

Les recherches consacrées à l'étude des solutions de cette équation et aux généralisations à des systèmes du n -ième ordre d'équations linéaires ou bien à des systèmes qui „diffèrent peu” des systèmes linéaires ont pris une extension considérable (voir par exemple l'ouvrage de R. Bellman [2] ne contenant sur 170 pages, que les énoncés des résultats acquis dans ce domaine depuis 80 ans).

Mais ces recherches n'ont épuisé (et ceci relativement) que l'étude des cas suivants:

1,12. Il existe les limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b(t)$$

1,13. Les fonctions $a(t)$, $b(t)$ sont monotones.

1,14. Il existe des nombres A , B tels que les intégrales

$$\int_0^{\infty} |a(t) - A| dt \quad \int_0^{\infty} |b(t) - B| dt$$

soient finies.

1,15. Les fonctions $a(t)$, $b(t)$ sont périodiques.

Dans le cas général, nous ne disposons, à présent, que de quelques exemples (ou plutôt de contre-exemples sur des hypothèses émises — voir par exemple la note de O. Perron [6]) et de quelques tentatives pour trouver des critères valables non seulement dans les cas 1,12-1,15 (voir par exemple D. C. Lewis [4] et R. E. Vinograd [10]). Ces tentatives sont d'ailleurs toutes récentes.

1,2. Ce Mémoire a pour but d'obtenir des résultats valables dans le cas général. Mais, comme on peut s'y attendre en analysant les exemples connus, il faut faire des hypothèses assez fortes concernant l'allure des fonctions $a(t)$ et $b(t)$. Ces hypothèses sont, dans un certain sens, essentielles (voir § 3). Dans certains cas il faut faire des hypothèses supplémentaires concernant l'allure des dérivées $\dot{a}(t)$ et $\dot{b}(t)$. (Peut-être pourrait-on les omettre).

Il est important de remarquer que les fonctions qui vérifient ces hypothèses peuvent ne vérifier aucune des conditions 1,12-1,15.

Les recherches sur la détermination des solutions bornées et des solutions vérifiant certaines conditions asymptotiques seront faites parallèlement. Les résultats obtenus sont résumés dans les Théorèmes I et II. Ils sont intéressants vu leur similitude avec les résultats connus jusqu'ici dans les cas particuliers 1,12-1,15.

La démonstration complète de ces deux théorèmes est contenue aux § 4-8. Le § 3 est consacré à l'interprétation géométrique des hypothèses des Théorèmes I et II.

Au § 9 nous considérons l'équation (1,11) où la fonction $f(t)$ vérifie des conditions différentes de celles des Théorèmes I et II. En particulier nous considérons l'équation linéaire homogène du second ordre (c'est-à-dire l'équation (1,11) avec $f(t) \equiv 0$ — voir le Théorème III).

Il est facile de généraliser ces résultats à certaines classes d'équations qui „diffèrent peu” des équations linéaires du second ordre. Cette généralisation fait l'objet du § 10, qui contient aussi une esquisse de démonstration.

1,3. Remarquons que ces recherches peuvent avoir des applications immédiates, étant donné que l'équation (1,11) avec des coefficients ne vérifiant aucune des conditions 1,12-1,15 a une certaine importance dans l'électrotechnique.

1,4. Pour démontrer les Théorèmes I et II nous allons transformer l'équation (1,11) en un système équivalent (système (4,12)). On étudiera ce système à l'aide de la méthode topologique de M. T. Ważewski („Théorème de rétracte” — voir [11]).

Pour nos buts, cette méthode peut être résumée comme il suit:

Soit un système différentiel

$$(1,41) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= h_1(x, z, t) \\ \dot{z} &= h_2(x, z, t) \end{aligned}$$

défini dans le demi-espace

$$(1,42) \quad E = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times \langle 0, +\infty \rangle$$

et tel que chaque solution saturée soit définie sur la demi-droite $\langle 0, +\infty \rangle$.

Soit un tube T donné par les équations

$$x = u(\varphi, t) \quad z = v(\varphi, t)$$

où u, v sont des fonctions définies et continues sur $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$ et telles que

$$u(0, t) = u(2\pi, t) \quad v(0, t) = v(2\pi, t) \quad \text{pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle$$

Il partage donc E en deux ensembles: son intérieur Ω et son extérieur.

Supposons que T soit pourvu d'un plan tangent, variant d'une façon continue avec la position du point de contact, sauf sur un nombre fini de courbes (assez régulières), où il peut ne pas exister.

Supposons que sur T il n'y ait pas de points de glissement intérieur des solutions de (1,41) et soit $S \subset T$ l'ensemble de sortie stricte des solutions du tubes T (c'est-à-dire de sortie stricte de l'intérieur Ω de T).

En employant la notion de rétracte (voir par exemple C. Kuratowski [3], vol. I, p. 75) nous aurons le théorème suivant („Théorème de rétracte” de M. T. Ważewski):

Soit Z un sous-ensemble du plan $t = t_0$ jouissant des propriétés suivantes:

$$Z \subset \Omega + S$$

$$Z \cdot S \text{ n'est pas un rétracte de } Z$$

$$Z \cdot S \text{ est un rétracte de } S.$$

Alors il existe au moins une solution de (1,41) issue d'un point de Z , qui pour $t \gg t_0$ restera toujours dans Ω (dans l'intérieur du tube T).

1.5. Introduisons une définition qui, dans la suite, facilitera l'énoncé des théorèmes:

Si, pour un nombre ε , la fonction $f(t)$ vérifie la condition

$$(1,51) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\varepsilon t} = 0$$

alors nous dirons que $f(t)$ est ε -bornée.

Si pour tous les nombres $\varepsilon > \varepsilon_0$ une fonction est ε -bornée, alors nous dirons qu'elle est ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Une fonction ε_0 -bornée est évidemment ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ (mais une fonction ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ peut ne pas être ε_0 -bornée).

Une fonction qui est ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ a le nombre caractéristique $\leq \varepsilon_0$ (voir par exemple E. Picard [7], t. III, p. 382).

Remarquons que pour chaque fonction continue ε -bornée il existe un nombre M_ε tel que

$$(1,52) \quad |f(t)| e^{-\varepsilon t} < M_\varepsilon$$

pour $t \geq t_0$.

Evidemment la condition (1,51) n'est pas une conséquence de (1,52). Mais, si nous supposons que pour chaque nombre $\varepsilon > \varepsilon_0$ il existe un M_ε tel que la condition (1,52) soit vérifiée, alors (1,51) est vérifiée pour chaque $\varepsilon > \varepsilon_0$ et la fonction $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Pour fixer les idées, supposons que $\varepsilon_0 = 0$. Nous voyons en effet, que si (1,52) est vérifiée pour chaque $\varepsilon > 0$, alors il existe un $M_{1/2}$, tel que

$$|f(t)| e^{-\frac{1}{2}t} < M_{1/2}$$

et nous avons

$$0 < f(t) e^{-\varepsilon t} < M_{1,2} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \rightarrow 0$$

d'où il résulte que la condition (1,51) est vérifiée pour chaque $\varepsilon > 0$.

Nous dirons que la fonction $f(t)$ est non- ε -bornée si elle vérifie la condition

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-\varepsilon t} = +\infty.$$

Une fonction non- ε -bornée n'est pas évidemment une fonction ε -bornée, mais non pas inversement. (Par exemple $f(t) = t \sin t$ n'est pas 0-bornée, mais elle n'est pas non plus non-0-bornée).

Soit un couple de fonctions $[x(t), z(t)]$. Nous dirons qu'il est ε -borné (ε -borné pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, non- ε -borné) si la fonction

$$\sqrt{x^2(t) + z^2(t)}$$

est ε -bornée (ε -bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, non- ε -bornée).

1.6. Pour simplifier les notations, nous écrirons souvent dans la suite a, b, f, \dots, x au lieu de $a(t), b(t), f(t), \dots, x(t)$. De même, nous désignerons les dérivées par rapport à t par $\dot{a}, \dot{b}, \dots, \dot{x}$ au lieu de $\dot{a}(t), \dot{b}(t), \dots, \dot{x}(t)$.

Le symbole a^2 , ou bien $a^2(t)$, désignera le carré de la fonction $a(t)$ c'est-à-dire la fonction $|a(t)|^2$.

§ 2. ÉNONCÉS DES THÉORÈMES

2.1. Soient trois fonctions $a(t), b(t), f(t)$. Dans la suite, nous admettons toujours que ces fonctions sont définies et continues sur la demi-droite $\langle 0, +\infty \rangle$. Alors, par chaque point appartenant au demi-espace E (voir (1,42)) il passe une solution, et une seule, de l'équation (1,11), c'est-à-dire de l'équation

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = f(t).$$

Toute solution saturée sera définie sur $\langle 0, +\infty \rangle$.

2.2. Considérons l'équation

$$(2,21) \quad \lambda^2 - 2a(t)\lambda - b(t) = 0.$$

Pour t fixe c'est une équation algébrique du second degré et, si nous posons

$$A(t) = a^2(t) + b(t)$$

alors ses solutions seront données par les formules

$$(2,22) \quad \begin{aligned} \lambda_1(t) &= a(t) - \sqrt{\Delta(t)} \\ \lambda_2(t) &= a(t) + \sqrt{\Delta(t)}. \end{aligned}$$

Comme solutions d'une équation du second degré, les fonctions $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ peuvent être réelles de signes différents, réelles de même signes ou bien complexes conjuguées. De plus, dans le deuxième et troisième cas, elles peuvent avoir leur partie réelle $\operatorname{Re} \lambda_j(t)$ positive ou négative.

Dans la suite, nous faisons des hypothèses qui nous garantiront en outre que $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ appartiennent pour toutes les valeurs $t \geq 0$ à l'un de cinq cas cités ci-dessous.

Ces hypothèses consistent à admettre les conditions suivantes:

A 1. Les fonctions $a(t), b(t), f(t)$ sont définies et continues sur $\langle 0, +\infty \rangle$ et il existe deux constantes $A_2 > 1, B_1 > 0$ telles que pour toutes les valeurs de $t \geq 0$

$$|a(t)| < A_2 \quad 0 < B_1 < b(t)$$

A 2. Les fonctions $a(t), b(t), f(t)$ sont définies et continues sur $\langle 0, +\infty \rangle$ et il existe trois constantes positives $A_2, B_1, \bar{\tau}$ telles que pour toutes les valeurs de $t \geq 0$

$$|a(t)| < A_2 \quad 0 < B_1 < -b(t) < a^2(t) - \bar{\tau}.$$

A 3. Les fonctions $a(t), b(t), f(t)$ sont définies et continues sur $\langle 0, +\infty \rangle$ et il existe trois constantes positives $A_1, A_2, \bar{\sigma}$ telles que pour toutes les valeurs de $t \geq 0$

$$0 < A_1 < |a(t)| < A_2 \quad a^2(t) + \bar{\sigma} < -b(t) < A_2^2 + \bar{\sigma}.$$

2,3. L'hypothèse que **A 1** ou **A 2** ou **A 3** soit vérifiée nous permet de distinguer 5 cas.

W 1. Si nous supposons que la condition **A 1** est vérifiée alors

$$a^2(t) < a^2(t) + b(t) = \Delta(t)$$

et les fonctions $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ sont réelles et de signes contraires.

W 2. Si nous supposons que la condition **A 2** est vérifiée, alors

$$0 < \bar{\tau} < a^2(t) + b(t) = \Delta(t) < a^2(t)$$

et les fonctions $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ sont réelles et de même signe. Nous voyons que

$$\operatorname{sgn} \lambda_j(t) = \operatorname{sgn} a(t) \quad j = 1, 2$$

Nous avons donc deux sous-cas:

W 2,1. Si nous admettons **A 2** et $a(t) > 0$ alors $\lambda_j(t) > 0$, $j = 1, 2$.

W 2,2. Si nous admettons **A 2** et $a(t) < 0$ alors $\lambda_j(t) < 0$, $j = 1, 2$.

Posons

$$\tau(t) = \sqrt[2j]{|A(t)|}$$

c'est-à-dire que

$$\tau^2(t) = a^2(t) + b(t).$$

$\tau(t)$ est une fonction réelle et nous voyons que

$$0 < \bar{\tau} < \tau(t) < A_2.$$

Désignons par **B 2** la condition suivante:

B 2. Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont pourvues de dérivées continues et il existe une constante positive κ telle que $0 < \kappa < 1$ et

$$(2,31) \quad \kappa \tau(t) \left| \frac{\lambda_j(t)}{b(t)} \right| \geq \left| \frac{a(t)'}{b(t)'} \right|$$

$$(2,32) \quad \tau(t) \left| \frac{\lambda_j(t)}{b(t)} \right| \geq 2(-1)^j \left| \frac{\tau(t)'}{b(t)'} \right|$$

Si $a(t) > 0$ alors il faut prendre $j = 1$.

Si $a(t) < 0$ alors il faut prendre $j = 2$.

W 3. Si nous supposons que la condition **A 3** est vérifiée, alors $A(t) < 0$ et $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ sont des fonctions complexes non réelles. Posons

$$\sigma(t) = \sqrt[2j]{-A(t)}$$

La fonction $\sigma(t)$ est réelle et nous avons

$$\lambda_1(t) = a(t) - i\sigma(t) \quad \lambda_2(t) = a(t) + i\sigma(t).$$

Nous voyons que

$$0 < \bar{\sigma} < \sigma(t) < \sqrt{A_2^2 + \bar{\sigma}}$$

et il existe une constante positive $B_1 = A_2^2 + \bar{\sigma}$ telle que

$$0 < B_1 < -b(t).$$

Désignons par **B 3** la condition suivante:

B 3. Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont pourvues de dérivées continues et il existe deux constantes positives κ_1, κ_2 telles que $0 < \kappa_1 + \kappa_2 < 2$ et

$$|[\ln |a(t)|]'| < \kappa_1 \sigma(t)$$

$$\frac{1}{a(t)} [\ln \sigma^2(t)]' > -\kappa_2.$$

Si nous supposons que la condition **A 3** est vérifiée alors nous voyons que

$$\operatorname{sgn} R' \lambda_j(t) = \operatorname{sgn} a(t) \quad j = 1, 2$$

Donc nous avons deux sous-cas

W 3,1. Si nous admettons **A 3** et $a(t) > 0$ alors $R' \lambda_j(t) > 0$, $j = 1, 2$.

W 3,2. Si nous admettons **A 3** et $a(t) < 0$ alors $R' \lambda_j(t) < 0$, $j = 1, 2$.

