ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 4 SECTIO A 1953

Z Zakładu Matematyki III. Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: z. prof. dr K. Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur une inégalité intégrale

Pewna nierówność całkowa

Некоторое интегральное неравенство

1. Ce travail est consacré à la démonstration élémentaire d'une inégalité intégrale.

Les intégrales considérées dans la suite peuvent avoir la valeur $+\infty$ (sauf la supposition contraire). Comme d'habitude nous allons admettre que $+\infty \leqslant +\infty$ et que $x < +\infty$ pour tout x fini.

Soient A_1 et A_2 deux ensembles mesurables. Soit f une fonction mesurable sur $A = A_1 + A_2$ et soit g une fonction sommable sur A (c'est-à-dire telle que l'intégrale $\int\limits_A g(p)\,dp$ soit finie). Soit

$$0 \leqslant f(p_1) \leqslant g(p_1) \leqslant g(p_2) \leqslant f(p_2) \tag{1}$$

pour chaque couple de points p_1, p_2 tels que $p_1 \epsilon A_1$ et $p_2 \epsilon A_2$.

Si

$$\int\limits_A g(p)\,dp \leqslant \int\limits_A f(p)\,dp \tag{2}$$

alors

$$\int\limits_A |g(p)|^2\,dp \leqslant \int\limits_A |f(p)|^2\,dp \tag{3}$$ [1]

Démonstration. Nous pouvons supposer que les ensembles A_1 et A_2 sont disjouints. Étant donné que les fonctions g et f sont non

[1]) Je remercie M. M. Biernacki pour une remarque qui m'a permis non seulement de simplifier considérablement la démonstration. mais aussi de généraliser ce théorème.

négatives et mesurables (donc de même g^2 et f^2) les intégrales (2) et (3) existent mais peuvent avoir la valeur $+\infty$.

I. Nous avons supposé que g est sommable. Supposons de plus que f est sommable. De l'inégalité (2) il vient

$$\int_{A_1} g(p) - f(p)\,dp \leqslant \int_{A_2} f(p) - g(p)\,dp \tag{4}$$

Posons

$$h(p) = f(p) - g(p)$$

C'est-à-dire que $f(p) = h(p) + g(p)$. La fonction h est sommable et

$$\begin{array}{ll} h(p) \leqslant 0 & p \in A_1 \\ & \text{pour} \\ h(p) \geqslant 0 & p \in A_2 \end{array}$$

De l'inégalité (4) il résulte

$$\int_{A_1} h(p)\,dp \geqslant -\int_{A_2} h(p)\,dp$$

En vertu de (1) il existe un c tel que

$$g(p_1) \leqslant c \leqslant g(p_2)$$

pour tout $p_1 \in A_1$ et tout $p_2 \in A_2$.

Nous avons

$$0 \geqslant h(p)\,g(p) \geqslant c\,h(p)$$

pour $p \in A_1$. La fonction h étant sommable, la fonction hg l'est aussi dans A_1. Donc

$$\int_{A_1} h(p)\,g(p)\,dp \geqslant c \int_{A_1} h(p)\,dp \geqslant -c \int_{A_2} h(p)\,dp$$

De même

$$h(p)\,g(p) \geqslant c\,h(p) \geqslant 0$$

pour $p \in A_2$ et

$$\int_{A_2} h(p)\,g(p)\,dp \geqslant c \int_{A_2} h(p)\,dp$$

(la fonction hg peut ne pas être sommable dans A_2)

Il en résulte que

$$\int_A h(p)\,g(p)\,dp = \int_{A_1} h(p)\,g(p)\,dp + \int_{A_2} h(p)\,g(p)\,dp \geqslant 0$$

Remarquons enfin que

$$\int_A |f(p)|^2\,dp = \int_A |h(p)+g(p)|^2\,dp =$$

$$= \int_A |h(p)|^2\,dp + 2\int_A h(p)\,g(p)\,dp + \int_A |g(p)|^2\,dp \geqslant \int_A |g(p)|^2\,dp$$

ce qui entraîne l'inégalité (3).

