} \boldsymbol{B}^{kj} \int_{T_k}^{t} Q_k(t) \left[\boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), t) + \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), t) + \boldsymbol{f}(t)\right] \exp - \varrho_k t \, dt^j \right\} \end{aligned} \tag{15,3}$$

où comme d'ordinaire (voir (6,10) et (12,3))

$$T_k = T(\varepsilon) \quad k < l$$
$$\text{pour}$$
$$T_k = +\infty \quad k > l$$

Vu (15,1) les intégrales généralisées convergent. Enfin les polynômes $\bar{\boldsymbol{p}}^k(t)$ dépendent de n constantes $\bar{c}_{ik}$. Etant donné l'univocité de l'équation linéaire à coefficients constants (15,2), ces constantes $\bar{c}_{ik}$ sont déterminées univoquement.

Soit $\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$ la solution de (3,1) qu'on obtient par la méthode des approximations successives en partant des constantes

$$c_{ik} = \bar{c}_{ik} \quad k < l$$
$$\text{pour}$$
$$c_{ik} = 0 \quad k > l$$

Elle appartient donc à la famille $W(\varepsilon)$.

Prenons la différence de (14,3) et de (15,3)

$$x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

où

(15,4) $$y_1(t) = \sum_{k=1}^{l} Q_k(t)[p^k(t) - \bar{p}^k(t)] \exp \varrho_k t - \sum_{k=l+1}^{p} Q_k(t)\bar{p}^k(t) \exp \varrho_k t$$

$$y_2(t) = \sum_{k=1}^{p} Q_k(t) \exp \varrho_k t \cdot \left[\sum_{j=1}^{r_k} B^{kj} \int_{T_k}^{t} Q_k(t) |h(t) + g(t)| \exp - \varrho_k t \, dt^j \right]$$

où $h(t)$ et $g(t)$ sont données par les formules (11,1) pour $x(t) = x_\varepsilon(t)$.

Les formules (12,6) et (15,1) fournissent

(15,5) $$|x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t)| \leqslant |x_\varepsilon(t)| + |\bar{x}(t)| \leqslant (S_\varepsilon + s_\varepsilon) \exp \varphi(\varepsilon, t)$$

Remarquons que $|B^{kj}| \leqslant b$ et $|Q_k(t)| \leqslant 1$. En vertu du Lemme 2 et de (12,2) nous avons

$$|y_2(t)| \leqslant 2\eta_\varepsilon (S_\varepsilon + s_\varepsilon) b R_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, t) = \frac{2}{3}(S_\varepsilon + s_\varepsilon) \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Donc

$$|y_1(t)| = |x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t) - y_2(t)| \leqslant |x_\varepsilon(t)| + |\bar{x}(t)| + |y_2(t)| \leqslant$$
$$\leqslant 2(S_\varepsilon + s_\varepsilon) \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Or il s'ensuit que pour $k > l$, nous avons $\bar{p}^k(t) \equiv 0$. (Dans le cas contraire (15,4) ne pourrait être majorée par $2(S_\varepsilon + s_\varepsilon) \exp \varphi(\varepsilon, t)$). Donc

$$\bar{c}_{ik} = 0 \qquad \text{pour} \quad k = l+1, \dots, p$$

On peut donc poser

$$\bar{p}^k(t) \equiv p^k(t) \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \dots p$$

et $\bar{x}(t)$ vérifie l'équation intégrale (14,3) pour le même système de constantes que $x_\varepsilon(t)$. Mais si deux fonction x_ε et $\bar{x}$ vérifient (14,3) pour le même système de constantes c_{ik}, elles sont égales (c'est-à-dire si l'on fixe les constantes c_{ik}, la solution de l'équation intégrale (14,3) est déterminée univoquement dans la classe des fonctions pour lesquelles le produit (12,7) est borné).

En effect si x_ε et $\bar{x}$ verifient (14,3), on voit en appliquant le Lemme 2 ν-fois à (15,5) et en tenant compte de (12,2), que

$$|x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^\nu (S_\varepsilon + s_\varepsilon) \exp \varphi(\varepsilon, t) \qquad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \dots$$

donc

$$|x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t)| = 0.$$

Nous avons démontré que $x_\varepsilon(t) \equiv \bar{x}(t)$ et que la solution $\bar{x}(t)$ appartient à la famille $W(\varepsilon)$.

16. Continuité de la correspondance entre les c_{ik} et les $x_\varepsilon(t)$. Aux paragraphes prcédents nous avons démontré que la correspondance entre l'ensemble des systèmes de m constantes c_{ik} vérifiant (10,1) et la famille des solutions de (3,1) pour lesquelles le produit (12,7) est borné — est biunivoque. Nous avons démontré de plus que cette famille est égale à $W(\varepsilon)$.

Soit un système c_{ik} de constantes qui vérifient la condition (10,1). Il lui correspond une solution $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ appartenant à $W(\varepsilon)$. Soit $q(c_{ik}, T_\varepsilon)$ le point d'intersection de la solution $x(t)$ et de l'hyperplan $t=T$ (où $T > T(\varepsilon)$), c'est-à-dire que

$$q(c_{ik}, T, \varepsilon) \underset{df}{=} \{x_1(T), \ldots, x_n(T), T\}.$$

Nous allons démontrer que $q(c_{ik}, T, \varepsilon)$ est une fonction continue des c_{ik}.

Soit une suite de constantes

(16,1) $$^{\nu}c_{ik} \to \bar{c}_{ik}$$

qui vérifient (10,1). Désignons par $^{\nu}p^k$ et $\bar{p}^k$ les polynômes et par $^{\nu}x(t), \bar{x}(t)$ les solutions qui leur correspondent respectivement. Ces solutions appartiennent évidemment à la famille $W(\varepsilon)$ et verifient la condition (12,6) avec des constantes S_ε que nous allons désigner par $^{\nu}S_\varepsilon$ et $\bar{S}_\varepsilon$.

Donc

$$|^{\nu}x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant |^{\nu}x(t)| + |\bar{x}(t)| \leqslant (S_\varepsilon + \bar{S}_\varepsilon) \exp \varphi(\varepsilon, t).$$

Il existe donc un nombre fini

(16,2) $$^{\nu}\delta_\varepsilon \underset{df}{=} \sup_{t \in \langle T(\varepsilon), +\infty)} |^{\nu}x(t) - \bar{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t).$$

La différence $^{\nu}p^k - \bar{p}^k$ est aussi un polynôme (-vecteur) de degré au plus $r_k - 1$, dont les coefficients sont des fonctions linéaires et homogènes des différences $^{\nu}c_{ik} - \bar{c}$. Nous pouvons appliquer le Lemme 1. De (16,1) nous déduisons qu'il existe une suite de constantes $pN^{\nu}_{\varepsilon\eta_\varepsilon} \underset{df}{=} {}^{\nu}l_\varepsilon$ telle que

(16,3) $$\sum_{k=1}^{p} |^{\nu}p^k(t) - \bar{p}^k(t)| \exp \varrho_k t \leqslant {}^{\nu}l_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, t)$$

et

(16,4) $$\lim_{\nu \to \infty} {}^{\nu}l_\varepsilon = 0.$$

Or ${}^{\nu}\boldsymbol{x}$ et $\overline{\boldsymbol{x}}$ vérifient évidemment (14,3), donc

$$
{}^{\nu}\boldsymbol{x}(t)-\overline{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{k=1}^{p} Q_k(t)\,|{}^{\nu}\boldsymbol{p}^k(t)-\overline{\boldsymbol{p}}^k(t)|\exp\varrho_k t+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{p} Q_k(t)\left\{\sum_{j=1}^{r_k}\boldsymbol{B}^{kj}\int_{T_k}^{t}|{}^{\nu}\boldsymbol{h}(t)+{}^{\nu}\boldsymbol{g}(t)|\,Q_k(t)\exp-\varrho_k t\,dt^j\right\}\exp\varrho_k t
$$

où

$$
{}^{\nu}\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{h}({}^{\nu}\boldsymbol{x}(t),t)-\boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{x}}(t),t)
$$

$$
{}^{\nu}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{g}({}^{\nu}\boldsymbol{x}(t),t)-\boldsymbol{g}(\overline{\boldsymbol{x}}(t),t)
$$