2.4. Désignons par **H** la condition suivante:

H. Les fonctions $a(t), b(t)$ vérifient

la condition **A 1** (qui correspond au cas **W 1**)

ou les conditions **A 2**, $a(t) > 0$ et **B 2** (qui correspondent au cas **W 2,1**)

ou les conditions **A 2**, $a(t) < 0$ et **B 2** (qui correspondent au cas **W 2,2**)

ou les conditions **A 3**, $a(t) > 0$ et **B 3** (qui correspondent au cas **W 3,1**)

ou les conditions **A 3**, $a(t) < 0$ et **B 3** (qui correspondent au cas **W 3,2**)

Désignons par k le nombre des fonctions non positives parmi les fonctions $R' \lambda_1(t), R' \lambda_2(t)$.

Nous voyons que $k = 0, 1$, ou 2 et si nous supposons que la condition **H** est vérifiée alors k ne dépend pas de t . Nous appellerons, comme d'habitude, famille à 0 paramètres un ensemble composé d'un élément unique.

2.5. En employant les définitions introduites jusqu'ici nous pouvons énoncer les théorèmes suivants.

Théorème I. Supposons que la fonction $f(t)$ soit bornée et que la condition **H** soit vérifiée.

Alors l'équation (1,11) a une famille à k paramètres de solutions bornées. Leurs dérivées sont aussi bornées.

Il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que toutes les solutions n'appartenant pas à cette famille et leurs dérivées ne sont pas ε_0 -bornées (donc elles sont non-bornées).

Ce théorème résultera immédiatement des Lemmes I^a, I^b, I^c .

Le Théorème VII en est une généralisation.

Il est assez surprenant, tout d'abord, de voir que l'hypothèse que $f(t)$ est bornée, suffit pour qu'il existe une famille de solutions bornées. Cela provient du fait que la condition **H** est assez forte pour écarter tous les cas-limites (par exemple le cas $R' \lambda_j(t) \rightarrow 0$) dans lesquels il faudrait admettre des suppositions plus fortes que la supposition que $f(t)$ soit bornée.

Remarquons que la fonction $f(t) \equiv 0$ vérifie les hypothèses du Théorème I donc les équations linéaires homogènes du second ordre admettent

une famille à k paramètres de solutions bornées (et ayant des dérivées bornées). Nous allons montrer ultérieurement (n° 9,2 et 9,3) que dans ce cas ces solutions tendent exponentiellement vers zéro (voir le Théorème III).

Si la fonction $f(t)$ vérifie la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

alors elle est bornée et vérifie les hypothèses du Théorème I. Nous allons établir plus loin (n° 9,5 - 9,7) que dans ce cas les solutions bornées de l'équation (1,11) (qui forment une famille à k paramètres, comme le montre le Théorème I) tendent toutes vers zéro (voir le Théorème V).

Si nous supposons que la fonction $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$, nous aurons le théorème suivant:

Théorème II. *Supposons que la fonction $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ et que la condition H soit vérifiée.*

Alors l'équation (1,11) a une famille à k paramètres de solutions qui sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$. Leurs dérivées sont aussi ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

Il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que toutes les solutions n'appartenant pas à cette famille et leurs dérivées ne sont pas ε_0 -bornées.

Ce théorème sera une conséquence immédiate de Lemmes II^a, II^b, II^c. Le Théorème VIII en est une généralisation.

§ 3. QUELQUES REMARQUES SUR LA CONDITION H

3.1. Les conditions du groupe A c'est-à-dire les conditions A 1, A 2, A 3, admettent une facile interprétation géométrique.

Si nous supposons que la fonction $f(t)$ est déterminée, alors l'équation (1,11) dépend uniquement du couple des fonctions

$$(3,11) \quad a = a(t) \quad b = b(t)$$

Ce couple représente une courbe donnée paramétriquement dans le plan $[a, b]$.

S'il existe six constantes positives

$$A_1, A_2, B_1, B_2, \bar{\tau}, \bar{\sigma}$$

telles que pour toutes les valeurs du paramètre $t \geq 0$, la courbe (3,11) est contenue entièrement dans l'un des cinq domaines du plan (a, b) -défini par les inégalités

$$\begin{aligned}
 & -A_2 < a < A_2 & B_1 < b & \text{(cas W 1)} \\
 & \sqrt{B_1 + \tau} < a < A_2 & B_1 < -b < a^2 - \tau & \text{(cas W 2,1)} \\
 (3,12) \quad & -A_2 < a < -\sqrt{B_1 + \tau} & B_1 < -b < a^2 - \tau & \text{(cas W 2,2)} \\
 & A_1 < a < A_2 & a^2 + \bar{\sigma} < -b < A_2^2 + \bar{\sigma} \frac{A_1}{A_2} B_2 & \text{(cas W 3,1)} \\
 & A_2 < a < -A_1 & a^2 + \bar{\sigma} < -b < A_2^2 + \bar{\sigma} \frac{A_1}{A_2} B_2 & \text{(cas W 3,2)}
 \end{aligned}$$

— voir la figure 1 — alors ou la condition A 1 ou la condition A 2 ou la condition A 3 est vérifiée et inversement. Les nombres 0, 1, 2 qu'on voit sur les cinq domaines de la figure 1, désignent le nombre de paramètres de la famille des solutions bornées (Théorème I) ou ε -bornées pour $\varepsilon > 0$ (Théorème II) des équations qui correspondent aux courbes (3,11) contenues dans ce domaine. (Pour simplifier le dessin nous avons admis $B_1 = A_1^2 + \bar{\sigma}$).

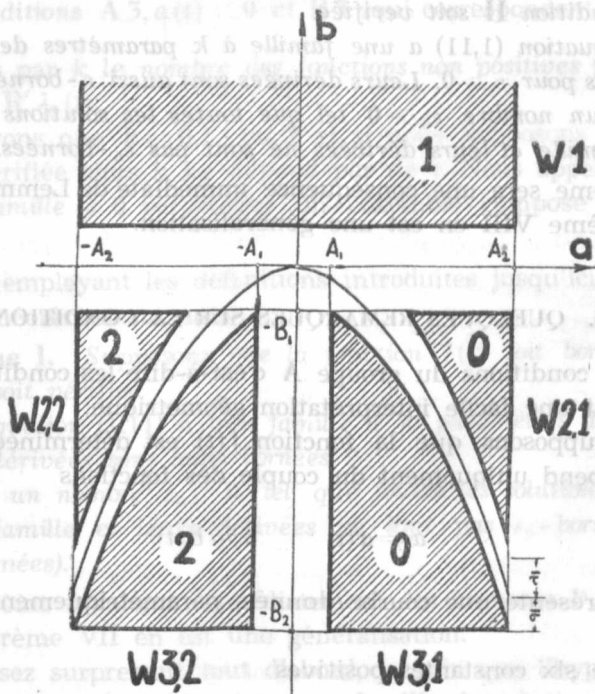


Fig. 1

Remarquons que la somme de tous les domaines (3,12) possibles est égale au plan $[a, b]$ dépourvu de la droite $b = 0$, de la demi-droite $a = 0$, $b \leq 0$ et de la parabole $b = -a^2$.

3,2. L'exemple de G. Ascoli [1] montre que si nous supposons seulement que la fonction $f(t)$ est bornée et que la courbe (3,11) est contenue dans la somme des domaines correspondant aux cas W 3,1, W 3,2, et de la portion du plan contenue entre ces domaines, (c'est-à-dire dans le domaine $-A_2 < a < A_2$, $\max [B_1, a^2 + \bar{\sigma}] < -b < A_2^2 + \bar{\sigma}$) alors la thèse du Théorème I cesse d'être vraie.

3,3. On peut construire une équation du type (1,11) (voir mon travail [9]) où la fonction $f(t)$ est bornée et pour laquelle la courbe (3,11) est contenue dans la somme des domaines correspondant aux cas W 1, W 2,1 (ou bien aux cas W 1, W 2,2) et de la portion du plan contenue entre ces domaines, (par exemple elle est contenue dans le domaine $0 < a < A_2$, $\bar{\tau} - a^2 < b < B_2$, $B_2 > 0$) dont toutes les solutions sont non-bornées. Cet exemple montre que sous ces hypothèses — plus faibles que la condition H — la thèse du Théorème I est fautive.

Cet exemple est d'ailleurs assez compliqué, ce qui s'explique aisément, étant donné que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ ne peuvent vérifier aucune des conditions 1,12 - 1,15.

3,4. La question se pose si les conditions:

1° $f(t)$ est bornée

2° la courbe (3,11) est contenue dans le rectangle $0 < A_1 < a < A_2$, $0 < B_1 < -b < B_2$ (c'est-à-dire dans la somme des domaines qui correspondent aux cas W 2,1, W 3,1 et de la portion du plan contenue entre ces domaines)

3° les dérivées $\dot{a}(t)$, $\dot{b}(t)$ ne sont pas „trop grandes” (mais cette dernière condition ne doit entraîner aucune des conditions 1,12 - 1,15)

suffisent pour que l'équation (1,11) admette exactement une solution bornée? (Et si la courbe (3,11) est contenue dans la rectangle $-A_2 < a < -A_1$, $0 < B_1 < -b < B_2$ toutes les solutions sont-elles bornées?) La réponse à cette question est à présent inconnue.

3,5. Sur les cinq domaines déterminés par (3,12) quatre sont bornés. Peut-on les remplacer — sans que les thèses des Théorèmes I et II cessent d'être vraies — par des domaines non-bornés? Par exemple remplacer le domaine correspondant au cas W 3,1 par le domaine $0 < A_1 < a < A_2$, $a^2 + \bar{\sigma} < -b$?

3,6. Il est assez probable que des hypothèses concernant les dérivées $\dot{a}(t)$ et $\dot{b}(t)$ soient nécessaires, mais il est aussi probable que les conditions du groupe B, à savoir B 2 et B 3 ne soient pas les plus faibles que l'on ait pu faire (voir par exemple les conditions (6,57) et (6,58)).

3,7. Il est important de remarquer qu'il existe des fonctions $a(t)$ et $b(t)$ qui vérifient la condition **H** et qui ne vérifient aucune des conditions 1,12-1,15.

3,8. La condition **B2** est assez compliquée. On peut introduire une autre condition qui est plus forte que **B2**, mais qui peut être d'une certaine utilité dans les applications (par exemple pour la démonstration du fait mentionné au n° 3,7).

Voici cette condition:

B2^{bis}. Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont pourvues de dérivées continues et il existe une constante $0 < \kappa < 1$ telle que

$$\kappa \tau(t) |\lambda_j(t)| \geq 2 |\dot{a}(t)|$$

$$\frac{\tau(t)}{2} \cdot \frac{\lambda_j(t)}{a(t)} \geq |\ln b^2(t)|'$$

$$1 > \frac{2 |\ln \tau^2(t)|'}{\lambda_j(t)}$$

Si $a(t) > 0$ alors il faut prendre $j = 1$.

Si $a(t) < 0$ alors il faut prendre $j = 2$.

La démonstration que **B2** est une conséquence de **B2^{bis}** est facile mais assez longue. Etant donné que la condition **B2^{bis}** est plus forte que la condition **B2**, elle peut remplacer celle-ci dans les hypothèses des Théorèmes I et II.

§ 4. QUELQUES REMARQUES SUR LA MÉTHODE DE LA DÉMONSTRATION

4.1. Posons

$$(4,11) \quad \dot{x}(t) = z(t).$$

L'équation (1,11) sera équivalente au système différentiel

$$(4,12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= z \\ \dot{z} &= b(t)x + 2a(t)z + f(t) \end{aligned}$$

Au cours de la démonstration des Théorèmes I et II nous n'allons pas employer l'équation (1,11) mais le système (4,12).

4.2. Dans le § 5 nous nous occuperons du cas W 1. Nous allons construire un tube, tel que les solutions de (4,12) en sortent et y entrent. En employant le „Théorème de rétracte” cité au n° 1,4 nous allons obtenir les Lemmes I^a et II^a.

Les paragraphes 6 et 7 sont consacrés à la construction des tubes nécessaires à l'étude des cas W 2 et W 3 respectivement. Au § 8 nous employons ces tubes. Les résultats obtenus dans les cas W 2,2 et W 3,2 sont résumés dans les Lemmes I^b et II^b et ceux qui concernent les cas W 2,1 et W 3,1 sont résumés dans les Lemmes I^c et II^c.

4.3. Deux difficultés se présentent dans la démonstration du Théorème I. Si toutes les solutions entrent dans un tube de diamètre borné (cas W 2,2 et W 3,2) il est évident qu'elles sont bornées. Mais si des solutions sortent d'un tube de diamètre borné (les autres cas) il n'en résulte pas que ces solutions ne sont pas bornées.

Dans les cas W 2,1 et W 3,1 nous surmontons cette difficulté en employant des tubes supplémentaires (analogues aux tubes employés dans la démonstration du Théorème II) dont ces solutions sortent et dont les diamètres croissent exponentiellement. Dans le cas W 1 nous surmontons cette difficulté à l'aide d'un autre raisonnement (voir n° 5,7).

Ainsi nous démontrerons que les solutions qui sortent des tubes bornées non seulement ne sont pas bornées, mais qu'elles ne sont pas ε_0 -bornées où $\varepsilon_0 > 0$ (c'est-à-dire nous démontrerons la seconde partie du Théorème I).

La seconde difficulté se présente dans les mêmes cas que la précédente (cas W 1, W 2,1 et W 3,1), non seulement dans la démonstration du Théorème I, mais aussi dans celle du Théorème II. Si une solution de (4,12) est non- ε_0 -bornée, c'est-à-dire si elle vérifie la condition

$$(4,31) \quad |x^2(t) + z^2(t)| e^{-2\varepsilon_0 t} \rightarrow +\infty$$

il n'en résulte pas que la solution correspondante $x(t)$ de (1,11) soit aussi non- ε_0 -bornée. Grâce aux raisonnements des numéros 5,7 et 8,7 nous verrons que si une solution de (4,12) vérifie la condition (4,31) alors les fonctions $x(t)$ et $z(t)$ ne sont pas ε_0 -bornées. Dans les cas W 1 et W 2,1 elles seront même non- ε_0 -bornées, c'est-à-dire qu'elles vérifieront la condition

$$x(t) e^{-\varepsilon_0 t} \rightarrow +\infty \quad z(t) e^{-\varepsilon_0 t} \rightarrow +\infty.$$

4.4. Cette partie de la démonstration (n° 5,7 et 8,7) est considérablement simplifiée par le fait que l'équation (1,11) est linéaire (la démon-

stration des généralisations pour les équations non linéaires — Théorèmes VII et VIII, voir § 10 — exige des raisonnements plus compliqués). Il en résulte que la solution générale du système (4,12) est de la forme

$$(4,41) \quad x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_3(t)$$

$$z(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + z_3(t)$$

où $x_3(t), z_3(t)$ est une solution particulière du système (4,12) et $x_j(t), z_j(t)$ ($j=1,2$) sont des solutions particulières, linéairement indépendantes du système homogène correspondant.