II. Il reste à considérer le cas où $\int_A f(p)\,dp = +\infty$.

Nous avons

$$0 \leqslant f(p) \leqslant g(p) \leqslant c$$

pour $p \in A_1$, donc

$$0 \leqslant \int_{A_1} f(p)\,dp \leqslant \int_{A_1} g(p)\,dp$$

g étant par hypothèse sommable dans A, donc aussi dans $A_1 \subset A$, la fonction f est sommable dans A_1 et l'intégrale $\int_{A_1} f(p)\,dp$ est finie. Par suite

$$\int_{A_2} f(p)\,dp = +\infty$$

Mais pour $p \in A_2$ nous avons $c \leqslant f(p)$ et $cf(p) \leqslant |f(p)|^2$, donc

$$\int_{A_2} |f(p)|^2\,dp \geqslant c\int_{A_2} f(p)\,dp = +\infty$$

Ainsi $\int_A |f(p)|^2\,dp = +\infty$ et l'inégalité (3) est vérifiée, que la fonction g^2 soit sommable ou non. Ce qui achève la démonstration.

2. Il est facile de montrer qu'il ne suffit pas de supposer f et g mesurables. Si l'inégalité (1) est alors vérifiée et les deux intégrales (2) sont infinies, il peut arriver que l'inégalité (3) ne soit pas vraie.

L'exemple suivant le prouve. Soit

$$A_1 = \langle 1, +\infty), \quad A_2 = \langle 1/2, 1), \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors

$$\frac{1}{x_1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x_2}} \leqslant \frac{1}{x_2}$$

pour $1 \leqslant x_1$ et $1/2 \leqslant x_2 \leqslant 1$, et

$$\int_A g(x)\,dx = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty \leqslant +\infty = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_A f(x)\,dx.$$

Donc les fonctions f, g sont mesurables et les conditions (1), (2) sont vérifiées. Pourtant

$$\int_A [g(x)]^2\,dx = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty > 2 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_A [f(x)]^2\,dx$$

et (3) est en défaut.

On peut montrer que si A est de mesure finie, ou bien si A_1 est de mesure finie et $c > 0$, cette circonstance ne peut pas avoir lieu.

3. Signalons un cas où notre inégalité est particulièrement simple: *Supposons que les fonctions f, g soient définies et faiblement croissantes dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$, $f(a) \geqslant 0$ et qu'il existe un $d \in (a, b)$ tel que*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad x \in \langle a, d)$$

pour

$$f(x) \geqslant g(x) \qquad x \in (d, b\rangle$$

Si

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

alors

$$\int_a^b [g(x)]^2\,dx \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

4. L'inégalité (3) peut avoir des applications dans les démonstrations directes et élémentaires du Calcul des variations. Par exemple il résulte immédiatement de cette inégalité que dans la classe des fonctions sommables $u(x) \geqslant 0$ pour lesquelles

$$\int_a^b u(x)\,dx = k(b-a)$$

(où k est une constante) la valeur minimale de l'intégrale

$$I\,|u| = \int_a^b |u(x)|^2\,dx$$

est atteinte pour la fonction constante $u(x) \equiv k$.

Streszczenie

Przypuśćmy, że A_1 i A_2 są dwoma zbiorami mierzalnymi. Niechaj f będzie funkcją całkowalną w A (to znaczy, że całka $\int_A g(p)\,dp$ istnieje i ma wartość skończoną).

Przypuśćmy, że

$$0 \leqslant f(p_1) \leqslant g(p_1) \leqslant g(p_2) \leqslant f(p_2)$$

dla każdej pary punktów p_1, p_2 takiej, że $p_1 \in A_1$ i $p_2 \in A_2$.

Jeżeli

$$\int_A g(p)\,dp \leqslant \int_A f(p)\,dp$$

to

$$\int_A [g(p)]^2\,dp \leqslant \int_A |f(p)|^2\,dp$$

Резюме

Предположим, что A_1 и A_2 суть два измеримые множества. Пусть f есть функция определённая и измеримая на множестве $A = A_1 + A_2$, и пусть g есть функция интегрируемая на A (это значит, что интеграл $\int_A g(p)\,dp$ существует и имеет конечное значение).

Предположим, что $0 \leqslant f(p_1) \leqslant g(p_1) \leqslant g(p_2) \leqslant f(p_2)$ для всякой пары точек p_1, p_2, что $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$.

Если

$$\int_A g(p)\,dp \leqslant \int_A f(p)\,dp$$

то

$$\int_A |g(p)|^2\,dp \leqslant \int_A |f(p)|^2\,dp.$$