Appliquons le Lemme 2. Vu (16,2) et (16,3) nous avons

$$
|{}^{\nu}\boldsymbol{x}(t)-\overline{\boldsymbol{x}}(t)|\leqslant[{}^{\nu}l_\varepsilon+\frac{2}{3}{}^{\nu}\delta_\varepsilon]\exp\varphi(\varepsilon,t).
$$

En comparant ce résultat avec (16,2) nous voyons que

$$
{}^{\nu}l_\varepsilon+\frac{2}{3}{}^{\nu}\delta_\varepsilon\geqslant{}^{\nu}\delta_\varepsilon\geqslant 0.
$$

C'est-à-dire que

$$
3\,{}^{\nu}l_\varepsilon\geqslant{}^{\nu}\delta_\varepsilon\geqslant 0.
$$

Vu (16,4) nous avons $\lim\limits_{\nu\to\infty}{}^{\nu}\delta_\varepsilon=0$.

Or, (16,2) entraîne

$$
|{}^{\nu}\boldsymbol{x}(t)-\overline{\boldsymbol{x}}(t)|\leqslant{}^{\nu}\delta_\varepsilon\exp\varphi(\varepsilon,t)
$$

donc

$$
\lim_{\nu\to\infty}{}^{\nu}\boldsymbol{x}(t)=\overline{\boldsymbol{x}}(t)
$$

(et cette limite est presque uniforme). En particulier, pour tout T fini,

$$
\lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{q}({}^{\nu}c_{ik},T,\varepsilon)=\boldsymbol{q}(\overline{c}_{ik},T,\varepsilon).
$$

17. La structure de $\boldsymbol{W}(\varepsilon)$. Nous avons donc démontré qu'il existe une correspondance continue et biunivoque entre l'ensemble des points d'intersection de l'hyperplan $t=T$ et des éléments de la famille $W(\varepsilon)$ d'une part, et l'ensemble des systèmes c_{ik} vérifiant la condition (10,1) considéré comme espace cartésien à m dimensions $\boldsymbol{R}_m$ de l'autre. Ces deux ensembles sont donc homéomorphes.

Il est bien connu que les solutions de (3,1) dépendent d'une manière continue des valeurs initiales. Etant donné l'univocité de cette l'équation on voit que pour chaque $T\in\langle T_0,+\infty)$ l'ensemble Z des intersections de l'hyperplan $t = T$ et des éléments de la famille $W(\varepsilon)$ est homéomorphe avec $\boldsymbol{R}_m$.

Nous disons que l'ensemble Z est égal à sa derivée Z'. L'inclusion $Z \subset Z'$ étant évidente, il suffit de démontrer que $Z' \subset Z$.

Soit $\boldsymbol{x} \in W(\varepsilon)$ où $\varepsilon \in (0, \Delta)$. Donc $\boldsymbol{x}$ vérifie (12,6) avec une constante S_ε. Supposons qu'à $\boldsymbol{x}$ correspond un système c_{ik} de constantes (il vérifie (10,1)). Supposons T fixe et posons

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{p} Q_k(T)\, \boldsymbol{p}^k(T) \exp \varrho_k T \tag{17,1}$$

où $\boldsymbol{p}^k$ sont construits à l'aide de ces constantes c_{ik}. (17,1) étant une solution générale de l'équation $\dot{\boldsymbol{y}} = A\,\boldsymbol{y}$ dans laquelle on a posé $t = T$ et $n - m$ constantes arbitraires égales à zéro, elle répresente (paramètriquement) un hyperplan à m dimensions plongé dans l'hyperplan $t = T$.

De (10,5) et de (12,4) il suit que $|\boldsymbol{y}| \leq S_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, T)$. Donc

$$|\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{y}| \leq 2\, S_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, T) \tag{17,2}$$

Remarquons qu'à l'aide du Lemme 2 on peut même montrer que

$$|\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{y}| \leq S_\varepsilon \exp \varphi(T, \varepsilon).$$

Supposons que l'inclusion $Z' \subset Z$ n'a pas lieu. Il existe alors une suite de points ${}^\nu q \in Z$, telle que ${}^\nu\boldsymbol{q} \to \bar{\boldsymbol{q}} \,\bar{\in}\, Z$. À chaque ${}^\nu\boldsymbol{q}$ correspond un système ${}^\nu c_{ik}$ verifiant (10,1) et tel que ${}^\nu\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}({}^\nu c_{ik}, T, \varepsilon)$. À l'aide de ces ${}^\nu c_{ik}$ nous pouvons construire une solution ${}^\nu\boldsymbol{x}$ et une expression ${}^\nu\boldsymbol{y}$ donnée par (17,1). Etant donné que ${}^\nu\boldsymbol{x}(T) = {}^\nu\boldsymbol{q} \in Z$ nous avons ${}^\nu\boldsymbol{x} \in W(\varepsilon)$.

Z est une image homéomorphe de $\boldsymbol{R}_m$ donc $\sum_{i,k} |{}^\nu c_{ik}| \to +\infty$. En effet, dans le cas contraire des suites ${}^\nu c_{ik}$ on peut extraire des sous-suites ${}^{\nu_\mu} c_{ik}$ qui convergent à c^*_{ik}. Vu la continuité de la correspondance des systèmes c_{ik} et des points $\boldsymbol{q} \in Z$, nous avons

$$\lim_{\mu \to \infty} {}^{\nu_\mu}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(c^*_{ik}, T, \varepsilon)$$

C'est-à-dire que $\boldsymbol{q}(c^*_{ik}, T, \varepsilon) = \bar{\boldsymbol{q}} \,\bar{\in}\, Z$, ce qui est impossible, étant donné qu'à c^*_{ik} correspond une solution de la famille $W(\varepsilon)$.

De (17,1) il s'ensuit que si $\sum_{i,k} |{}^\nu c_{ik}| \to +\infty$, alors $|{}^\nu\boldsymbol{y}| \to +\infty$ nous voyons que $|{}^\nu\boldsymbol{x}(T)| \to +\infty$. C'est-à-dire que ${}^\nu\boldsymbol{q}$ sera une suite divergente, ce qui est en contradiction avec nos suppositions. Ainsi nous avons démontré que $Z' \subset Z$.

18. $W(\varepsilon)$ ne dépend pas de ε. Supposons que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \Delta$. T étant la plus petite valeur de T pour laquelle est vérifiée (6,8) et (6,9) il s'ensuit que $R_{\varepsilon_1} > R_{\varepsilon_2}$ et $T(\varepsilon_1) > T(\varepsilon_2)$ — voir § 10 et § 12.

Or

$$\varphi(\varepsilon_1, t) < \varphi(\varepsilon_2, t).$$

donc $W(\varepsilon_1) \subset W(\varepsilon_2)$. En effet, si une solution est majorée par $S_1 \exp \varphi(\varepsilon_1, t)$, elle l'est d'autant plus par $S_2 \exp \varphi(\varepsilon_2, t)$.