Les formules (4,41) montrent que le système (4,12) peut admettre: aucune solution bornée, une solution bornée, une famille à un paramètre de solutions bornées (leurs intersections avec un plan arbitraire $t = \text{const.}$ forme une droite), que des solutions bornées. La même situation se présente si l'on envisage les familles des solutions ε -bornées ou bien ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

4,5. La forme du tube dans le cas W1 (n° 5,1) est très simple. Dans les autres cas (n° 6,1 et 7,1) elle est assez compliquée — toutefois nous montrerons que l'intersection des tubes avec un plan arbitraire $t = \text{const.}$ est une ellipse.

Nous voudrions expliquer ici la méthode heuristique qui a conduit — par exemple dans le cas W3 — à la construction d'un tube approprié (voir (7,11)).

Or dans le cas W3 la condition A3 est vérifiée, donc

$$\lambda_1(t) = a(t) - i\sigma(t) \quad \lambda_2(t) = a(t) + i\sigma(t)$$

Supposons que les fonctions $a(t), b(t)$ soient des constantes, c'est-à-dire que $a(t) = a > 0$, $b(t) = b < -a^2$ et $\sigma = -a^2 - b > 0$. Supposons de plus, pour simplifier les raisonnements que $f(t) = 0$. Le système (4,12) est alors homogène et il a la forme

$$(4,51) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= z \\ \dot{z} &= bx + 2ax. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'il se ramène par la transformation

$$(4,52) \quad \begin{aligned} \xi &= ax - z \\ \zeta &= \sigma x \end{aligned}$$

à la forme canonique

$$(4,53) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi + \sigma\zeta \\ \dot{\zeta} &= -\sigma\xi + a\zeta. \end{aligned}$$

Ce système admet comme solutions les spirales

$$(4,54) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= e^{at} (c_1 \sin \sigma t + c_2 \cos \sigma t) \\ \zeta(t) &= e^{at} (-c_1 \cos \sigma t + c_2 \sin \sigma t). \end{aligned}$$

Leurs projections sur le plan (ξ, ζ) sortent de chaque cercle

$$(4,55) \quad \xi = r \cos \varphi \quad \zeta = r \sin \varphi$$

où r est fixe.

Donc dans l'espace $[\xi, \zeta, t]$ les solutions (4,54) sortent du tube (4,55) (c'est un cylindre de révolution).

La transformation réciproque à la transformation (4,52) est donnée par les formules

$$(4,56) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sigma} \zeta \\ z &= -\xi + \frac{a}{\sigma} \zeta. \end{aligned}$$

A l'aide de cette transformation le tube (4,55) dans l'espace $[\xi, \zeta, t]$ se transforme dans le tube

$$(4,57) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sigma} r \sin \varphi \\ z &= -r \cos \varphi + \frac{a}{\sigma} r \sin \varphi \end{aligned}$$

dans l'espace $[x, z, t]$ (c'est le tube donné par la formule (7,11) pour $\varepsilon = 0$).

Si nous ne supposons pas que les fonctions $a(t)$, $b(t)$ sont constantes, alors la transformation (4,52) ne ramène pas, en général, le système (4,12) en (4,53). Mais si les fonctions $a(t)$, $b(t)$ diffèrent peu des constantes (c'est-à-dire si leurs dérivées sont petites en valeurs absolues — voir la condition B3) alors il est probable que le champ des éléments linéaires définis par le système ainsi obtenu diffère localement si peu du champ des éléments définis par (4,53) que ces solutions sortent encore du tube (4,55) (de même que les spirales (4,54)). Alors il est probable que les solutions de (4,12) (qui diffèrent peu des solutions de (4,51)) sortent du tube (4,57).

Aux paragraphes 7 et 8 nous démontrerons que si la condition **B 3** est vérifiée, alors cette situation a effectivement lieu. Dans ces paragraphes nous démontrerons, de plus, que le tube (4,57) (donc le tube (7,11) pour $\varepsilon = 0$) contient un cylindre de révolution non nul, et qu'il est contenu dans un autre cylindre de révolution de diamètre fini.

C'est le même raisonnement appliqué non au tube (4,55) mais au tube

$$\xi = r e^{z'} \cos \varphi$$

$$\zeta = r e^{z'} \sin \varphi$$

qui nous conduit aux tubes employés pour la démonstration du Théorème II (si $0 < \varepsilon < a$ alors les courbes (4,54) considérées comme courbes de l'espace $[\xi, \zeta, t]$ sortent de ce tube). A l'aide de la transformation (4,56) nous sommes amenés directement au tube (7,11) pour ε quelconque.

Si la condition **A 2** est vérifiée, des raisonnements semblables nous conduisent au tube (6,11).

4,6. Dans la suite nous allons désigner par n le vecteur du champ des éléments linéaires défini par (4,12), c'est-à-dire le vecteur

$$n = (\dot{x}, \dot{z}, 1) = (z, b(t)x + 2a(t)z + f(t), 1).$$

Par N nous allons désigner le vecteur normal à la surface considérée. Il sera dirigé toujours vers la partie de l'espace qui ne contient pas la droite $x = 0 = z$. C'est-à-dire que si nous avons un tube alors N est son vecteur normal dirigé vers son extérieur.

Si le produit scalaire $n \cdot N$ est positif en un point donné du tube, alors la solution passant par ce point, sort du tube. S'il est négatif, cette solution entre dans le tube.

4,7. Remarquons que le champ des éléments linéaires défini par le système homogène correspondant au système non homogène (4,12)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \\ \dot{z} &= b(t)x + 2a(t)z \end{aligned}$$

est symétrique par rapport à la droite $x = 0 = z$.

Nos tubes seront aussi symétriques par rapport à la même droite. S'il résulte de nos hypothèses qu'une solution entre (sort) du tube donné au point $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$ qui lui appartient, alors une solution entrera (sortira) du tube au point symétrique, c'est-à-dire au point $[-\bar{x}, -\bar{z}, \bar{t}]$, qui

appartient évidemment au tube. En effet le passage du point $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$ au point $[-\bar{x}, -\bar{z}, \bar{t}]$ changera $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}$ de la même façon comme si nous avons fait changer $f(t)$ en $-f(t)$. Comme le signe de $f(t)$ est indéterminé, il en résulte que si au point $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$ nous avons $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} > 0$, alors au point $[-\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$ il est aussi $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} > 0$ (il en serait de même si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} < 0$).

Profitant de cette remarque nous nous bornerons, dans la suite, à vérifier le signe de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}$ dans un quart de l'espace, par exemple dans le quart $t > 0, z > 0$.

§ 5. LE CAS W 1 ($a^2(t) < \Delta(t)$)

5.1. Considérons les surfaces

$$\begin{aligned}
 (5,11) \quad z &= \beta e^{\varepsilon t} - \gamma x & N_I \\
 z &= \beta e^{\varepsilon t} + \gamma x & N_{II} \\
 z &= -\beta e^{\varepsilon t} - \gamma x & N_{III} \\
 z &= -\beta e^{\varepsilon t} + \gamma x & N_{IV}
 \end{aligned}$$

et leurs vecteurs normaux

où $\gamma = 12 A_2$ et les constantes $\varepsilon, \beta > 0$, seront déterminées ultérieurement.

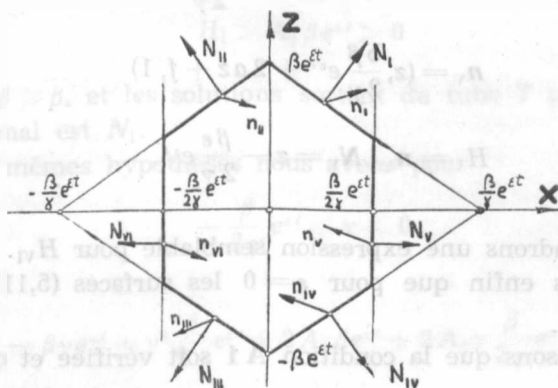


Fig. 2

Je rappelle la convention suivant laquelle les vecteurs N_j doivent être dirigés vers le demi-espace qui ne contient pas la droite $x=0=z$ (voir la figure 2 qui montre l'intersection de l'espace avec le plan $t=const.$).

Soient \mathbf{n}_j ($j = I, II, III, IV$) les vecteurs du champ (4,12) sur les surfaces (5,11) (voir la figure 2). Calculons les produits scalaires $H_j \frac{\overline{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{N}_j}}{\overline{\mathbf{N}_j}}$

$$\text{I. } z = \beta e^{\varepsilon t} - \gamma x \quad N_I = (\gamma, 1, -\beta \varepsilon e^{\varepsilon t})$$

$$n_I = (\beta e^{\varepsilon t} - \gamma x, bx + 2a(\beta e^{\varepsilon t} - \gamma x) + f, 1)$$

$$H_I = n_I \cdot N_I = \beta \gamma e^{\varepsilon t} - \gamma^2 x + bx + 2a\beta e^{\varepsilon t} - 2a\gamma x + f - \beta \varepsilon e^{\varepsilon t}$$

$$\text{II. } z = \beta e^{\varepsilon t} + \gamma x \quad N_{II} = (-\gamma, 1, -\beta \varepsilon e^{\varepsilon t})$$

$$n_{II} = (\beta e^{\varepsilon t} + \gamma x, bx + 2a(\beta e^{\varepsilon t} + \gamma x) + f, 1)$$

$$H_{II} = n_{II} \cdot N_{II} = -\beta \gamma e^{\varepsilon t} - \gamma^2 x + bx + 2a\beta e^{\varepsilon t} + 2a\gamma x + f - \beta \varepsilon e^{\varepsilon t}.$$

Nous obtiendrons des expressions semblables pour H_{III} et H_{IV} sur les surfaces $z = -\beta e^{\varepsilon t} \pm \gamma x$ (voir n° 4,7).

Considérons les surfaces

$$x = \frac{\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t} \quad N_V$$

(5,12) et leurs vecteurs normaux

$$x = -\frac{\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t} \quad N_{VI} \quad (5,13)$$

et soient n_V et n_{VI} les vecteurs du champ (4,12) sur ces surfaces.

Nous aurons

$$\text{V. } x = \frac{\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t} \quad N_V = (1, 0, -\frac{\beta \varepsilon}{2\gamma} e^{\varepsilon t})$$

$$(5,13) \quad n_V = (z, \frac{b\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t} + 2az + f, 1)$$

$$H_V = n_V \cdot N_V = z - \frac{\beta \varepsilon}{2\gamma} e^{\varepsilon t}.$$

Nous obtiendrons une expression semblable pour H_{VI} .

Remarquons enfin que pour $\varepsilon = 0$ les surfaces (5,11) et (5,12) sont des plans.

5,2. Supposons que la condition **A 1** soit vérifiée et que

$$0 < \varepsilon < \min \left[A_2, \frac{B_1}{8A_2} \right].$$

Considérons le tube T formé des six morceaux des surfaces (5,11) et (5,12). Ce tube est pourvu d'un plan tangent, variant d'une façon continue avec la position du point de contact, sauf sur ses six arêtes (ensembles d'intersection des surfaces (5,11) et (5,12)):

$$(5,21) \quad x = 0 \quad z = \pm \beta e^{z't}$$

$$(5,22) \quad x = \pm \frac{\beta}{2\gamma} e^{z't} \quad z = \pm \frac{\beta}{2} e^{z't}$$

(voir la figure 2). En employant les résultats du numéro précédent, nous aurons pour

$$0 < x < \frac{\beta}{2\gamma} e^{z't}$$

la formule

$$(5,23) \quad H_{\perp} > \beta\gamma e^{z't} - \gamma^2 \frac{\beta}{2\gamma} e^{z't} - 2A_2\beta e^{z't} - 2\gamma A_2 \frac{\beta}{2\gamma} e^{z't} + f - \beta\epsilon e^{z't} = \\ = \frac{\beta}{2} (\gamma - 6A_2 - 2\epsilon) e^{z't} + f > \frac{\beta}{2} (\gamma - 8A_2) e^{z't} + f = 2\beta A_2 e^{z't} + f.$$

Si la fonction f est ϵ -bornée pour $\epsilon > 0$, il existe pour chaque $\epsilon > 0$ un nombre β_ϵ tel que

$$(5,24) \quad |f(t)| e^{-z't} < \bar{\beta}_\epsilon A_2$$

pour tout $t \geq 0$ (voir n° 1,5).

De même si f est une fonction bornée alors il existe pour chaque $\epsilon > 0$ un nombre β_ϵ tel que la condition (5,24) soit vérifiée.

Donc

$$H_{\perp} > A_2 \beta e^{z't} > 0$$

si seulement $\beta > \bar{\beta}_\epsilon$ et les solutions sortent du tube T par la partie dont le vecteur normal est N_{\perp} .

Avec les mêmes hypothèses nous avons pour

$$-\frac{\beta}{2\gamma} e^{z't} \leq x \leq 0$$

la formule

$$(5,25) \quad H_{\parallel} < -\beta\gamma e^{z't} + \gamma^2 \frac{\beta}{2\gamma} e^{z't} + 2A_2\beta e^{z't} + 2A_2\gamma \frac{\beta}{2\gamma} e^{z't} + f - \beta\epsilon e^{z't} = \\ = -\frac{\beta}{2} (\gamma - 6A_2 + 2\epsilon) e^{z't} + f < -\frac{\beta}{2} (\gamma - 6A_2) e^{z't} + f < -2\beta A_2 e^{z't} + f.$$

Donc

$$H_{\parallel} < -\beta A_2 e^{z't} < 0$$

si seulement $\beta > \bar{\beta}_\epsilon$ les solutions entrent par la partie du tube T dont le vecteur normal est N_{\parallel} .

Par symétrie nous voyons que

$$H_{III} > 0 \text{ pour } -\frac{\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t} < x \leq 0$$

$$H_{IV} < 0 \text{ pour } 0 < x \leq \frac{\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t}.$$

5.3. Les faces „latérales” du tube T sont données par les formules (5,12). Nous avons

$$\operatorname{sgn} H_V = \operatorname{sgn} \left[z - \frac{\beta \varepsilon}{2\gamma} e^{\varepsilon t} \right].$$

Donc pour

$$-\frac{\beta}{2} e^{\varepsilon t} < z < \frac{\beta \varepsilon}{2\gamma} e^{\varepsilon t}$$

nous avons $H_V < 0$, les solutions entrent dans le tube T ; pour

$$(5,31) \quad \frac{\beta \varepsilon}{2\gamma} e^{\varepsilon t} < z < \frac{\beta}{2} e^{\varepsilon t}$$

nous avons $H_V > 0$, les solutions sortent du tube T .

5.4. Les points de la courbe

$$(5,41) \quad x = \frac{\beta}{2\gamma} e^{\varepsilon t} \quad z = \frac{\beta \varepsilon}{2\gamma} e^{\varepsilon t}$$

sont des points de glissement. Mais il est facile de vérifier que ce sont des points de glissement extérieur.