Soit $T \geqslant T(\varepsilon_1)$ et désignons par Z_i l'intersection de l'hyperplan $t = T$ et de la somme de la famille $W(\varepsilon_i)$. Evidemment $Z_1 \subset Z_2$. Nous allons démontrer que $Z_1 = Z_2$.

Admettons que $Z_1 \neq Z_2$, c'est-à-dire que $Z = Z_2 - Z_1 \neq 0$. Nous avons donc $Z \neq 0 \neq Z_1$, $Z \cdot Z_1 = 0$. Les ensembles Z_i étant des images homéomorphes de R_m, Z_1 est ouvert dans Z_2. Donc $Z' \cdot Z_1 = (Z_2 - Z_1)' \cdot Z_1 = 0$. Du précédent paragraphe il s'ensuit que $Z_1 = Z'_2$, donc

$$0 = (Z_2 - Z_1) \cdot Z'_1 = Z \cdot Z'_1.$$

Nous avons démontré que les ensembles Z et Z_1 sont séparés. Mais il s'ensuit que $Z_2 = Z + Z_1$ n'est pas connexe. Vu que Z_2 est homéomorphe avec R_m, cette assertion est fausse. Donc $Z = 0$ et $Z_1 = Z_2$.

L'univocité de l'équation (3,1) entraine $W(\varepsilon_1) = W(\varepsilon_2)$ pour tout $\varepsilon_1 \in (0, \Delta)$. C'est-à-dire que les ensembles $W(\varepsilon)$ sont les mêmes pour tous les $\varepsilon \in (0, \Delta)$ — on peut les désigner par W.

De plus nous avons démontré que: 1° L'ensemble Z égal à l'intersection de l'hyperplan $t = T$ et de la somme de la famille W, est une image homéomorphe de R_m, 2° Il existe un hyperplan à m dimensions ayant la propriété suivante: pour chaque point p lui appartenant, il existe un point $q \in Z$ au moins, tel que la *distance* pq soit plus petite que $S_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, T)$ et inversement, 3° L'ensemble Z ne possèdes des „frontières" („d'arêtes") qu'à l'infini.

19. Remarques terminales. Nous avons démontré qu'il existe une famille W à m paramètres exactement de solutions de (3,1), telle que si $x \in W$ et $\varepsilon \in (0, \Delta)$ alors il existe une constante S_ε et un nombre $T(\varepsilon) \geqslant T_0$ pour lesquelles

$$|x(t)| < S_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, t)$$

si $t \geqslant T(\varepsilon)$. Or les solutions saturées de (3,1) sont définies dans $\langle T_0, +\infty)$ (voir § 4), donc elles sont bornées dans chaque intervalle fini $\langle T_0, T(\varepsilon) \rangle$. Nous voyons que pour chaque $x \in W$ et chaque $\varepsilon \in (0, \Delta)$ il existe une constante $\bar{S}_\varepsilon$ telle que

$$|x(t)| < \bar{S}_\varepsilon \exp \varphi(\varepsilon, t) \tag{19,1}$$

pour tout $t \geqslant T_0$. Ainsi nous avons démontré le Théorème A dans le cas particulier $\bar{\varrho}_s = 0$.

Il s'ensuit de (19,1) que pour $t \geqslant T_0$

$$|\boldsymbol{x}(t)| < \bar{S}_{\varepsilon/2} \exp \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}, t\right)$$

c'est-à-dire que

(19,2) $$0 < |\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) < S_{\varepsilon/2} \exp \left[\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}, t\right) - \varphi(\varepsilon, t)\right]$$

Supposons que la fonction $\varphi(\varepsilon, t)$ soit une fonction de forte comparaison du système (3,1) et de rang m, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $\varepsilon \epsilon (0, \Delta)$ vérifie la condition (3,16). Alors de (19,2) il résulte que pour chaque $\varepsilon \epsilon (0, \Delta)$

$$\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0$$

Nous avons donc démontré le Théorème B dans le cas particulier $\bar{\varrho}_s = 0$.

20. **Cas général.** Nous allons écarter maintenant la supposition $\bar{\varrho}_s = 0$. Supposons que le système (3,1) vérifie les hypothèses du Théorème A ou bien celles du Théorème B. Considérons la transformation biunivoque

(20,1) $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t$$

Le système (3,1) se transformera en

(20,2) $$\dot{\boldsymbol{y}} - [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\,\bar{\varrho}_s]\,\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t, t) + \boldsymbol{f}(t)] \exp - \bar{\varrho}_s t$$

et l'équation séculaire (2,1) prendra la forme

(20,3) $$\operatorname{Det} |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}(\bar{\varrho}_s + \lambda)| = 0$$

Posons

$$\bar{\boldsymbol{A}} \underset{df}{=} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\,\bar{\varrho}_s$$

$$\bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{y}, t) \underset{df}{=} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t, t) \exp - \bar{\varrho}_s t$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}, t) \underset{df}{=} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t, t) \exp - \bar{\varrho}_s t$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}(t) \underset{df}{=} \boldsymbol{f}(t) \exp - \bar{\varrho}_s t$$

$$\bar{\varphi}(\varepsilon, t) \underset{df}{=} \varphi(\varepsilon, t) - \bar{\varrho}_s t$$

$$\bar{\beta}_\varepsilon = \beta_\varepsilon - \bar{\varrho}_s \qquad \bar{\gamma}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon - \bar{\varrho}_s$$

(20,2) deviendra

$$(20,4) \qquad \dot{\boldsymbol{y}} - \bar{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, t) + \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}, t) + \boldsymbol{f}(t)$$

Vu (20,3) son équation séculaire

$$\operatorname{Det} |\bar{A} - E\lambda| = 0$$

aura comme racines les nombres

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i - \bar{\varrho}_s \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \dots, p$$

Evidemment la partie réelle de $\bar{\lambda}_i$ est égale à $\varrho_i^* = \varrho_i - \bar{\varrho}_s$ et il est $\varrho_s^* = 0$.

Nous avons

$$\int_{T_0}^{\infty} \bar{\boldsymbol{f}}(t) \exp - \bar{\varphi}(\varepsilon, t)\, dt = \int_{T_0}^{t} \boldsymbol{f}(t) \exp - \bar{\varrho}_s \cdot \exp [\bar{\varrho}_s t - \varphi(\varepsilon, t)]\, dt =$$

$$= \int_{T_0}^{t} \boldsymbol{f}(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt < M_\varepsilon$$

$$\bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}, \qquad \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$$

$$|\bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{y}, t) - \bar{\boldsymbol{h}}(\bar{\boldsymbol{y}}, t)| = \exp \bar{\varrho}_s t \cdot |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t, t) - \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{y}} \exp \bar{\varrho}_s t, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \exp - \bar{\varrho}_s t\, \chi(t) \cdot |\boldsymbol{y} \exp \bar{\varrho}_s t - \bar{\boldsymbol{y}} \exp \bar{\varrho}_s t| = \chi(t)\, |\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}|$$

De même

$$|\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}, t) - \bar{\boldsymbol{g}}(\bar{\boldsymbol{y}}, t)| \leqslant \gamma(t)\, |\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}|$$

Supposons que les conditions (3,10), (3,13) et (3,14) soient vérifiées, c'est-à-dire que

$$\bar{\varrho}_s \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon, t_1) - \varphi(\varepsilon, t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \bar{\varrho}_{s+1}$$

Alors

$$\bar{\varrho}_s \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon, t_1) + \bar{\varrho}_s t_1 - \varphi(\varepsilon, t_2) - \bar{\varrho}_s t_2}{t - t_2} \leqslant \bar{\varrho}_{s+1}$$

donc

$$0 = \varrho_s^* \leqslant \frac{\bar{\varphi}(\varepsilon, t_1) - \bar{\varphi}(\varepsilon, t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \varrho_{s+1}^*$$

De même si les conditions (3,10), (3,11) et (3,12) sont vérifiées.

$$0 = \varrho_s^* < \beta_\varepsilon \leqslant \frac{\bar{\varphi}(\varepsilon, t_1) - \bar{\varphi}(\varepsilon, t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \gamma_\varepsilon < \varrho_{s+1}^*$$

On voit que l'équation (20,4) vérifié toutes les hypothèses qui sont vérifiées par l'équation (3,1) dans le Théorème A ou dans Théorème B respectivement et nous avons pour elle $\varrho_s^* = 0$. Ce cas a été resolu précédemment. Nous avons notamment démontré qu'il existe alors une famille à m paramètres exactement de solutions pour lesquelles le produit

$$\boldsymbol{y}(t) \exp - \bar{\varphi}(\varepsilon, t)$$

est borné, ou si la fonction $\bar{\varphi}(\varepsilon, t)$ est une fonction de forte comparaison on a

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{y}(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0$$

En retournant au système (3,1) par la transformation

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \exp - \bar{\varrho}_s t$$

inverse de (20,1), nous obtenons les Théorème A et B respectivement. Ceci achève notre démonstration.

CHAPITRE III. GÉNÉRALISATIONS ET APPLIQUATIONS

21. Généralisations

A. On peut admettre la condition (3,13) ou la condition (3,14) non seulement quand $\bar{\varrho}_s$ ou $\bar{\varrho}_{s+1}$ respectivement, est la partie réelle des valeurs propres de simple multiplicité, mais aussi quand aux valeurs propres de partie réelle $\bar{\varrho}_s$ ou $\bar{\varrho}_{s+1}$ correspondent des *diviseurs élémentaires linéaires* (c'est-à-dire de rang 1).

La démonstration de cette généralisation est très simple. Si nous considérons les diviseurs élémentaires de la matrice $\boldsymbol{A}$ et convenons que r_k soit non pas l'ordre de la valeur propre λ_k, mais le rang du diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, (nous ne supposons plus que toutes les λ_k soient différentes) alors les formules (5,3) et (5,5) restent vraies. (Voir Pietrowski [11], Schlesinger [13] ou bien Tatarkiewicz [16]). La démonstration est la même qu'au paragraphe 5, étant donné que dans la matrice $\boldsymbol{K}$ de la formule (5,2) à chaque diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ correspond un groupe de r_k équations contenant exactement une équation avec une variable dépendante x_i.

Si les diviseurs élémentaires qui correspondent a λ_i de partie réelle ϱ_s sont tous de rang 1, (ils peuvent être en nombre plus grand que 1) alors $\bar{\varrho}_s$ n'entre pas sous le signe des intégrales multiples ($j > 1$) de (5,3) et l'hypothèse (3,13) suffira pour etablir les majorations du Chapitre II. De même si les diviseurs élémentaires qui correspondant a λ_i de partie réelle $\bar{\varrho}_s$ sont tous de rang 1, alors l'hypothèse (3,14) suffira pour établir les majorations du même chapitre.

B. On peut évidemment envisager l'équation presque linéaire non homogène à *coefficients presque constants* (voir Tatarkiewicz [15]).

$$\dot{\boldsymbol{x}} - A(t)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{f}(t).$$

Or, il suffit de poser

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}, t) = [A(t) - A]\, x$$

et

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}, t) \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}, t)$$

(où A est une matrice constante et $\boldsymbol{g}_2$ et $\boldsymbol{h}_2$ sont choisis convenablement) pour la ramener à l'équation (3,1). Pour plus de détails voir § 22 et § 24.

C. Quelques auteurs (par exemple Bellmann [1]) ont étudié des systèmes dont les seconds membres dépendent de $\dot{\boldsymbol{x}}$

(21,1) $$\dot{\boldsymbol{x}} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \boldsymbol{f}(t).$$

L'étude des propriétés de ces systèmes est beucoup plus compliquée que celle du système (3,1). Si l'on admet une hypothèse très forte, à savoir

(21,2) $$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}, \qquad |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}, \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}, t)| \leqslant \chi(t)\, |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|$$

(21,3) $$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}, \qquad |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}, \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}, t)| \leqslant \gamma(t)\, |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|$$

et $\chi(t)$ vérifie la condition (3,4) et $\gamma(t)$ la condition (3,7), alors les raisonnements des paragraphes 5—13 ne changeront pas. (Les conditions (21,2) et (21,3) assureront la convergence de la suite (13,2). Mais, étant donné que (21,1) est un système implicite, il y a quelques difficultés à vaincre aux paragraphes 14—18.)

Le système (21,1) ne semble pas avoir d'importantes appliquations. L'énoncé Théorèmes A et B est suffisamment compliqué et la démonstration (§ 4 — §20!) est suffisamment longue pour ne pas s'occuper de plus près des systèmes (21,1) ne vérifiant pas les conditions (21,2) et (21,3).

D. Nos estimations numériques ne sont pas les meilleures possibles (en particulier la valeur S_ε peut être plus petite que (12,4)). Dans le cas où l'on voudrait arriver à des estimations numériques meilleures il faudrait modifier quelquesuns des calculs de paragraphes 5—12. Particulièrement la constante b (voir 5,4)) peut être remplacée par une constante plus petite (l'emploi directe des matrices $\boldsymbol{B}^{ik}$ — qui sont faciles à calculer — est le preférable).

22. Théorème de Perron. Les Théorèmes A et B sont trés généraux, mais en revanche leurs énoncés sont bien compliqués. Il est intéressant d'en deduire des théorèmes d'une moindre portée, mais dont l'énoncé est beaucoup plus simple.

Supposons que les valeurs propres de A de partie réelle nulle soient simples. Alors la fonction $\varphi(\varepsilon, t) = const.$ est une fonction de comparaison. (Elle n'est pas une fonction de forte comparaison!)

Alors la condition (3,17) étant remplie, cela signifie simplement que l'intégrale

$$\int_{T_0}^{\infty} |\boldsymbol{f}(t)|\, dt$$

converge. Supposons qu'il existe une matrice constante $\boldsymbol{A}$ telle que

$$\int_{T_0}^{\infty} |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, dt \tag{22,1}$$

converge. (Si elle existe elle est définie univoqument).

Remarquons que la fonction

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{x}$$

vérifie les hypothèses du Théorème B (voir § 21 B). En effet posons

$$\gamma(t) = |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|.$$

Alors

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)| = ||\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{x} - |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, \bar{\boldsymbol{x}}| =$$
$$= ||\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, [\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}]| \leqslant |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}| = \gamma(t)\, |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|$$

où en vertu de (22,1), $\gamma(t)$ vérifie (3,7). De plus

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) = |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Admettons $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$. Le Théorème A nous donne alors le théorème suivant:

Théorème C. *Soit un système*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t). \tag{22,2}$$

Supposons qu'il existe une matrice constante A telle que les intégrales

$$\int_{T_0}^{+\infty} |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}|\, dt, \qquad \int_{T_0}^{+\infty} |\boldsymbol{f}(t)|\, dt$$

convergent. Soit m le nombre des racines, multiplicité compté, de l'équation séculaire

$$\text{(22,3)} \qquad \mathrm{Det}\,|A - \lambda E| = 0$$

qui ont une partie réelle $\leqslant 0$. *Supposons que les racines de* (22,3) *ayant la partie réelle égale a zéro, sont simples.*

Alors il existe une famille a m paramètres de solutions de (22,2) *qui sont bornées. Les solutions n'appartenant pas à cette famille ne sont pas bornées.*

Il est évident que ce Théorème reste vrai si l'on perturbe le second membre de (22,2) par une fonction $g(x,t)$ qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au § 3, c'est-à-dire (3,5), (3,6) et (3,7). (Mais $h(x,t)$ doit rester égale à 0). On pourrait aussi exiger, non pas que les valeurs propres de A de partie réelle nulle soient simples, mais que les diviseurs élémentaires qui correspondent a ces valeurs propres, soient de rang 1 (voir § 21A).