En effet la formule (5,13) montre que la troisième coordonnée du vecteur n_V est toujours positive. Nous avons

$$\frac{b\beta}{2\gamma} > \frac{B_1\beta}{2\gamma}$$

et pour $\varepsilon = 0$ si β est suffisamment grand par exemple si $\beta \geq \beta_*$, où

$$\beta_* = \frac{48 A_2^2 \beta_2}{B_1}$$

la deuxième coordonnée est positive. Pour $\varepsilon > 0$ considérons les points sur la face en question pour lesquels

$$(5,42) \quad 0 < z < \frac{\beta \varepsilon}{\gamma} e^{\varepsilon t}$$

(ces points ferment une „bande” qui contient la courbe de glissement (5,41)). Nous aurons

$$\frac{b\beta}{2\gamma} e^{z'} + 2az + f > \frac{b\beta}{2\gamma} e^{z'} - 2A_2 \frac{\beta\varepsilon}{\gamma} e^{z'} + f > \frac{\beta}{2\gamma} (B_1 - 4A_2\varepsilon) e^{z'} + f$$

Nous avons supposé que $\varepsilon < B_1 : 8A_2$. Supposons en plus que $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$. Pour des constantes β assez grandes par exemple pour $\beta \geq \beta_*$, la deuxième coordonnée de n_v est donc aussi positive dans les voisinages des points de glissement.

Sur la courbe de glissement le vecteur n_v a la direction de l'ensemble de sortie stricte.

Il s'ensuit, que si $f(t)$ est bornée et $\varepsilon \geq 0$, ou bien si $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ et $\beta \geq \beta_*$, nous sommes dans le cas de la figure 3 et les glissements sont extérieurs.

Par symétrie nous voyons que sur la face latérale de vecteur normal N_{v1} la situation est identique.

Sur les deux arêtes (5,21) nous avons des glissements des solutions, mais il est évident qu'ils sont aussi extérieurs.

Sur les quatre arêtes (5,22) il n'y a pas de glissements.

Nous voyons que tous les glissements sont des glissements extérieurs, ce qui n'empêche pas l'application du „Théorème de rétracte” (voir n° 1,4).

5.5. Supposons que la fonction $f(t)$ soit bornée. Considérons le tube T pour $\varepsilon = 0$ et $\beta \geq \beta_0$. Il se composera donc des 6 plans

$$(5,51) \quad z = \pm \beta \pm \gamma x \quad x = \pm \frac{\beta}{2\gamma}$$

Soits Ω l'intérieur du tube T .

Soit S_1 l'ensemble des points $[x, z, t]$ pour lesquels

$$0 < x < \frac{\beta}{2\gamma} \quad z = \beta - \gamma x$$

ou bien

$$x = \frac{\beta}{2\gamma} \quad 0 < z < \frac{\beta}{2}$$

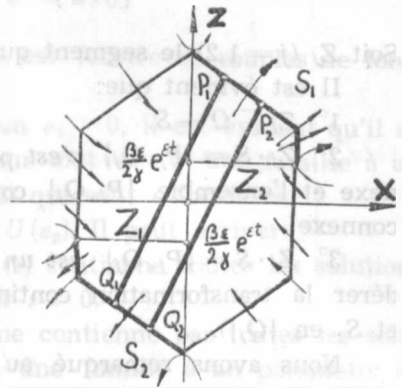


Fig. 3

Soit S_2 l'ensemble symétrique de S_1 par rapport à la droite $x=0=z$. L'ensemble $S=S_1+S_2$ est l'ensemble de sortie stricte des solutions du système (4,12) du tube T .

Soient quatre points

$$P_1 = \left[\frac{\beta}{6\gamma}, \frac{5}{6}\beta, 0 \right] \quad P_2 = \left[\frac{\beta}{3\gamma}, \frac{2}{3}\beta, 0 \right]$$

$$Q_1 = \left[-\frac{\beta}{3\gamma}, -\frac{2}{3}\beta, 0 \right] \quad Q_2 = \left[-\frac{\beta}{6\gamma}, -\frac{5}{6}\beta, 0 \right].$$

Soit Z_j ($j=1,2$) le segment qui joint P_j avec Q_j (voir la figure 3).

Il est évident que:

- 1° $Z_j \subset \Omega + S$.
- 2° $Z_j \cdot S = \{P_j, Q_j\}$ n'est pas un rétracte de Z_j (en effet Z_j est connexe et l'ensemble $\{P_j, Q_j\}$ composé de deux points distincts n'est pas connexe).
- 3° $Z_j \cdot S = \{P_j, Q_j\}$ est un rétracte de S (en effet il suffit de considérer la transformation continue qui transforme l'ensemble S_1 en $\{P_j\}$ et S_2 en $\{Q_j\}$).

Nous avons remarqué au numéro précédent qu'il n'existe que des points de glissement extérieur. Il résulte du „Théorème de rétracte” qu'il existe des solutions $[x_j(t), z_j(t)]$ du système (4,12) issues de l'ensemble Z_j ($j=1,2$) (c'est-à-dire telles que $[x_j(0), z_j(0), 0] \in Z_j$), contenues dans le tube T pour toutes les valeurs de $t > 0$, donc des solutions bornées. Étant donné que $Z_1 \cdot Z_2 = 0$ ces deux solutions sont différentes.

Du n° 4,4 il résulte que nous avons une famille à un paramètre au moins de solutions de (4,12) qui sont bornées. Nous avons donc démontré que si $f(t)$ est bornée et la condition A1 est vérifiée, il existe une famille à un paramètre au moins de solutions de l'équation (1,11) qui sont bornées et qui ont des dérivées bornées.

5,6. Supposons que la fonction $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$. Soit un nombre ε quelconque, vérifiant la condition

$$(5,61) \quad 0 < \varepsilon < \min \left[A_2, \frac{B_1}{8A_2} \right].$$

Des raisonnements pareils à ceux du numéro précédent appliqués au tube formé non pas des plans (5,51), mais des surfaces (5,11) et (5,12) pour $\varepsilon > 0$ (l'ensemble S_1 ne contient comme points de la face latérale (5,12) de vecteur normal N_1 , que la „bande” définie par (5,31)) conduisent au résultat suivant:

Pour tout ε vérifiant (5,61) il existe une famille $U(\varepsilon)$ à un paramètre au moins de solutions de (4,12) qui vérifient la condition

$$|x(t)| e^{-\varepsilon t} < M_{\varepsilon, x} \quad |z(t)| e^{-\varepsilon t} < M_{\varepsilon, z}$$

(la constante $M_{\varepsilon, x}$ dépend de la solution $[x(t), z(t)]$ considérée et de ε).

Si $[x(t), z(t)] \in U(\varepsilon)$ alors

$$|x(t)| e^{-2\varepsilon t} < M_{\varepsilon, x} e^{-\varepsilon t} \rightarrow 0$$

$$|z(t)| e^{-2\varepsilon t} < M_{\varepsilon, z} e^{-\varepsilon t} \rightarrow 0$$

et nous voyons que chaque famille $U(\varepsilon)$ est formée de couples de fonctions 2ε -bornées.

Or s'il existe une telle famille pour un $\varepsilon_1 > 0$, il est évident qu'il en existe pour tout $\varepsilon > \varepsilon_1$ donc il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une famille à un paramètre au moins de solutions de (4,12) qui sont ε -bornées.

Pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ nous avons $U(\varepsilon_1) \subset U(\varepsilon_2)$. Il peut arriver:

1) que pour tout $\varepsilon > 0$ la famille $U(\varepsilon)$ contienne toutes les solutions de (4,12). Elles sont alors ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

2) pour un $\varepsilon_0 > 0$ la famille $U(\varepsilon_0)$ ne contienne pas toutes les solutions de (4,12). Étant donné qu'elle est une famille à un paramètre au moins et vu le n° 4,4 elle forme une famille à un paramètre. L'ensemble des intersections des solutions lui appartenant et du plan $t=0$ sera alors une droite L_0 . Soit maintenant un $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Nous aurons $U(\varepsilon) \subset U(\varepsilon_0)$ et l'ensemble des intersections des éléments de $U(\varepsilon)$ et du plan $t=0$ sera une droite $L(\varepsilon)$. Il est $L(\varepsilon) \subset L_0$, donc $L(\varepsilon) = L_0$ et $U(\varepsilon) = U(\varepsilon_0)$. Nous voyons que toutes les solutions issues de la droite L_0 sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

Nous avons donc démontré que si $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ et si la condition **A1** est vérifiée, alors il existe une famille à un paramètre au moins de solutions de l'équation (1,11) qui sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$ et qui ont des dérivées ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

5,7. Supposons que la fonction $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ (rappelez qu'une fonction bornée est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$). Nous allons montrer qu'il existe alors un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et au moins une solution $[x(t), z(t)]$ de (4,12) tels que $x(t)$ et $z(t)$ soient des fonctions non- ε_0 -bornées.

Considérons les surfaces

$$(5,71) \quad z = 2 \vartheta \varepsilon e^{\varepsilon t}$$

$$(5,72) \quad x = \vartheta e^{\varepsilon t}$$

où

$$(5,73) \quad \bar{\varepsilon} = -A_2 + \sqrt{A_2^2 + \frac{B_1}{4}} > 0$$

et $\vartheta > 0$ est une constante qui sera déterminée ultérieurement.

Les vecteurs normaux de ces surfaces, dirigés comme d'habitude, vers le demi-espace ne contenant pas la droite $x=0=z$, sont donnés par les formules

$$N_1 = (0, 1, -2\vartheta\bar{\varepsilon}^2 e^{z'})$$

$$N_2 = (1, 0, -\vartheta\bar{\varepsilon} e^{z'})$$

(voir la figure 4 représentant l'intersection des surfaces (5,71) et (5,72) et du plan $t = \text{const.}$).

Les vecteurs du champ (4,12) sur les surfaces (5,71) et (5,72) sont données par les formules

$$n_1 = (2\vartheta\bar{\varepsilon} e^{z'}, bx + 4a\vartheta\bar{\varepsilon} e^{z'} + f, 1)$$

$$n_2 = (z, b\vartheta e^{z'} + 2az + f, 1)$$

respectivement.

Pour

$$\vartheta e^{z'} \leq x$$

nous aurons

$$n_1 \cdot N_1 = bx + 4a\vartheta\bar{\varepsilon} e^{z'} + f - 2\vartheta\bar{\varepsilon}^2 e^{z'}$$

$$\geq B_1 \vartheta e^{z'} - 4A_2 \vartheta\bar{\varepsilon} e^{z'} - 2\vartheta\bar{\varepsilon}^2 e^{z'} + f = \vartheta(B_1 - 4A_2\bar{\varepsilon} - 2\bar{\varepsilon}^2) e^{z'} + f.$$

Vu (5,73) nous aurons

$$B_1 - 4A_2\bar{\varepsilon} - 2\bar{\varepsilon}^2 = \frac{B_1}{2}$$

et

$$n_1 \cdot N_1 \geq \vartheta \frac{B_1}{2} e^{z'} + f$$

Si nous supposons que $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ (ou bien bornée), il existe alors (voir n° 1,5) un nombre $\vartheta > 0$ tel que

$$\frac{4}{B_1} f(t) e^{-z'} < \vartheta$$

pour tout $t \geq 0$.

Donc

$$n_1 \cdot N_1 > \frac{\vartheta B_1}{4} e^{z'} > 0$$

et pour $x \geq e^{z'}$ les solutions de (4,12) entrent par la surface (5,71) dans le demi-espace ne contenant pas la droite $x = 0 = z$.

Pareillement pour

$$2 \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'} \leq z$$

nous avons

$$n_2 \cdot N_2 = z - \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'} > 2 \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'} - \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'} = \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'} > 0$$

et pour $z \geq 2 \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'}$ les solutions de (4,12) entrent par la surface (5,72) dans le demi-espace ne contenant pas la droite $x = 0 = z$.

Donc dans le quart Ω de l'espace

$$(5,74) \quad x > \vartheta e^{z'} \quad z > 2 \vartheta \bar{\varepsilon} e^{z'}$$

il n'y a que des solutions qui entrent. Donc — par exemple — la solution issue du point $[\vartheta, 2 \vartheta \bar{\varepsilon}, 0]$ reste pour toutes les $t > 0$ dans l'intérieur de Ω , c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition (5,74) pour toutes les valeurs $t \geq 0$.

Posons $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}/2$. Nous avons montré qu'il existe au moins une solution de (1,11) qui est non- ε_0 -bornée et dont la dérivée est aussi non- ε_0 -bornée.

5,8. Moyennant le résultat du n° 4,4 et les résultats des numéros 5,5-5,7 nous avons démontré les lemmes suivants:

Lemme I^a. Si $f(t)$ est bornée et la condition A 1 est vérifiée, il existe une famille à un paramètre exactement de solutions de l'équation (1,11) qui sont bornées et qui ont des dérivées bornées.

Il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que toutes les solutions de l'équation (1,11) n'appartenant pas à cette famille soient non- ε_0 -bornées (donc ne sont pas bornées). Leurs dérivées sont aussi non- ε_0 -bornées.

Lemme II^a. Si $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ et la condition A 1 est vérifiée, il existe une famille à un paramètre exactement de solutions de l'équation (1,11) qui sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$ et qui ont des dérivées ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

Il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que toutes les solutions de l'équation (1,11) n'appartenant pas à cette famille soient non- ε_0 -bornées. Leurs dérivées sont aussi non- ε_0 -bornées.

Remarquons que ces deux lemmes contiennent un résultat qui n'entre pas dans l'énoncé des Théorèmes I et II. Ces derniers disent seule-

ment que les solutions n'appartenant pas à la famille des solutions bornées (ou bien des solutions ε -bornées pour $\varepsilon > 0$) ne sont pas ε_0 -bornées pour un nombre $\varepsilon_0 > 0$. Mais dans le cas W1 nos Lemmes disent que non seulement elles ne sont pas ε_0 -bornées (c'est-à-dire ne vérifient pas la condition $|x(t)| e^{-\varepsilon_0 t} \rightarrow 0$) mais qu'elles sont non- ε_0 -bornées (c'est-à-dire que $|x(t)| e^{-\varepsilon_0 t} \rightarrow +\infty$). De même avec leurs dérivées.