Ce Théorème généralise un résultat de O. Perron [7]. R. Bellmann [1] en donne d'autres généralisations.

23. Un système d'équations non linéaires. Une matrice qui n'est composée que de zéros a comme valeurs propres des zéros et tous ses diviseurs élémentaires sont de rang 1. En appliquant la généralisation du Théorème A donné au § 20 A nous aurons le

Théorème D. *Soit un système d'équations*

$$\text{(23,1)} \qquad \dot{x} = g(x,t)$$

tel que

$$|g(x,t) - g(\bar{x},t)| \leqslant \gamma(t)\,|x - \bar{x}|$$

et où les intégrales

$$\int_{T_0}^{+\infty} |g(0,t)|\,dt, \qquad \int_{T_0}^{+\infty} \gamma(t)\,dt$$

convergent.

Alors toutes les solutions de (23,1) *sont bornées.*

24. Théorème de Peyovitch. Remarquons que la fonction linéaire

$$\varphi(\varepsilon, t) = (\varrho + \varepsilon)\,t$$

où $\varepsilon \in (0, \Delta)$ est une fonction de forte comparaison, pourvu que $\Delta > 0$ soit assez petit. (En effet, si nous supposons que $\bar{\varrho}_s < \varrho < \bar{\varrho}_{s+1}$ il suffit de poser $\Delta = \bar{\varrho}_{s+1} - \varrho$, $\beta_\varepsilon \underset{df}{=} \varrho + \varepsilon \underset{df}{=} \gamma_\varepsilon$).

Supposons que la fonction $f(t)$ vérifie pour chaque $\varepsilon > 0$ la condition

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)| \exp -(\varrho + \varepsilon)\, t = 0. \tag{24,1}$$

Nous allons démontrer qu'elle va satisfaire alors à la condition (3,17). En effet si (24,1) est vérifiée pour chaque $\varepsilon > 0$, alors, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$, un N_ε tel que pour $t \in \langle T_0, +\infty)$

$$|f(t)| \exp -\left(\varrho + \frac{\varepsilon}{2}\right) t < N_\varepsilon$$

donc

$$\int_{T_0}^{+\infty} |f(t)| \exp -(\varrho + \varepsilon)\, t\, dt < N_\varepsilon \cdot \int_{T_0}^{+\infty} \exp -\frac{\varepsilon t}{2}\, dt = \frac{2 N_\varepsilon}{\varepsilon} \exp -\frac{\varepsilon}{2} T_0 \underset{df}{=} M_\varepsilon .$$

La condition (3,17) se trouve ainsi vérifiée.

Soit $A(t)$ une matrice définie et continue pour $t \in \langle T_0, +\infty)$ et telle que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = A \tag{24,2}$$

où A est une matrice constante. (C'est-à-dire que $A(t) = [a_{ik}(t)]$, $A = [a_{ik}]$ et $\lim a_{ik}(t) = a_{ik}$ pour $i, k = 1, \dots, n$).

Posons

$$[A(t) - A]\, x = h(x, t) \quad \text{et} \quad g(x, t) = 0.$$

De même qu'au paragraphe 22 on voit que les hypothèses du Théorème B sont vérifiées et l'on à

Théorème E. *Soit un système*

$$\dot{x} = A(t)\, x + f(t). \tag{24,3}$$

Supposons que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = A$$

et

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)| \exp -(\varrho + \varepsilon)\, t = 0$$

pour chaque $\varepsilon > 0$. *Soit* m *le nombre des racines (en comptant leur mutiplicité) de l'équation séculaire*

$$\mathrm{Det}\, |A - \lambda E| = 0$$

dont la partie réelle est $\leqq \varrho$.

Alors il existe une famille à m paramètres de solutions de (24,3), *qui vérifient la condition*

$$\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t)| \exp -(\varrho+\varepsilon)t = 0 \tag{24,4}$$

pour chaque $\varepsilon > 0$. Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que les solutions qui n'appartiennent pas à cette famille ne vérifient pas (24,4) *pour $\varepsilon < \varepsilon_0$.*

Il est évident que si l'on perturbe le second membre de (24,3) par des fonctions non linéaires $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$ vérifiant les mêmes conditions qu'au § 3 (c'est-à-dire les conditions (3,2) — (3,7)), alors le Théorème E restera vrai (il existe alors une famille à m paramètre de solutions de (24,3) qui vérifient (24,4) pour tout $\varepsilon > 0$).

Le Théorème E à été énoncé (uniquement pour les systèmes linéaires (24,3)) par T. Peyovitch [9], d'ailleurs d'une manière fort imprécise. L'analyse de sa démonstration semble indiquer qu'il a démontré (en laissant des lacunes) un théorème plus faible, à savoir que sous les hypothèses de notre Théorème E *il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ une famille $W(\varepsilon)$ à m paramètres de solutions qui vérifient* (24,4).

25. Rang des solutions fondamentales. Introduisons la définition suivante:

Définition. *Nous disons que la fonction (la fonction-vecteur) $\boldsymbol{f}(t)$ est de rang ϱ si pour chaque $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{f}(t)| \exp -(\varrho+\varepsilon)t = 0$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |\boldsymbol{f}(t)| \exp -(\varrho-\varepsilon)t = +\infty$$

Il est bien connu que pour chaque $\boldsymbol{f}(t)$ ce rang existe — fini ou non — et qu'il est défini univoquement. (Voir Picard [**10**], t. III, p. 383).

Soit un système

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) \tag{25,1}$$

Supposons que les conditions (3,2) — (3,7) soient vérifiées. Etant donné qu'ici $\boldsymbol{f}(t) \equiv \boldsymbol{0}$, nous pouvons admettre dans le Théorème B un nombre quelconque pour ϱ. Soient $\bar{\varrho}_k$ les différentes parties réelles des valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ (voir (3,9)). Supposons qu'il existe m_k valeurs propres de $\boldsymbol{A}$, multiplicité compté, telles que leur partie réelle est $\bar{\varrho}_k$ $(k = 1, \ldots, q)$.

Evidemment

$$m_1 + m_2 + \cdots m_q = n$$

Admettons pour ϱ un nombre quelconque $<\bar{\varrho}_1$. En appliquant le Théorème B et les résultats du § 20, nous sommes assurés qu'il existe une famille W_0 à 0 paramètres de solution (c'est-à-dire contenant un seul élément, à savoir $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$) et telle que, pour $\boldsymbol{x} \in W_0$ et pour $\varepsilon > 0$, l'on ait

$$\lim |\boldsymbol{x}(t)| \exp -(\varrho + \varepsilon) t = 0 \tag{25,2}$$

Cette solution est donc de rang $-\infty$. L'ensemble des intersections de l'hyperplan $t = T_0$ et des solutions appartenant à W_0 est une image homéomorphe de $\boldsymbol{R}_0 = \{0\}$.

Les autres solutions ne vérifient pas la condition (25,2) pour $\varepsilon > 0$ assez petit et elles ont un rang $> -\infty$.

Prenons $\varrho = \bar{\varrho}_1$. En appliquant le Théorème B et les résultats du § 20, nous sommes assurés qu'il existe une famille W_1 à m_1 paramètres de solutions telles que, si $\boldsymbol{x} \in W_1$ et $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to \infty} |(t)| \exp -(\bar{\varrho} + \varepsilon) t = 0 \tag{25,3}$$

Si $\boldsymbol{x} \in W_1 - W_0$, alors (25,2) n'est pas vérifiée et il est facile de voir que pour tout $\varepsilon > 0$ (et $\varrho < \bar{\varrho}_1$)

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} |\boldsymbol{x}(t)| \exp -(\varrho - \varepsilon) t = +\infty \tag{25,4}$$

Donc les solutions appartenant à $W_1 - W_0$ sont de rang $\bar{\varrho}_1$.

L'ensemble des intersections de l'hyperplan $t = T_0$ et des solutions appartenant à W_1 est une image homéomorphe de R_{m_1}, donc les solutions appartenant à cette famille sont de la forme

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 (t; c_1, \ldots, c_{m_1})$$

où $\boldsymbol{x}_1(t; c_1, \ldots, c_{m_1})$ est une fonction continue de m_1 paramètres indépendants $c_1, \ldots, c_m$ telles que $\sum_{i=1}^{m_1} c_i > 0$. (Remarquons que $\boldsymbol{x}_1 (t; 0, \ldots, 0) \equiv \boldsymbol{0} \in W_0$).

En répétant ce raisonnement nous obtenons le théorème suivant

Théorème F. *Soit l'équation* (25,1) *vérifiant les suppositions* (3,2) — (3,7). *Alors il existe une fonction continue de* $n + 1$ *variables*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} (t; c_1, \ldots, c_n) \tag{25,5}$$

telle que

1^0 (25,5) *est la solution générale de* (25,1) *(c'est-à-dire pour chaque* n*-tuple* $c_1, \ldots, c_n$ *de nombres réels* (25,5) *est une solution de* (25,1) *et inversement).*

2° *Si*

$$c^2_{m_{k-1}+1} + c^2_{m_{k-1}+2} + \cdots + c^2_{m_k} > 0$$

alors toutes les fonctions

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t; c_1, \ldots, c_{m_k}, 0, \ldots, 0)$$

considérées comme fonctions de t sont de rang $\bar{\varrho}_k$

Vu le § 22 et le § 24, du Théorème F s'ensuit

Théorème G. *Soit une équation différentielle linéaire*

(25,6) $$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}.$$

Supposons que $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_1(t) + \boldsymbol{A}_2(t)$ *et qu'il existe deux matrices constantes* $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ *telles que*

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{A}_1(t) = \boldsymbol{A}_1 \quad \text{et} \quad \int_{T_0}^{+\infty} |\boldsymbol{A}_2(t) - \boldsymbol{A}_2|\, dt \ \textit{converge.}$$

(C'est-à-dire que (25,6) est un système d'équations linéaires homogènes *à coefficients presque constants). Posons* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$.

Soit $\bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 < \ldots < \bar{\varrho}_q$ *l'ensemble des différentes parties réelles des valeurs propres de la matrice* $\boldsymbol{A}$. *Supposons que* m_k *valeurs propres, multiplicité compté, ont comme partie réelle le nombre* $\bar{\varrho}_k$.

Alors l'équation (25,6) *possède un systéme fondamental de solutions*

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$$

qui contient exactement m_k *solutions de rang* $\bar{\varrho}_k$ *pour* $k = 1, \ldots q$.

En plus, toute solution

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r_k} c_i\, \boldsymbol{x}^{(i)}(t)$$

telle que

$$c^2_{m_{k-1}+1} + c^2_{m_{k-1}+2} + \cdots + c^2_{m_k} > 0$$

est de rang $\bar{\varrho}_k$.

C'est-à-dire que sous nos suppositions, l'équation (25,6) admet un système *fondamental normal (au sens de* L a p o u n o f f) *de solutions,* (voir N i e m y c k i j — S t i e p a n o w [**6**], p. 188).

La généralisation des Théorèmes F et G aux systèmes non homogènes (3,1) et (24,3) est évidente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Bellman *On the boundness of solutions of nonlinear differential and difference equations* Trans. of the Amer. Math. Soc. **62** (1947) p. 357—386.

[2] E. Goursat *Cours d'Analyse* Paris 1924.

[3] E. Kamke *Differentialgleichungen reeler Funktionen* New York 1947.

[4] A. M. Liapounoff *Problème général de la stabilité du mouvement*, traduit par E. Davaux, Ann. Fac. Sci Univ. Toulouse (2) **9** (1907) p 203—475.

[5] S. Łojasiewicz *Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage du point singulier* Ann. Pol. Math. **1** (1954) p. 34—72.

[6] W. W. Niemyckij, W. W. Stiepanow *Kaczestwiennaja tieorija diffierencjalnych wrawnienij* Moskwa-Leningrad 1949.

[7] O. Perron *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssysteme* Math. Zeit. **29** (1929) p. 129—160.

[8] T. Peyovitch *Sur les valeurs asymptotiques des équations différentielles linéaires* Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade **1** (1932) p. 12—54.

[9] T. Peyovitch *Sur la valeur des intégrales à l'infinis des équations différentielles linéaires* Bull. Soc. Math. de France **61** (1933) p. 84—95.

[10] E. Picard *Traité d'Analyse* Paris 1928.

[11] I. Pietrowski *Równania różniczkowe zwyczajne,* tłumaczył S. Drobot, Warszawa 1953.

[12] H. Poincaré *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* Paris 1892.

[13] L. Schlesinger *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* Leipzig 1908.

[14] O. Schreier, E. Sperner *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* Leipzig 1935.

[15] K. Tatarkiewicz *Quelques exemples du comportement asymptotique des solutions des équations différentielles* Ann. UMCS, sec. A. **8**, (1954) p. 105—133.

[16] K. Tatarkiewicz *Contribution à la théorie des équation différentielles* a paraître dans ces Annales sec. A, **9**.

[17] Ch. J. de la Vallée Poussin *Cours d'Analyse Infinitésimale,* New York 1946.

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Institute Mathématique
de l'Académie Polonaise
des Sciences

Streszczenie

1. Praca niniejsza ma na celu podanie warunków dostatecznych na to, by dla rozwiązań $x_i(t)$ układów równań różniczkowych nieliniowych, niemal liniowych, niejednorodnych (o stałych wspóczynnikach) iloczyny

$$x_i(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)$$

były ograniczone lub zmierzały do zera.

Obierając odpowiednio szczególne funkcje za $\varphi(\varepsilon, t)$ — na przykład $\varphi(\varepsilon, t) = const.$ lub $\varphi(\varepsilon, t) = (\varrho + \varepsilon)t$ — można otrzymać stąd warunki (uogólniające znane oddawna warunki dla równań liniowych), które pociągają za sobą ograniczoność rozwiązań lub pozwalają wnosić o rzędzie ich wzrostu.