§ 6. LE TUBE DU CAS W2 ($0 < 1(t) < a^2(t)$)

6.1. Considérons maintenant le cas W2, c'est-à-dire supposons que la condition A2 soit vérifiée. Nous avons donc

$$0 < 1(t) < a^2(t)$$

et

$$\tau(t) = \sqrt{1(t)} = \sqrt{a^2(t) + b(t)}$$

et il existe des constantes positives A_2, B_1, τ telles que

$$|a(t)| < A_2 \quad 0 < B_1 < -b(t) < a^2(t) - \tau.$$

Nous savons déjà qu'il existe alors une constante A_1 telle que

$$0 < A_1 < \sqrt{B_1 + \tau} < |a(t)|$$

et nous aurons

$$0 < \tau < \tau(t) < |a(t)| < A_2.$$

Or nous avons

$$\lambda_1(t) = a(t) - \tau(t) \quad \lambda_2(t) = a(t) + \tau(t)$$

(voir (2,22)), donc

$$\operatorname{sgn} \lambda_1(t) = \operatorname{sgn} \lambda_2(t) = \operatorname{sgn} a(t) = \operatorname{const.}$$

Considérons le tube T donné par les formules

$$x = \frac{r e^{\varepsilon t}}{b(t)} (-\lambda_2(t) \cos \varphi - \lambda_1(t) \sin \varphi) \quad (6,11)$$

$$z = r e^{\varepsilon t} (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\varepsilon > 0$ ou bien $\varepsilon \geq 0$ et r est une constante positive qui sera déterminée ultérieurement.

6.2. Nous allons montrer que pour t_0 — fixe l'intersection du tube (6,11) et du plan $t = t_0$ forme une *ellipse*. Nous allons évaluer la longueur

de ses axes. En particulier pour $\varepsilon = 0$, nous allons montrer que le tube (6,11) contient un cylindre de diamètre fini.

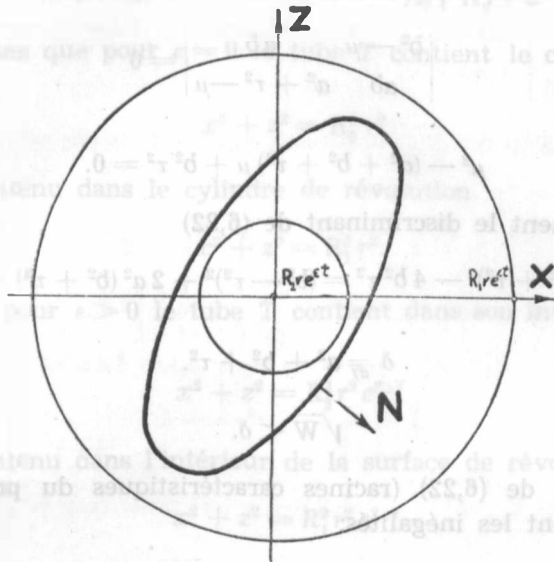


Fig. 5

Pour simplifier les calculs posons

$$\varrho = r e^{\varepsilon t}.$$

En mettant cette valeur dans (6,11) nous obtenons

$$x = \frac{\varrho}{b} (-\lambda_2 \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi)$$

$$z = \varrho (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

(Par $a, b, \lambda_1, \lambda_2$ etc. nous désignons dans ce numéro les valeurs $a(t_0), b(t_0), \lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0)$ etc.). En éliminant φ de ces équations on obtient

$$(6,21) \quad b^2 x^2 + 2 abx z + (a^2 + \tau^2) z^2 = 2 \tau^2 \varrho^2.$$

Le déterminant de la forme quadratique du premier membre de (6,21) a comme valeur

$$\begin{vmatrix} b^2 & ab \\ ab & a^2 + \tau^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 + b^2 \tau^2 - a^2 b^2 = b^2 \tau^2 > 0.$$

Nous allons montrer que les racines caractéristiques de cette forme sont positives, donc que (6,21) représente une ellipse.

En effet soit l'équation séculaire de la forme (6,21)

$$\begin{vmatrix} b^2 - \mu & ab \\ ab & a^2 + \tau^2 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$(6,22) \quad \mu^2 - (a^2 + b^2 + \tau^2)\mu + b^2\tau^2 = 0.$$

On évalue aisément le discriminant de (6,22)

$$W \frac{d^2}{d^2} (a^2 + b^2 + \tau^2)^2 - 4b^2\tau^2 = (b^2 - \tau^2)^2 + 2a^2(b^2 + \tau^2) + a^4 > A_1^4 > 0$$

Posons

$$\delta \frac{d^2}{d^2} a^2 + b^2 + \tau^2.$$

Alors

$$\sqrt{W} < \delta.$$

Donc les racines de (6,22) (racines caractéristiques du premier membre de (6,21)) vérifient les inégalités:

$$\mu_2 = \frac{\delta + \sqrt{W}}{2} < \delta$$

$$\mu_1 = \frac{\delta - \sqrt{W}}{2} = \frac{\delta - \sqrt{W}}{2} \cdot \frac{\delta + \sqrt{W}}{\delta + \sqrt{W}} = \frac{4b^2\tau^2}{4\mu_2} \geq \frac{b^2\tau^2}{\delta} > 0.$$

Les racines μ_1, μ_2 sont réelles et différentes. L'intersection (6,21) est donc en effet une ellipse.

Remarquons que

$$0 < A_1^2 < a^2 + b^2 + \tau^2 = \delta < A_2^4 + 2A_2^2.$$

Les carrés des longueurs des axes de l'ellipse (6,21) sont donnés par les formules

$$\chi_1 = \frac{2\tau^2\rho^2}{\mu_1} \quad \chi_2 = \frac{2\tau^2\rho^2}{\mu_2}.$$

Nous avons $\chi_2 < \chi_1$ et

$$\chi_1 = \frac{2\tau^2\rho^2}{\mu_1} \leq \frac{2\tau^2\rho^2\delta}{b^2\tau^2} = 2\rho^2 \frac{\delta}{b^2} \leq 2\rho^2 \frac{A_2^4 + 2A_2^2}{B_1^2}$$

$$\chi_2 = \frac{2\tau^2\rho^2}{\mu_2} \geq \frac{2\tau^2\rho^2}{\delta} \geq \frac{2\rho^2\tau^2}{A_1^2 + 2A_2^2} > 0.$$

6.3. Posons

$$(6,31) \quad R_1 \frac{2A_2}{B_1} \sqrt{A_2^2 + 2} \quad R_2 \frac{\bar{r}}{A_2 \sqrt{A_2^2 + 2}}.$$

Nous voyons que pour $\varepsilon = 0$ le tube T contient le cylindre de révolution

$$(6,32) \quad x^2 + z^2 = R_2^2 r^2$$

et qu'il est contenu dans le cylindre de révolution

$$(6,33) \quad x^2 + z^2 = R_1^2 r^2.$$

De même pour $\varepsilon > 0$ le tube T contient dans son intérieur la surface de révolution

$$(6,34) \quad x^2 + z^2 = R_2^2 r^2 e^{2\varepsilon t}$$

et qu'il est contenu dans l'intérieur de la surface de révolution

$$(6,35) \quad x^2 + z^2 = R_1^2 r^2 e^{2\varepsilon t}$$

Remarquons que pour chaque $\varepsilon \geq 0$ et pour chaque point $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$ on peut trouver un \bar{r} tel que, pour cette valeur de \bar{r} le tube T contienne ce point $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$. Si, en outre, $\bar{x}^2 + \bar{z}^2 > 0$ on peut trouver un \bar{r} tel que, pour cette valeur de \bar{r} , le tube T ne contienne pas le point $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}]$.

6.4. Soit \mathbf{N} le vecteur normal dirigé à l'extérieur de la surface (6,11) (à l'extérieur du tube T)

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}, -\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right).$$

Nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{re^{\varepsilon t}}{b} (\lambda_2 \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = re^{\varepsilon t} (-\sin \varphi + \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{re^{\varepsilon t}}{b^2} [(\dot{b}\lambda_2 - \dot{\lambda}_2 b - b\varepsilon\lambda_2) \cos \varphi + (\dot{b}\lambda_1 - \dot{\lambda}_1 b - b\varepsilon\lambda_1) \sin \varphi]$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon re^{\varepsilon t} (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Considérons le vecteur du champ (4,12) sur la surface (6,11)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\dot{x}, \dot{z}, 1) = (z, bx + 2az + f, 1) = \\ &= (re^{z'} |\cos \varphi + \sin \varphi|, re^{z'} |(2a - \lambda_2) \cos \varphi + (2a - \lambda_1) \sin \varphi| + f, 1) \end{aligned}$$

Posons

$$(6,41) \quad F(t) = \frac{f(t)}{r b(t)} e^{z'} (-\lambda_2(t) \sin \varphi + \lambda_1(t) \cos \varphi).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_1 &= 2\tau & \dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_1 &= 2\dot{\tau} \\ \lambda_2 + \lambda_1 &= 2a & \dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_1 &= 2\dot{a} \\ \lambda_2^2 - \lambda_1^2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_1) = 4a\tau \\ \lambda_2 \lambda_1 &= a^2 - \tau^2 = -b \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} b^2 X_{af} b^2 \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}}{r^2 e^{2z'}} &= 2 |\dot{b}\tau - b\dot{\tau}| \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ |-2b\tau\lambda_1 - (\dot{b}\lambda_2 - \dot{\lambda}_2 b) + 2b\tau\epsilon| \cos^2 \varphi + \\ &+ |-2b\tau\lambda_2 + (\dot{b}\lambda_1 - \dot{\lambda}_1 b) + 2b\tau\epsilon| \sin^2 \varphi + F b^2. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{b\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{b}}{b^2} = \left[\frac{\lambda_2}{b} \right]' = \left[\frac{a}{b} \right]' + \left[\frac{\tau}{b} \right]'$$

$$\frac{b\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{b}}{b^2} = \left[\frac{\lambda_1}{b} \right]' = \left[\frac{a}{b} \right]' - \left[\frac{\tau}{b} \right]'$$

$$\frac{b\dot{\tau} - \dot{b}\tau}{b^2} = \left[\frac{\tau}{b} \right]'$$

donc

$$\begin{aligned} X &= F - \frac{2\tau}{b} (\lambda_2 \sin^2 \varphi + \lambda_1 \cos^2 \varphi) + \left[\frac{a}{b} \right]' (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \frac{2\epsilon\tau}{b} + \\ &+ \left[\frac{\tau}{b} \right]' (\sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\lambda_2 \sin^2 \varphi + \lambda_1 \cos^2 \varphi = a + \tau \sin^2 \varphi - \tau \cos^2 \varphi = a - \tau \cos 2\varphi$$

et nous obtenons la formule cherchée

$$(6,42) \quad X = -\frac{2\tau a}{b} + \frac{2\varepsilon\tau}{b} + F + \frac{2\tau^2}{b} \cos 2\varphi + \left| \frac{a}{b} \right| \cos 2\varphi + \left| \frac{\tau}{b} \right| (\sin \varphi - \cos \varphi)^2.$$

Or nous avons supposé que la condition **A 2** est vérifiée, donc

$$(6,43) \quad \frac{2\tau^2}{b} \leq -\frac{2\tau^2}{b} \cos 2\varphi \leq -\frac{2\tau^2}{b} \\ - \left| \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a}{b} \right| \cos 2\varphi \leq \left| \frac{a}{b} \right|$$

et

$$(6,44) \quad \left. \begin{matrix} 0 \\ 2 \left| \frac{\tau}{b} \right| \end{matrix} \right\} \leq \left| \frac{\tau}{b} \right| (\sin \varphi - \cos \varphi)^2 \leq \left\{ \begin{matrix} 2 \left| \frac{\tau}{b} \right| \\ 0 \end{matrix} \right. \quad \text{pour} \quad \left\{ \begin{matrix} \left| \frac{\tau}{b} \right| \geq 0 \\ \left| \frac{\tau}{b} \right| < 0 \end{matrix} \right.$$

6.5. Soit $\varepsilon \geq 0$. Supposons que nous ayons le cas **W 2,2**, c'est-à-dire que les conditions **A 2**, $a < 0$ et **B 2** ($j = 2$) soient vérifiées. Alors $b < 0$ et $\lambda_2 < 0$. Donc (2,31) et (2,32) donnent

$$(6,51) \quad \varkappa \frac{\tau \lambda_2}{b} \geq \left| \frac{a}{b} \right|$$

$$(6,52) \quad \frac{\tau \lambda_2}{2b} \geq \left| \frac{\tau}{b} \right|$$

où $0 < \varkappa \leq 1$.

Soit

$$(6,53) \quad \eta = (1 - \varkappa) \frac{\tau A_1}{B_2} > 0.$$

Vu que

$$\frac{\tau \lambda_2}{b} \geq \frac{\tau A_1}{B_2}$$

(en effet $|\tau \lambda_2| = |a\tau + \tau^2| \geq |a|\tau > A_1\tau$) il s'ensuit de (6,51) que

$$(6,54) \quad -\frac{2\tau \lambda_2}{b} + \left| \frac{a}{b} \right| \leq -\frac{\tau \lambda_2}{b} + \left| \frac{a}{b} \right| \leq -\eta.$$

En ajoutant $-2\tau\lambda_2 : b$, (6,52) multipliée par 2 et (6,51) on a

$$(6,55) \quad -\frac{2\tau\lambda_2}{b} + \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| + 2 \left[\frac{\tau}{b} \right]' < -\eta.$$

Or

$$\frac{2\tau\lambda_2}{b} = \frac{2\tau a}{b} + \frac{2\tau^2}{b}$$

et

$$(6,56) \quad \frac{2\varepsilon\tau}{b} \leq 0$$

donc nous avons

$$(6,57) \quad -\frac{2\tau a}{b} - \frac{2\tau^2}{b} + \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| + 2 \left[\frac{\tau}{b} \right]' + \frac{2\varepsilon\tau}{b} < -\eta$$

$$(6,58) \quad -\frac{2\tau a}{b} - \frac{2\tau^2}{b} + \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| + \frac{2\varepsilon\tau}{b} < -\eta$$

Si la fonction $f(t)$ est bornée (ou bien ε -bornée pour $\varepsilon > 0$) alors la fonction

$$\frac{f(t)}{b(t)} \{ -\lambda_2(t) \sin \varphi + \lambda_1(t) \cos \varphi \}$$

est aussi bornée (ou bien ε -bornée pour $\varepsilon > 0$). Pour un nombre $\varepsilon \geq 0$ (ou bien $\varepsilon > 0$) fixe il existe donc un nombre $r(\varepsilon)$ tel que

$$(6,59) \quad |F(t)| < \eta \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et } r \geq r(\varepsilon)$$

(voir (6,41)).

Posons $r \geq r(\varepsilon)$ dans les formules (6,11). Alors vu (6,43), (6,44), (6,59), (6,57) dans le cas où $|\tau/b|' \geq 0$ et vu (6,58) dans le cas où $|\tau/b|' \leq 0$ il résulte de (6,42) que $X < 0$. Toutes les solutions de (4,12) qui ont un point de contact avec le tube (6,11) y entrent pourvu que $r \geq r(\varepsilon)$.