2. Będziemy oznaczać *tłustymi małymi* literami *wektory* (np. $\boldsymbol{x} = \{x_1, ..., x_n\}$, $\boldsymbol{f}(t) = \{f_1(t), ..., f_n(t)\}$ etc.), zaś *dużymi tłustymi macierze* (np. $\boldsymbol{A} = [a_{ik}]$ etc.). W iloczynie $\boldsymbol{Ax}$ traktujemy $\boldsymbol{x}$ jako macierz jednokolumnową. Wreszcie

$$|\boldsymbol{x}| \underset{df}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

3. Weźmy pod rozwagę równanie różniczkowe wektorowe zwyczajne, o jednej niewiadomej funkcji wektorowej $\boldsymbol{x}$ (to znaczy, układ n równań różniczkowych zwyczajnych o n niewiadomych funkcjach $x_1, .., x_n$):

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ jest macierzą stałą, zaś $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{f}(t)$ są funkcjami wektorowymi określonymi i ciągłymi dla wszystkich wektorów $\boldsymbol{x}$ i wszystkich liczb $t \geqslant T_0$. Załóżmy że

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}.$$

Przypuśćmy ponadto, że istnieją funkcje $\chi(t)$, $\gamma(t)$ określone i ciągłe dla $t \geqslant T_0$, i takie, że dla każdej pary wektorów $\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{x}}$ i wszystkich $t \geqslant T_0$:

$$|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{x}}, t)| \leqslant \chi(t) |\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}|$$

przyczym

$$\lim_{t \to \infty} \chi(t) = 0$$

oraz

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{g}(\overline{\boldsymbol{x}}, t)| \leqslant \gamma(t) |\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}|$$

przyczym całka

$$\int_{T_0}^{\infty} \gamma(t)\, dt$$

jest zbieżna.

Weźmy pod rozwagę równanie wiekowe

$$\mathrm{Det}\,|A - \lambda E| = 0.$$

Rozważmy zbiór uporządkowany wszystkich różnych części rzeczywistych jego pierwiastków (to znaczy wartości własnych macierzy A):

$$\bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho} < \cdots < \bar{\varrho}_q$$

(Oczywiście $q \leqslant n$.) Niech $\bar{\varrho}_0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą $< \bar{\varrho}_1$, oraz niech $\bar{\varrho}_{q+1} = +\infty$.

Definicja. *Funkcję* $\varphi(\varepsilon, t)$ *nazywamy funkcją porównawczą rzędu* m *układu* (1), *jeśli:*

a) *Funkcja* $\varphi(\varepsilon, t)$ *jest określona i ciągła w zbiorze* $(0, \Lambda) \times \langle T_0, +\infty)$, *gdzie* $\Lambda > 0$.

b) *Funkcja* $\varphi(\varepsilon, t)$ *jest słabo rosnąca względem* ε, *to jest* $0 < \varepsilon_1 < < \varepsilon_2 < \Lambda$ *pociąga za sobą*

$$\varphi(\varepsilon_1, t) \leqslant \varphi(\varepsilon_2, t)$$

dla każdego $t \in \langle T_0, +\infty)$.

c) *Istnieje takie* s ($s = 0, 1, \ldots, q$), *że macierz* A *posiada dokładnie* m *wartości własnych (licząc krotności) o częściach rzeczywistych* $\leqslant \bar{\varrho}_s$.

d) *Dla każdego* $\varepsilon \in (0, \Lambda)$ *istnieją dwie stałe* β_ε i γ_ε *takie, że dla każdej pary* $t_1 \neq t_2$, $t_i \geqslant T_0$:

$$\beta_\varepsilon \leqslant \frac{\varphi(\varepsilon, t_1) - \varphi(\varepsilon, t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \gamma_\varepsilon$$

przyczym

$$\bar{\varrho}_s < \beta_\varepsilon \tag{2}$$

$$\gamma_\varepsilon < \bar{\varrho}_{s+1}.$$

Jeśli $h(x, t) \equiv 0$ i ponadto albo $s = 0$ albo $\bar{\varrho}_s$ *jest częścią rzeczywistą wyłącznie pojedyńczych wartości własnych macierzy* A, *to wtedy zamiast* (2) *można przyjąć*

$$\bar{\varrho}_s \leqslant \beta_\varepsilon$$

e) *Jeśli* $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ *to* $\beta_{\varepsilon_1} \leqslant \beta_{\varepsilon_2}$ *i* $\gamma_{\varepsilon_2} \leqslant \gamma_{\varepsilon_1}$.

Definicja. *Funkcję porównawczą rzędu* m *układu* (1) *nazywamy funkcją mocno porównawczą rzędu* m *układu* (1) *jeśli*

$$\lim_{t\to\infty}\left[\varphi(\varepsilon, t) - \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}, t\right)\right] = 0$$

dla każdego $\varepsilon \in (0, \Lambda)$.

Przypuśćmy, że dla każdego $\varepsilon \in (0, \Delta)$ *istnieje* M_ε takie, że

$$\int_{T_0}^{t} |\boldsymbol{f}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t)\, dt \leqslant M_\varepsilon.$$

Jak zwykle, rodzinę rozwiązań układu (1) nazwiemy rodziną *m parametrową*, jeśli zbiór przecięć jej elementów i każdej hiperpłaszczyzny $t = T \geqslant T_0$ jest obrazem homeomorficznym (tj. wzajemnie jednoznacznymi i ciągłymi) przestrzeń euklidesowej m wymiarowej $\boldsymbol{R}_m$; przez $\boldsymbol{R}_0$ rozumiemy zbiór jednoelementowy.

4. Przyjmując wszystkie powyższe oznaczenia i założenia, możemy wypowiedzieć oba główne twierdzenia tej pracy:

Twierdzenie A. *Jeśli* $\varphi(\varepsilon, t)$ *jest funkcją porównawczą rzędu m układu* (1), *to wtedy istnieje m parametrowa rodzina rozwiązań tego układu, taka, że dla każdego* $\boldsymbol{x}(t)$ *należącego do tej rodziny i dla każdego* $\varepsilon \in (0, \Delta)$ *iloczyn*

$$|\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) \tag{3}$$

jest ograniczony. Zaś dla $\boldsymbol{x}(t)$ *nie należących do tej rodziny, iloczyn* (3) *jest nieograniczony (dla każdego* $\varepsilon \in (0, \Delta)$).

Twierdzenie B. *Jeśli* $\varphi(\varepsilon, t)$ *jest funkcją mocno porównawczą rzędu m układu* (1), *to wtedy istnieje m parametrowa rodzina rozwiązań tego układu, taka że dla każdego* $\boldsymbol{x}(t)$ *należącego do tej rodziny i dla każdego* $\varepsilon \in (0, \Delta)$ jest

$$\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0 \tag{4}$$

Dla każdego zaś, $\boldsymbol{x}(t)$ *nie należącego do tej rodziny warunek* (4) *nie jest spełniony (dla każdego* $\varepsilon \in (0, \Delta)$).

5. W rozdziale II (§ 4 — § 20) jest podany dowód twierdzeń A i B. Jest on przeprowadzony metodą kolejnych przybliżeń C a q u é'ego — F u c h s a.

6. W § 21 podane są pewne uogólnienia twierdzeń A i B, na przykład na układy niemal liniowe o prawie stałych współczynnikach

$$\dot{\boldsymbol{x}} - A(t)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{f}(t).$$

7. Reszta rozdziału III (§ 22 — § 25) poświęcona jest uzyskaniu dalszych wniosków z twierdzeń A i B. I tak okazuje się, że prostym wnioskiem z tych twierdzeń jest twierdzenie P e r r o n a o rozwiązaniach ograniczonych układów liniowych oraz twierdzenie P e y o v i t c h a o rzędach wzrastania rozwiązań układów liniowych.

Ostatni paragraf (§ 25) poświęcony jest istnieniu *normalnych układów fundamentalnych* L a p u n o w a oraz ich uogólnieniom.