6.6. Supposons que nous ayons le cas W 2,1, c'est-à-dire que les conditions **A 2**. $a > 0$, et **B 2** ($j=1$) soient vérifiées. Alors $b < 0$ et $\lambda_1 > 0$. Donc (2,31) et (2,32) donnent

$$(6,61) \quad \kappa \frac{\tau\lambda_1}{|b|} \geq \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right|$$

$$(6,62) \quad \frac{\tau\lambda_1}{2|b|} \geq - \left[\frac{\tau}{b} \right]'$$

où $0 < \kappa < 1$

Soit

$$\eta = (1 - \alpha) \frac{\bar{\tau}}{4A_2} > 0.$$

De (6,61) il s'ensuit que

$$-\frac{2\tau\lambda_1}{b} - \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| \geq (1 - \alpha) \frac{\tau\lambda_1}{|b|}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\lambda_1 = a - \tau \geq \frac{-b}{2a}$$

donc

$$\frac{\tau\lambda_1}{|b|} \geq \frac{\tau}{2a} \geq \frac{\bar{\tau}}{2A_2}$$

et nous avons

$$-\frac{2\tau\lambda_1}{b} - \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| \geq 2\eta.$$

En ajoutant $2\tau\lambda_1 : b$, (6,62) multipliée par 2 et (6,61) nous obtenons

$$-\frac{2\tau\lambda_1}{b} - \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| + 2 \left| \left[\frac{\tau}{b} \right]' \right| \geq 2\eta.$$

Posons

$$(6,63) \quad \bar{\varepsilon} = \min \left[1, \eta \frac{B_1}{2A_2} \right].$$

Soit $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ c'est-à-dire que

$$-\eta \leq \frac{2\varepsilon\tau}{b} < \frac{2\varepsilon\tau}{b} \leq 0.$$

Or

$$\frac{2\tau\lambda_1}{b} = \frac{2\tau a}{b} - \frac{2\tau^2}{b}.$$

Donc nous avons

$$(6,67) \quad -\frac{2\tau a}{b} + \frac{2\tau^2}{b} - \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| + \frac{2\varepsilon\tau}{b} \geq \eta$$

$$(6,68) \quad -\frac{2\tau a}{b} + \frac{2\tau^2}{b} - \left| \left[\frac{a}{b} \right]' \right| + 2 \left| \left[\frac{\tau}{b} \right]' \right| + \frac{2\varepsilon\tau}{b} \geq \eta.$$

Comme au n° 6,5 nous voyons que si $f(t)$ est bornée, alors pour $\bar{\varepsilon} > \varepsilon > 0$ (et si $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ respectivement pour $\bar{\varepsilon} > \varepsilon > 0$) il existe un $\tau(\varepsilon)$ tel que pour $\tau > \tau(\varepsilon)$ nous ayons (6,59).

Posons $r \geq r(\varepsilon)$ dans les formules (6,11). Alors vu (6,43), (6,44), (6,59), (6,67) dans le cas où $|\tau/b|' \geq 0$ et vu (6,68) dans le cas où $|\tau/b|' \leq 0$ il résulte de (6,42) que $X > 0$. Toutes les solutions de (4,12) qui ont un point de contact avec le tube (6,11) en sortent pourvu que $r \geq r(\varepsilon)$.

§ 7. LE TUBE DU CAS W 3 ($\Delta(t) < 0$)

7.1. Considérons maintenant le cas W 3. Le tube employé ici est tout pareil au tube (6,11) et les raisonnements sont presque identiques à ceux du § 6. Nous nous bornerons donc dans ce paragraphe à signaler les particularités.

Supposons donc que la condition A 3 soit vérifiée. On a

$$\Delta(t) < 0$$

et les fonctions $\lambda_j(t)$ sont complexes non réelles. Nous avons posé

$$\sigma(t) = \sqrt{-\Delta(t)} = \sqrt{-a^2(t) - b(t)}.$$

Nous savons que si la condition A 3 est vérifiée il existe des constantes positives $A_1, A_2, B_1, B_2, \bar{\sigma}$ telles que

$$0 < A_1 < |a(t)| < A_2$$

$$0 < B_1 < a^2(t) + \bar{\sigma} < -b(t) < A_2^2 + \bar{\sigma} = B_2$$

$$0 < \bar{\sigma} < \sigma(t) < \sqrt{B_2}.$$

En particulier nous avons

$$b(t) < 0.$$

Considérons le tube T donné par les formules (voir le n° 4,5)

$$(7,11) \quad x = r e^{z t} \frac{1}{\sigma(t)} \sin \varphi$$

$$z = r e^{z t} \left[\frac{a(t)}{\sigma(t)} \sin \varphi - \cos \varphi \right]$$

où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\varepsilon > 0$ ou bien $\varepsilon \geq 0$ et r est une constante positive qui sera déterminée ultérieurement.

7.2. Comme dans le n° 6,2 nous allons montrer que pour t_0 fixe l'intersection du tube (7,11) et du plan $t = t_0$ forme une ellipse. Nous allons évaluer aussi la longueur de ces axes.

Pour simplifier les calculs introduisons la même notation qu'au n° 6,2, en particulier acceptons la convention

$$\varrho = r e^{s t_0}.$$

En posant cette valeur dans (7,11) nous obtenons

$$x = \frac{\varrho}{\sigma} \sin \varphi$$

$$z = \frac{\varrho}{\sigma} (a \sin \varphi - \sigma \cos \varphi)$$

et en éliminant φ de ces équations nous obtenons

$$(7,21) \quad -b x^2 - 2 a x z + z^2 = \varrho^2$$

Le déterminant de la forme quadratique du premier membre de (7,21) a la valeur

$$\begin{vmatrix} -b & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix} = -b - a^2 = \sigma^2 > \sigma^2 > 0$$

Nous allons montrer que les racines caractéristiques de cette forme sont positives, donc que (7,21) représente une ellipse.

En effet soit l'équation séculaire de la forme (7,21)

$$\begin{vmatrix} -b - \mu & -a \\ -a & 1 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

C'est-à-dire

$$(7,22) \quad \mu^2 - (1 - b) \mu + \sigma^2 = 0.$$

Or $b < 0$, donc évidemment $1 - b > 1 > 0$. Le discriminant de (7,22) est

$$W = (1 - b)^2 - 4 \sigma^2 = (1 + b)^2 + 4 a^2$$

donc

$$0 < 4 A_1^2 < (1 + b)^2 + 4 a^2 = W = (1 - b)^2 - 4 \sigma^2 < (1 - b)^2$$

Les racines de (7,22)

$$\mu_1 = \frac{1 - b - \sqrt{W}}{2} \quad \mu_2 = \frac{1 - b + \sqrt{W}}{2}$$

vérifient l'inégalité

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < 1 - b < 1 + B_2.$$

Elles sont réelles et différentes. L'intersection (7,21) est donc une ellipse μ_1 et μ_2 étant des racines de (7,22) nous avons

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \sigma^2$$

donc

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_2} > \frac{\sigma^2}{1 - b} > \frac{\sigma^2}{1 + B_2}.$$

Les carrés des longueurs des axes de l'ellipse (7,21) sont donnés par les formules

$$\chi_1 = \frac{\varrho^2}{\mu_1} \quad \chi_2 = \frac{\varrho^2}{\mu_2}.$$

Nous avons donc

$$0 < \frac{\varrho^2}{1 + B_2} < \chi_2 < \chi_1 < \frac{\varrho^2}{\sigma^2} (1 + B_2).$$

7.3. Posons

$$(7,31) \quad R_1 = \frac{\sqrt{1 + B_2}}{\sigma} \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + B_2}}.$$

Nous voyons comme au § 6 que pour $\varepsilon = 0$ le tube T contient le cylindre de révolution (6,32) et qu'il est contenu dans le cylindre (6,33). De même pour $\varepsilon > 0$ le tube T contient dans son intérieur la surface (6,34) et il est contenu dans l'intérieur de (6,35). Observons toutefois que R_1 et R_2 n'ont pas ici la signification (6,31), mais qu'ils sont définis par les formules (7,31).

7.4. Soit N le vecteur normal dirigé à l'extérieur de la surface (7,11).

$$N = \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}, -\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right),$$

Nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{r}{\sigma} e^{\varepsilon t} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{r}{\sigma} e^{\varepsilon t} (\sigma \sin \varphi + a \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{r e^{\varepsilon t}}{\sigma^2} (\sigma \varepsilon - \dot{\sigma}) \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{r e^{\varepsilon t}}{\sigma^2} [-\varepsilon \sigma^2 \cos \varphi + (\varepsilon a \sigma + \sigma \dot{a} - \dot{\sigma} a) \sin \varphi].$$

Considérons le vecteur du champ (4,12) sur la surface (7,11).

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\dot{x}, \dot{z}, 1) = (z, bx + 2az + f, 1) = \\ &= \left(\frac{re^{at}}{\sigma} |-\sigma \cos \varphi + a \sin \varphi|, \frac{re^{at}}{\sigma} |-2a\sigma \cos \varphi + (a^2 - \sigma^2) \sin \varphi| + f, 1 \right). \end{aligned}$$

Posons

$$(7,41) \quad F(t) = \frac{f(t)\sigma(t)}{re^{at}} \cos \varphi.$$

Nous avons

$$(7,42) \quad X \frac{d}{dt} \sigma^2 \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}}{r^2 e^{2t}} = \sigma(a - \varepsilon) + \dot{\sigma} \sin^2 \varphi + \frac{\dot{a}}{2} \sin 2\varphi + F.$$

Remarquons que

$$(7,43) \quad -|\dot{a}(t)| < \dot{a}(t) \sin 2\varphi \leq |\dot{a}(t)|$$

et

$$(7,44) \quad \begin{cases} 0 \\ \dot{\sigma} \end{cases} \leq \dot{\sigma} \sin^2 \varphi \leq \begin{cases} \dot{\sigma} \\ 0 \end{cases} \text{ pour } \begin{cases} \dot{\sigma} \geq 0 \\ \dot{\sigma} < 0. \end{cases}$$

7.5. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que nous ayons le cas W 3,2, c'est-à-dire que les conditions A 3, $a < 0$ et B 3 soient vérifiées. La condition B 3 (voir n^o 2,3) est la suivante

$$(7,51) \quad |\ln |a(t)||' \leq \kappa_1 \sigma(t)$$

$$(7,52) \quad \frac{1}{a(t)} |\ln \sigma^2(t)|' \geq -\kappa_2$$

où $0 < \kappa_1$, $0 < \kappa_2$, $0 < \kappa_1 + \kappa_2 < 2$.

Soit

$$(7,53) \quad \eta = (2 - \kappa_1 - \kappa_2) \frac{A_1 \bar{\sigma}}{4}.$$

De (7,51) il s'ensuit que

$$(7,54) \quad 2\sigma a + |\dot{a}| \leq (2 - \kappa_1)\sigma a < (2 - \kappa_1 - \kappa_2)\sigma a < -4\eta < 0.$$

De cette dernière formule et de (7,52) nous avons

$$(7,55) \quad 2\sigma a + 2\dot{\sigma} + |\dot{a}| \leq (2 - \kappa_1 - \kappa_2)\sigma a < -4\eta < 0.$$

Remarquons que $\sigma\varepsilon > 0$, donc en vertu de (7,54) et de (7,55) nous avons

$$(7,57) \quad \sigma(a - \varepsilon) + \dot{\sigma} + \frac{|\dot{a}|}{2} < -2\eta < 0$$

$$(7,58) \quad \sigma(a - \varepsilon) + \frac{|\dot{a}|}{2} < -2\eta < 0.$$

Si la fonction $f(t)$ est bornée (ou bien ε -bornée pour $\varepsilon > 0$) alors

$$f(t)\sigma(t)\cos q$$

est aussi bornée (ou bien ε -bornée pour $\varepsilon > 0$). Donc pour un nombre $\varepsilon \geq 0$ (ou bien $\varepsilon > 0$) fixe il existe un $r(\varepsilon)$ tel que

$$(7,59) \quad |F(t)| < \eta \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ et } r \geq r(\varepsilon)$$

(voir (7,41)).

Posons $r \geq r(\varepsilon)$ dans les formules (7,11). Alors vu (7,43), (7,44), (7,59), (7,57) pour $\sigma \geq 0$ et vu (7,58) pour $\sigma \leq 0$, il résulte de (7,42) que $X < 0$. Toutes les solutions de (4,12) qui ont un point de contact avec le tube (7,11) y entrent pourvu que $r \geq r(\varepsilon)$.

7,6. Supposons que nous ayons le cas W 3,1, c'est-à-dire que les conditions A 3, $a > 0$ et B 3 soient vérifiées.

De même qu'au n° 7,5 nous avons

$$\sigma a - \frac{|\dot{a}|}{2} > 2\eta > 0$$

$$\sigma a + \dot{\sigma} - \frac{|\dot{a}|}{2} > 2\eta > 0.$$

Posons

$$(7,63) \quad \bar{\varepsilon} = \min \left[1, \frac{\eta}{\sqrt{B_2}} \right]$$

et soit $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ (ou bien $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$). Nous voyons que

$$0 \leq \sigma\varepsilon \leq \sigma\bar{\varepsilon} < \eta.$$

Alors

$$(7,67) \quad \sigma(a - \varepsilon) - \frac{|\dot{a}|}{2} > \eta > 0$$

$$(7,68) \quad \sigma(a - \varepsilon) + \dot{\sigma} - \frac{|\dot{a}|}{2} > \eta > 0.$$

Comme dans le n° précédent, nous voyons que si $f(t)$ est bornée, pour $\varepsilon > 0$, alors il existe pour $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon > 0$ un nombre $r(\varepsilon)$ tel que pour $r \geq r(\varepsilon)$ nous ayons (7,59).

Posons $r \geq r(\varepsilon)$ dans les formules (7,11). Alors vu (7,43), (7,44), (7,59), (7,67) pour $\dot{\sigma} \geq 0$ et vu (7,68) pour $\dot{\sigma} \leq 0$, il résulte de (7,42) que $X > 0$. Toutes les solutions de (4,12) qui ont un point de contact avec le tube (7,11) en sortent, pourvu que $r \geq r(\varepsilon)$.

§ 8. LES RESULTATS OBTENUS DANS LES CAS W 2 ET W 3

8,1. Dans ce paragraphe nous allons considérer les cas W 2 et W 3 simultanément. Aux § 6 et § 7 nous avons montré que si les conditions **A 2**, $a(t) < 0$, **B 2**, sont vérifiées et si nous prenons le tube T donné par (6,11) ou si les conditions **A 3**, $a(t) < 0$, **B 3** sont vérifiées et si nous prenons le tube T donné par (7,11), alors nous obtenons le même résultat: toutes les solutions qui ont un point de contact avec le tube T , y entrent pour $r \geq r(\varepsilon)$. Le tube T contient la surface (6,32) (ou (6,34)) et il est contenu dans (6,33) (ou (6,35)). Observons toutefois que dans le cas W 2,2 les nombres R_1 et R_2 sont définis par (6,31) et dans le cas W 3,2 par (7,31).

Nous avons la même situation si $a(t) > 0$ — des numéros 6,6 et 7,6 nous voyons que si r est suffisamment grand, toutes les solutions qui ont un point de contact avec le tube T , sortent de celui-ci.