Резюме

1. Этот труд имеет целью дать условия достаточные для того, чтобы для решений $x_i(t)$ системы нелинейных, но почти линейных дифференциальных неоднородных уравнений (с постоянными коэффициентами) произведения

$$x_i(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t)$$

были ограничены или стремились бы к нулю.

Выбирая подходящим образом специальные функции в качестве $\varphi(\varepsilon, t)$, например, $\varphi(\varepsilon, t) = const.$ или $\varphi(\varepsilon, t) = (\varrho + \varepsilon)t$ можно получить условия (обобщающие издавна известные условия для линейных уравнений), из которых вытекает ограниченность решений, или позволяющие судить о порядке их роста.

2. Обозначаем жирным шрифтом малыми буквами векторы (например, $\boldsymbol{x} = \{x_1, ..., x_n\}$, $\boldsymbol{f}(t) = \{f_1(t), ..., f_n(t)\}$, и т. д.), а прописными матрицы (например $A = \| a_{ik} \|$). В произведении $A\boldsymbol{x}$ рассматриваем $\boldsymbol{x}$ как матрицу с одною колонною. Наконец,

$$\boldsymbol{x} \underset{df}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

3. Рассмотрим векторное обыкновенное дифференциальное уравнение с одной неизвестной векторной функцией (это значит: систему n уравнений с n неизвестными функциями $x_1, ..., x_n$):

$$\dot{\boldsymbol{x}} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

где A постоянная матрица, а $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{f}(t)$ векторные функции определённые и непрерывные для всех векторов $\boldsymbol{x}$ и всех чисел $t \geqslant T_0$.

Предположим, что $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$ и что существуют функции $\chi(t)$, $\gamma(t)$ определённые и непрерывные при $t \geqslant T_0$ и такие, что для всякой пары векторов $\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{x}}$ и всяких $t \geqslant T_0$:

$$|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{x}}, t)| \leqslant \chi(t) |\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}|,$$

причём

$$\lim_{t \to \infty} \chi(t) = 0,$$

а также

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{g}(\overline{\boldsymbol{x}}, t)| \leqslant \gamma(t) |\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}|,$$

причём интеграл

$$\int_{T_0}^{\infty} \gamma(t)\, dt$$

сходится.

Возьмем секулярное уравнение

$$\mathrm{Det}\,[A-\lambda E]=0$$

Рассмотрим упорядоченное множество всех различных действительных частей его корней (то-есть собственных значений матрицы A):

$$\bar{\varrho}_1<\bar{\varrho}_2<\cdot\;\cdot\;\cdot<\bar{\varrho}_q.$$

(Очевидно $q<n$). Пусть $\bar{\varrho}_0$ произвольное действительное число $<\bar{\varrho}_1$ и пусть $\bar{\varrho}_{q+1}=+\infty$

Определение. *Функцию $\varphi(\varepsilon,t)$ называем функцией сравнительной порядка m системы* (1), *если*

а) *$\varphi(\varepsilon,t)$ определена и непрерывна на множестве $(0,\Delta)\times\langle T_0,+\infty)$, где $\Delta>0$.*

б) *$\varphi(\varepsilon,t)$ слабо растущая относительно ε то есть из $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\Delta$ следует $\varphi(\varepsilon_1,t)\leqslant\varphi(\varepsilon_1,t)$ при всяком $\varepsilon\in\langle T_0,+\infty)$*

в) *Существует такое число s ($s=0,1,\ldots,q$), что матрица A обладает точно числом m собственных значений (считая и кратности) с действительными частями $\leqq\bar{\varrho}_s$.*

г) *Для всякого $\varepsilon\in(0,\Delta)$ существуют две постоянные β_ε и γ_ε такие, что при всякой паре чисел $t_1\neq t_2$, $t_i>T_0$ имеем*

$$\beta_\varepsilon\leqslant\frac{\varphi(\varepsilon,t_1)-\varphi(\varepsilon,t_2)}{t_1-t_2}\leqslant\gamma_\varepsilon$$

причём

$$\begin{aligned}\bar{\varrho}_s&<\beta_\varepsilon\\ \gamma_s&<\bar{\varrho}_{s+1}\end{aligned}\tag{2}$$

Если $h(x,t)\equiv 0$ и сверх того или $s=0$, или $\bar{\varrho}_s$ является действительной частью исключительно однократных собственных значений матрицы A, то тогда вместо (2) можно принять

$$\bar{\varrho}_s\leqslant\beta_\varepsilon$$

д) *Если $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$, то $\beta_{\varepsilon 1}\leqslant\beta_{\varepsilon 2}$ и $\gamma_{\varepsilon 1}\leqslant\gamma_{\varepsilon 2}$.*

Определение. *Сравнительную функцию порядка m системы* (1) *называем функцией сильно сравнительной порядка m системы* (1), *если*

$$\lim_{t\to\infty}\left[\varphi(\varepsilon,t)-\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2},t\right)\right]=0$$

для всякого $\varepsilon\in(0,\Delta)$.

Предположим, что для всякого $\varepsilon\in(0,\Delta)$ существует M_ε такое, что

$$\int_{T_0}^{\infty}|f(t)|\exp-\varphi(\varepsilon,t)\,dt\leqslant M_\varepsilon$$

Как обычно, семейство решений системы (1) назовём семейством m — *параметровым*, если множество пересечений её элементов и всякой гиперплоскости $t = T \geqslant T_0$ является гомеоморфным (т. — е. взамно однозначным и непрерывным) образом евклидова m — мерного пространства R_m. (Под R_0 подразумеваем множество из одного элемента).

4. Принимая вышеприведенные обозначения и предпосылки, можем высказать две главные теоремы этого труда:

Теорема А. Если *$\varphi(\varepsilon, t)$ сравнительная функция порядка m системы* (1), *то существует m — параметровое семейство решений этой системы такое, что для всякого $\boldsymbol{x}(t)$, принадлежащего к этому семейству, и всякого $\varepsilon \in (0, \Delta)$ произведение*

$$\boldsymbol{x}(t) \exp - \varphi(\varepsilon, t) \tag{3}$$

ограничено. А для $\boldsymbol{x}(t)$, не принадлежащего к этому семейству, произведение (3) — *неограниченное (при всяком $\varepsilon \in (0, \Delta)$).*

Теорема Б. *Если $\varphi(\varepsilon\ t)$ функция сильно сравнительная порядка m системы* (1), *то существует m — параметровое семейство решений этой системы такое, что для всякого $\boldsymbol{x}(t)$, принадлежащего к этому семейству, и при всяком $\varepsilon \in (0, \Delta)$*

$$\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t)| \exp - \varphi(\varepsilon, t) = 0 \tag{4}$$

А для $\boldsymbol{x}(t)$, не пронадлежащего к этому семейству, условие (4) *не исполнено (при всяком $\varepsilon \in (0, \Delta)$).*

5. В главе II (§ 4 — § 20) дано доказательство теорем А и Б. Оно проведено методом постіпенных приближений Каке — Фукса.

6. В § 21 даны некоторые обобщения теоромы А и Б, например, на системы уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} - A(t)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{f}(t).$$

7. Остальная часть главы III (§ 22 — § 25)) посвящена получению дальнейших следствий из теорем А и Б. Так, оказывается, что теорема Перрона об ограниченных решениях системы линейных уравнений, а также теорема Пейовича о порядке возрастания решений систем линейныz уравнений являются простыми заключениями из этих теорем.

Последний § 25 посвящён вопросу о существовании нормальных фундаментальных систем Ляпунова и их обобщениям.