Nos notations étant dans les deux cas les mêmes, il est indifférent de considérer l'un des deux cas W 2 ou W 3.

8,2. Supposons que $a(t) < 0$ et que la fonction $f(t)$ soit bornée et posons $\varepsilon = 0$ dans les formules (6,11) ou (7,11). Soit un point $[\bar{x}, \bar{z}, 0]$. Nous pouvons choisir un $r \geq r(0)$ tel que ce point se trouve dans l'intérieur du tube. Il suffit pour cela que

$$r > \max \left[r(0), \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}}{R_2} \right].$$

La solution de (4,12) issue du point $[\bar{x}, \bar{z}, 0]$ ne pouvant sortir du tube T restera dans son intérieur, et nous aurons

$$x^2(t) + z^2(t) < R_1^2 r^2$$

donc

$$|x(t)| < R_1 r \quad |z(t)| < R_1 r.$$

Les fonctions $x(t)$ et $z(t)$ seront bornées. Mais en faisant varier le point $[\bar{x}, \bar{z}, 0]$ nous obtenons toutes les solutions de (4,12). Vu (4,11) nous avons le lemme suivant.

Lemme Ib. *Supposons que $a(t) < 0$ et que la fonction $f(t)$ soit bornée. Si les conditions A2 et B2 ou bien si les conditions A3 et B3 sont vérifiées, alors toutes les solutions de l'équation (1,11) et leurs dérivées sont bornées.*

8,5. Supposons que $a(t) < 0$ et que la fonction $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$. Soit un point $[\bar{x}, \bar{z}, 0]$ et

$$r_n = \max \left[r \left(\frac{1}{n} \right), \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}}{R_n} \right].$$

Désignons par T_n le tube (6,11) ou (7,11) pour $\varepsilon = 1/n$ et $r = r_n$.

Le point $[\bar{x}, \bar{z}, 0]$ appartient à l'intérieur de chacun des tubes T_n . La solution issue de ce point, ne pouvant sortir de ces tubes, restera pour tout $t > 0$ dans l'intérieur de chacun des tubes T_n . Donc pour chaque n

$$|x(t)| < R_1 r_n e^{t/n} \quad |z(t)| < R_1 r_n e^{t/n}.$$

Mais en faisant varier le point $[\bar{x}, \bar{z}, 0]$ nous obtenons toutes les solutions de (4,12). Des raisonnements pareils à ceux du n° 1,5 et la formule (4,11) fournissent le lemme suivant.

Lemme IIb. *Supposons que $a(t) < 0$ et que la fonction $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$. Si les conditions A2 et B2 ou bien les conditions A3 et B3 sont vérifiées, toutes les solutions de l'équation (1,11) et leurs dérivées sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.*

8,4. Supposons que $a(t) > 0$. Si la fonction $f(t)$ est bornée alors les numéros 6,6 et 7,6 montrent que toutes les solutions qui ont un point de contact avec le tube T sortent de celui-ci (pour $\varepsilon = 0$ et $r \geq r(0)$).

Soit la surface (6,11) ou (7,11) pour $r = r(0)$. Elle forme en même temps le tube T et l'ensemble de sortie stricte du tube T . Soit Ω l'intérieur du tube T et soit Z l'intersection de l'ensemble $T + \Omega$ et du plan $t = 0$. Évidemment

$$1^\circ \quad Z \subset \Omega + S.$$

2° $Z \cdot S$ n'est pas un rétracte de Z (c'est l'ellipse (6,21) ou (7,21) pour $t = 0$ et $\varrho = r(0)$).

3° $Z \cdot S$ est évidemment un rétracte de S .

Le „Théorème de rétracte” (voir n° 1,4) montre qu'il existe au moins une solution de (4,12) issue d'un point appartenant à Z et contenue dans l'intérieur du tube T pour tout $t > 0$. Mais cela signifie que

$$x^2(t) + z^2(t) < r^2(0) R_1^2$$

(voir (6,32)) et cette solution de (4,12) est bornée.

Si $f(t)$ est bornée, il existe donc au moins une solution de l'équation (1,11) qui est bornée et qui a la dérivée bornée.

8,5. Pareillement nous démontrerons que si $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$, il existe au moins une solution de l'équation (4,12) qui est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$. Pour la démonstration il faut considérer la suite des tubes T_n définis au n° 8,3.

Si $f(t)$ est ε -bornée il existe donc une solution au moins de l'équation (1,11) qui est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ et qui a la dérivée ε -bornée pour $\varepsilon > 0$.

8,6. Considérons le tube \bar{T} , donné par les formules (6,11) ou (7,11) pour $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ (où $\bar{\varepsilon}$ est donné par la formule (6,63) ou (7,63) respectivement), $r > r(\bar{\varepsilon})$. Si $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ (et à plus forte raison si $f(t)$ est bornée) alors $X > 0$ et toutes les solutions de (4,12) ayant un point de contact sortent de ce tube. Donc chaque solution issue d'un point $|\bar{x}, \bar{z}, 0|$ où

$$\bar{x}^2 + \bar{z}^2 > R_1^2 r^2$$

restera à l'extérieur de ce tube \bar{T} pour tout $t \geq 0$.

Donc

$$(8,61) \quad x^2(t) + z^2(t) > R_1^2 r^2 e^{2\lambda t}$$

et ces solutions de (4,12) ne sont pas $\bar{\varepsilon}$ -bornées.

Du n° 4,4 il s'ensuit qu'avec nos hypothèses le système (4,12) admet une solution, et une seule, qui est bornée (ou ε -bornée pour $\varepsilon > 0$). Vu le n° 1,5 il existe un nombre $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}/2$ tel que les autres solutions $|x(t), z(t)|$ de (4,12) soient non- ε_0 -bornées.

8,7. Il ne résulte pas immédiatement des raisonnements du numéro précédent que toutes les solutions de (1,11) (c'est-à-dire les fonctions $x(t)$) sauf une, ne sont pas ε_0 -bornées. De même il n'en résulte pas, que leurs dérivées (c'est-à-dire les fonctions $\dot{x}(t) = z(t)$) ne sont pas ε_0 -bornées. La relation (8,61) prouve seulement que l'une des fonctions $x(t)$ ou $z(t)$ ne peut être ε_0 -bornée.

Dans ce numéro nous allons démontrer que si $|x(t), z(t)|$ est une solution de (4,12) qui est non- ε_0 -bornée, alors la fonction $x(t)$ et la fonction $z(t)$ ne sont pas ε_0 -bornées.

Soit $|x(t), z(t)|$ une solution de (4,12) qui est non- ε_0 -bornée. Il existe donc (voir n° 1,5) un t_1 tel que

$$(8,71) \quad x^2(t) + z^2(t) > 2e^{2\varepsilon_0 t}$$

pour $t \geq t_1$.

1°. Supposons que $x(t)$ soit ε_0 -bornée. Il existe alors un $t_2 \geq t_1$ tel que

$$(8,72) \quad |x(t)| < e^{\varepsilon_0 t}$$

pour $t \geq t_2$. Alors, pour les mêmes valeurs de t

$$|z(t)| > e^{\varepsilon_0 t}$$

Donc $z(t) > e^{\varepsilon_0 t}$ ou bien $z(t) < -e^{\varepsilon_0 t}$. Mais (4,11) montre qu'il est alors pour $t \geq t_2$

$$x(t) > \frac{1}{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 t} - C$$

ou

$$x(t) < \frac{1}{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 t} + C$$

(où C est une constante). Vu que $\varepsilon_0 < \bar{\varepsilon} < 1$ ces dernières formules sont en contradiction avec (8,72) et la fonction $x(t)$ ne peut pas être ε_0 -bornée.

2°. Supposons maintenant que $z(t)$ soit ε_0 -bornée. Soit

$$(8,73) \quad s = \min \left[1, \frac{B_1}{3A_2 + \varepsilon_0 + 1} \right] > 0.$$

Il existe alors un $t_3 \geq t_1$ tel que

$$(8,74) \quad |z(t)| < se^{\varepsilon_0 t}$$

De (8,71) nous avons

$$|x(t)| > e^{\varepsilon_0 t}.$$

Si nous supposons que $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ (et à plus forte raison si $f(t)$ est bornée) il existe un $t_4 \geq t_3$ tel que

$$|f(t)| < se^{\varepsilon_0 t}$$

pour $t \geq t_4$.

Vu les formules (4,12) et (8,74) nous aurons

$$\left| \dot{z} - bx \right| < \left| \dot{z} - bx \right| = 2az + f < (2A_2s + s)e^{s_0 t}.$$

Or

$$|bx| > B_1 e^{s_0 t}$$

donc

$$\dot{z} > |B_1 - s(2A_2 + 1)| e^{s_0 t}$$

et (de même que sous 1°)

$$|z(t)| > \frac{1}{\varepsilon_0} |B_1 - s(2A_2 + 1)| e^{s_0 t} - C$$

(où C est une constante) pour tous les nombres $t > t_1$. En vertu de (8,73) notre dernière formule est en contradiction avec (8,74). La fonction $z(t)$ ne peut pas être ε_0 -bornée.

Nous avons démontré que dans les cas W 2,1 et W 3,1 toutes les solutions — sauf une — de l'équation (1,11) et leurs dérivées, ne sont pas ε_0 -bornées. On peut montrer que dans le cas W 3,1 la fonction $x(t)$ étant oscillante, ne saurait être non- ε_0 -bornée.

8,8. Les résultats des numéros 8,4, 8,5 et 8,7 fournissent les lemmes suivants:

Lemme I^c. *Supposons que $a(t) > 0$ et que la fonction $f(t)$ soit bornée. Si les conditions A 2 et B 2 ou si les conditions A 3 et B 3 sont vérifiées, il existe une seule solution bornée de l'équation (1,11). Sa dérivée est aussi bornée.*

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que toutes les autres solutions, ainsi que leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées (donc ne soient pas bornées).

Lemme II^c. *Supposons que $a(t) > 0$ et que la fonction $f(t)$ soit ε -bornée pour $\varepsilon > 0$. Si les conditions A 2 et B 2 ou bien si les conditions A 3 et B 3 sont vérifiées, il existe une seule solution ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ de l'équation (1,11). Sa dérivée est aussi ε -bornée $\varepsilon > 0$.*

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que toutes les autres solutions, ainsi que leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées.

Ainsi nous avons achevé la démonstration du Théorème I et du Théorème II.

§ 9. L'ÉQUATION HOMOGENÈME ET AUTRES CAS ANALOGUES

9,1. Dans les paragraphes 2-8 nous avons étudié l'équation (1,11) en supposant que $f(t)$ est bornée ou bien que $f(t)e^{-s_0 t} \rightarrow 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Dans ce paragraphe-ci nous allons rapidement étudier les cas où

$f(t)$ vérifie des conditions plus fortes: $f(t) \rightarrow 0$ ou $f(t) \equiv 0$ (c'est-à-dire le cas où l'équation (1,11) est homogène). Dans le n° 9,9 nous allons étudier les conséquences qui découlent de l'hypothèse que $f(t)e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \rightarrow 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$.

Étant donné que les démonstrations des résultats acquis dans ces cas sont analogues à celles des Théorèmes I et II du § 4-8, nous n'indiquons que les modifications nécessaires.

9.2. Supposons donc que l'équation (1,11) soit *homogène*, c'est-à-dire que $f(t) \equiv 0$. Elle a alors la forme

$$(9,21) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = 0.$$

La fonction $f(t) \equiv 0$ est évidemment bornée et les solutions de (9,21) — si nous supposons la condition H remplie — vérifient la thèse du Théorème I, c'est-à-dire qu'il existe une famille à k paramètres de solutions qui sont bornées et qui ont des dérivées bornées. Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que les autres solutions et leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées.

Mais si $f(t) \equiv 0$ nous pouvons démontrer un théorème qui donne un résultat plus fort.

Théorème III. *Si la condition H est vérifiée, on peut trouver un $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'il existe une famille à k paramètres de solutions de (9,21) qui sont ε_0 -bornées. Leurs dérivées sont aussi ε_0 -bornées.*

Les autres solutions et leurs dérivées ne sont pas ε_0 -bornées.

Ce théorème montre que si la condition H est remplie il existe une famille à k paramètres de solutions qui vérifient les conditions

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{\varepsilon_0 t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)e^{\varepsilon_0 t} = 0$$

pour un $\varepsilon_0 > 0$ (c'est-à-dire elles tendent exponentiellement avec leurs dérivées vers zéro) et pour les autres solutions les expressions

$$(9,22) \quad |x(t)|e^{-\varepsilon_0 t} \quad |\dot{x}(t)|e^{-\varepsilon_0 t}$$

ne tendent pas vers zéro (et même on peut montrer que ces expressions ne seront pas bornées). Remarquons que dans les cas W 1 et W 2 il existera même un $\varepsilon_0 > 0$ tel que les expressions (9,22) tendent vers $+\infty$.

9.3. Démonstration. La seconde partie du Théorème III étant une conséquence du Théorème I, il suffit de démontrer la première.

Cas W 1. Considérons le tube T défini au n° 5,1. La relation (5,23) montre que l'on a pour $\varepsilon < 0$

$$H_I \geq \frac{\beta}{2} (\gamma - 6A_2 - 2\varepsilon) e^{z't} > 2\beta A_2 e^{z't} > 0.$$

De même il résulte de (5,25) que

$$H_{II} \leq -\frac{\beta}{2} (\gamma - 6A_2 + 2\varepsilon) e^{z't} < -2\beta A_2 e^{z't} < 0$$

pourvu que $-A_2 = -\bar{\varepsilon} < \varepsilon$.

Par la partie du tube T dont le vecteur normal est N_I les solutions en sortent et elles y entrent par la partie de vecteur normal N_{II} pourvu que $\varepsilon > -\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon} > 0$).

Les résultats des numéros 5,3 et 5,4 resteront valables pour $\varepsilon \geq -\bar{\varepsilon}$. Seulement au lieu de la „bande” (5,42) nous considérons l'ensemble des points de la face latérale vérifiant la condition

$$\frac{\beta \varepsilon}{\gamma} e^{z't} < z < 0.$$

De même qu'au n° 5,5, il existe donc une famille à un paramètre au moins de solutions de (4,12) qui restent dans le tube T pour $\varepsilon = -\bar{\varepsilon}$. Si nous posons $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}/2$, alors les solutions correspondantes de (1,11) et leurs dérivées sont $-\varepsilon_0$ -bornées. Du Théorème I (ou bien des résultats du n° 5,7) il s'ensuit que cette famille est à un paramètre exactement.

Cas W 2.2. Les formules (6,54) et (6,55) ne dépendent pas de ε , elles sont donc valables pour ε quelconque (positif, nul ou négatif). La formule (6,56) n'est plus vraie pour $\varepsilon < 0$. Mais si

$$\bar{\varepsilon} < \frac{\eta}{4} \cdot \frac{B_1}{A_2}$$

alors

$$0 < \frac{2\bar{\varepsilon}\tau}{-b} < \frac{\eta}{2}$$

et nous aurons (comme dans les formules (6,57) et (6,58))

$$-\frac{2\tau a}{b} - \frac{2\tau^2}{b} + \left\| \left[\frac{a}{b} \right] \right\| + 2 \left[\frac{\tau}{b} \right] + \frac{2\bar{\varepsilon}\tau}{b} < -\frac{\eta}{2}$$

$$-\frac{2\tau a}{b} - \frac{2\tau^2}{b} + \left\| \left[\frac{a}{b} \right] \right\| + \frac{2\bar{\varepsilon}\tau}{b} < -\frac{\eta}{2}.$$

Nous aurons donc $X < 0$ (voir (6,42), (6,43), (6,44)). Si $f(t) \equiv 0$ et $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, les solutions de (4,12) entrent dans le tube (6,11) pour chaque r . Donc toutes les solutions de (9,21) et leurs dérivées sont $-\varepsilon_0^*$ -bornées ($\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}/2$).

Cas W 3.2. Supposons que

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\sqrt{B_2}}$$

(donc $0 < \varepsilon \sigma \leq \eta$). En tenant compte des relations (7,53), (7,54), (7,55) nous avons des formules analogues aux formules (7,57) et (7,58)

$$\sigma(a + \varepsilon) + \dot{\sigma} + \frac{\dot{a}}{2} < -\eta < 0$$

$$\sigma(a + \varepsilon) + \frac{\dot{a}}{2} < -\eta < 0$$

et $X < 0$, donc toutes les solutions entrent dans le tube (7,11), pour $\varepsilon = -\varepsilon$ et r quelconque. Toutes les solutions de (1,11) et leurs dérivées sont $-\varepsilon_0$ -bornées ($\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}/2$).

Dans le cas W 2,1 et W 3,1 la démonstration résulte immédiatement du Lemme Ic. L'unique solution bornée dont l'existence résulte de ce lemme a dans notre cas la forme $x(t) \equiv 0$, donc elle est ε -bornée pour $\varepsilon \rightarrow -\infty$. Ce qui achève la démonstration.

9,4. Etant donné que la différence de deux solutions de (1,11) vérifie l'équation (9,21) nous avons le théorème.

Théorème IV. Si la condition H est vérifiée, alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour chaque solution $x^*(t)$ de l'équation (1,11) il existe une famille à k paramètres de solutions $x(t)$ de (1,11) telles que les différences

$$|x^*(t) - x(t)|, \quad |\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)|$$

soient des fonctions $-\varepsilon_0$ -bornées.

Pour les solutions n'appartenant pas à cette famille, ces différences ne sont pas ε_0 -bornées.

9,5. Supposons que la fonction $f(t)$ vérifie la condition

$$(9,51) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

Nous aurons le théorème suivant

Théorème V. *Si les conditions H et (9,51) sont vérifiées, il existe une famille à k paramètres de solutions de l'équation (1,11) qui tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment. Leurs dérivées se comportent de même.*

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$, tel que les autres solutions et leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées.

9.6. Démonstration. La seconde partie du Théorème V est une conséquence immédiate du Théorème I étant donné que si $f(t) \rightarrow 0$, la fonction continue $f(t)$ est bornée dans $\langle 0, +\infty \rangle$.

La démonstration de la première partie de ce théorème bien que différente de celle du Théorème I en est assez analogue.

Cas W 1. Considérons le tube défini au n° 5,1 pour $\varepsilon = 0$. Vu (5,23) et (5,25) nous aurons

$$H_I \geq \frac{\beta}{2}(\gamma - 6 A_2) + f > 2\beta A_2 + f$$

$$H_{II} < -\frac{\beta}{2}(\gamma - 6 A_2) + f < -2\beta A_2 + f.$$

Nous avons supposé que la condition (9,51) est vérifiée, donc pour chaque δ il existe un $t(\delta)$ tel que si $t \geq t(\delta)$ alors

$$|f(t)| < \delta$$

Si $\beta A_2 \geq \delta$, — par exemple pour fixer les idées si

$$\beta = \frac{\delta}{A_2}$$

alors pour $t \geq t(\delta)$ la face du tube T de vecteur normal N_I est composée des points de sortie stricte des solutions de (4,12) du tube T (et la face de vecteur normal N_{II} est composée des points d'entrée stricte).

Les résultats obtenus aux numéros 5,3 et 5,4 sur la sortie et le glissement des solutions sur les faces (5,12) restent vrais aussi avec les hypothèses de ce numéro.

En appliquant des raisonnements analogues à ceux du n° 5,5 ainsi que le „Théorème de rétracte“ nous pouvons montrer qu'il existe au moins une solution (et même qu'il existe au moins deux solutions) $[x_1(t), z_1(t)]$ de (4,12) qui restera dans le tube T pour $\varepsilon = 0$, $\beta = \delta A_2$, $\gamma = 12 A_2$ et $t \geq t(\delta)$. Le tube T est contenu dans le cylindre de révolution

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{\delta}{A_2}\right)^2$$

Il s'ensuit que pour $t \geq t(\delta)$ nous aurons

$$|x_1(t)| \leq \frac{\delta}{A_1} \quad |z_1(t)| \leq \frac{\delta}{A_2}$$

Vu le Théorème IV pour chaque $\delta > 0$ il existe une famille $U(\delta)$ à un paramètre de solutions $|x(t), z(t)|$ de (4,12) pour lesquelles

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \frac{\delta}{A_1} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |z(t)| \leq \frac{\delta}{A_2}$$

Les solutions n'appartenant pas à $U(\delta)$ sont non bornées (et même non- ε_0 -bornées pour un $\varepsilon_0 > 0$). Le système (4,12) étant linéaire les éléments de la famille $U(\delta)$ sont issus d'une droite L_i du plan $t=0$. Il s'ensuit que $L_{i_1} = L_{i_2}$ et $U(\delta_1) = U(\delta_2)$ pour $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$.

Donc chaque élément de la famille $U(\delta)$ vérifie la condition

$$(9,61) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

Nous avons démontré l'existence d'une famille à un paramètre de solutions de (1,11) qui vérifient la condition

$$(9,62) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$$

9,7. Cas W 2,1. Considérons le tube (6,11) pour $\varepsilon = 0$. Soit η définie par (6,53). Pour chaque $\delta > 0$ il existera un $t(\delta)$ tel que la fonction définie par (6,41) vérifie pour $r = \delta$ et $t \geq t(\delta)$ la condition

$$F(t) = \frac{f(t)}{\delta |b(t)|} - \lambda_2(t) \sin \varphi + \lambda_1(t) \cos \varphi < \eta.$$

En raisonnant comme aux § 6 et 8 on voit que pour chaque $\delta > 0$ il existe une seule solution de (4,12) qui reste pour $t \geq t(\delta)$ dans l'intérieur du tube T (pour $\varepsilon = 0$ et $r = \delta$). Cette unique solution est évidemment la même que l'unique solution bornée dont l'existence est assurée par le Théorème I.

Cette unique solution bornée vérifiera donc pour chaque $\delta > 0$ et tout $t \geq t(\delta)$ la condition

$$|x(t)| \leq R_1 \delta \quad |z(t)| \leq R_1 \delta$$

(où R_1 est défini par (6,31)) donc elle vérifie la condition (9,61).

Cas **W 3,1**. Les raisonnements sont les mêmes (nous employons non pas le tube (6,11) mais le tube (7,11)).

Pour démontrer ce théorème dans le cas **W 2,2** ou bien dans le cas **W 3,2** il faut introduire le tube (6,11) ou (7,11) et employer des raisonnements analogues à ceux du n° 8,2.

9,8. On peut se demander si les hypothèses du Théorème I (qui sont plus faibles que celles du Théorème V) ne suffisent pas pour que la thèse du Théorème V soit vérifiée. Autrement dit, si la condition **H** est vérifiée et $f(t)$ est bornée, existe-il une famille à k paramètres de solutions de (1,11) qui vérifient la condition (9,62).

La réponse est négative. Considérons, par exemple, l'équation

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 5$$

qui vérifie la condition **H** (cas **W 2,1**) et où la fonction $f(t) \equiv 5$ est bornée.

Elle a comme solution générale

$$\ddot{x}(t) = 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$$

Toutes les solutions sont bornées, mais aucune ne tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

9,9. Considérons l'équation

$$(9,91) \quad \ddot{x} - 2a_1(t)\dot{x} - b_1(t)x = f_1(t)$$

où les fonctions $a_1(t)$, $b_1(t)$, $f_1(t)$ sont définies et continues pour $t \geq 0$ et la fonction $f_1(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > \omega$, c'est-à-dire que la condition

$$(9,92) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) e^{-(\omega + \varepsilon)t} = 0$$

est vérifiée pour $\varepsilon_1 > 0$.

La transformation

$$x = y e^{-\omega t}$$

conduit à l'équation

$$(9,93) \quad \ddot{y} - 2|a_1(t) - \omega|\dot{y} - |b_1(t) + 2\omega a_1(t) - \omega^2| y = f_1(t) e^{-\omega t}$$

Posons

$$a(t) = a_1(t) - \omega$$

$$b(t) = b_1(t) + 2\omega a_1(t) - \omega^2$$

$$f(t) = f_1(t) e^{-\omega t}$$

Nous voyons que $f(t)$ est ε -bornée pour $\varepsilon > 0$.

Si $a(t)$ et $b(t)$ vérifient la condition **H**, il existe une famille à k paramètres de solutions de l'équation (9,93) qui sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$ (leurs dérivées sont aussi ε -bornées pour $\varepsilon > 0$). Donc il existe une famille à k paramètres de solutions de (9,91) qui vérifient la condition

$$(9,94) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-(\omega + \varepsilon)t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-(\omega + \varepsilon)t} = 0$$

pour chaque $\varepsilon_1 > 0$. (Ils sont donc avec leurs dérivées ε -bornées pour $\varepsilon > \omega$).

Bien que

$$\Delta(t) = a^2 + b = (a_1 - \omega)^2 + b_1 + 2\omega a_1 - \omega^2 = a_1^2 + b_1 \frac{\Delta_1(t)}{a_1^2}$$

il serait trop compliqué de donner ici les conditions que doivent vérifier les fonctions $a_1(t)$, $b_1(t)$ pour que les fonctions $a(t)$, $b(t)$ satisfassent la condition **H**. Il n'y a qu'un cas particulier assez simple pour le formuler en théorème.

Théorème VI. Soit l'équation

$$\ddot{x} - b_1(t)x = f_1(t)$$

où $f_1(t)$ vérifie la condition (9,92). S'il existe une constante positive B telle que

$$b_1(t) > \omega^2 + B$$

alors il existe une famille à un paramètre exactement de solutions qui vérifient la condition (9,94) pour chaque $\varepsilon_1 > 0$ (c'est-à-dire sont ε -bornées pour $\varepsilon > \omega$). Leurs dérivées ont la même propriété.

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel, que les autres solutions et leurs dérivées ne vérifient pas la condition (9,94) pour $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ (c'est-à-dire ne sont pas $\omega + \varepsilon_0$ -bornées).

§ 10. L'ÉQUATION NON LINÉAIRE.

10.1. Considérons l'équation non linéaire

$$(10,11) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = g(x, \dot{x}, t) + f(t)$$

où les fonctions $a(t)$, $b(t)$ vérifient la condition **H** et la fonction $g(x, z, t)$ vérifie la condition suivante:

C. La fonction $g(x, z, t)$ est définie et continue dans le demi-espace

$$E = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times \langle 0, +\infty \rangle.$$

Il existe une fonction $g_1(t)$ telle que

$$|g(x, z, t)| < g_1(t) \sqrt{x^2 + z^2}$$

pour toutes les valeurs de x, z et tout $t > 0$, et

$$(10,12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = 0$$

Par chaque point de E ne passe qu'une solution unique de (10,11).

Si la condition C est vérifiée, on peut dire que l'équation non linéaire (10,11) „diffère peu“ de l'équation linéaire (1,11). Dans la suite nous allons voir que les résultats obtenus pour les équations qui „diffèrent peu“ des équations linéaires, sont presque les mêmes que les résultats obtenus pour celles-ci.

Lemme VII. Supposons que $f(t)$ soit bornée et que $g(x, z, t)$ vérifie la condition C. Alors

a) Si les conditions A 2, $a(t) < 0$ et B 2 ou bien si les conditions A 3, $a(t) < 0$ et B 3 sont vérifiées, alors chaque solution de l'équation (10,11) est bornée.

b) Si la condition A 1 est vérifiée, alors il existe une famille de solutions bornées de (10,11). L'intersection de leur ensemble et du plan $t=0$ forme un ensemble V non-borné de dimension (de Menger) au moins égal à 1. Son complément CoV est de dimension 2.

c) Si les conditions A 2, $a(t) > 0$ et B 2 ou bien si les conditions A 3, $a(t) > 0$ et B 3 sont vérifiées, il existe au moins une solution de (10,11) qui est bornée. Il existe un $\bar{\varrho}$ tel que toutes les solutions vérifiant la condition initiale

$$x^2(0) + \dot{x}^2(0) > \bar{\varrho}^2$$

soient non-bornées.

d) Toutes les solutions bornées ont des dérivées bornées. Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que les solutions non-bornées ainsi que leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées. (Si la condition A 1 ou la condition A 2 est vérifiée elles sont même non- ε_0 -bornées).

10.2. Démonstration. La démonstration est analogue à celle des paragraphes 5-8. La différence est due au fait que grâce à l'introduction de la fonction $g(x, \dot{x}, t)$. L'équation (10,11) n'est pas linéaire (c'est aussi pourquoi les résultats obtenus sont plus faibles qu'aux § 2).

Dans ce paragraphe nous nous bornons à indiquer rapidement les parties de la démonstration qu'il faut compléter.

En posant $\dot{x}(t) = z(t)$ nous voyons que le système (généralisant le système (4,12))

$$(10,21) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= z \\ \dot{z} &= b(t)x + 2a(t)z + g(x, z, t) + f(t) \end{aligned}$$

est équivalent à l'équation (10,11).

Soit T un tube contenu dans l'intérieur de la surface de révolution

$$x^2 + z^2 = \eta^2(t)$$

(où $\eta(t)$ soit une fonction définie continue et positive pour $t \geq 0$). Alors

$$(10,22) \quad g(x, z, t) \Big|_{|x, z, t| \in T} < g_1(t) \sqrt{x^2 + z^2} \Big|_{|x, z, t| \in T} < g_1(t) \eta(t).$$

Cas W1. Considérons le tube T défini au n° 5,1 avec $\varepsilon = 0$. De même qu'au n° 5,2 (voir (5,23) et (5,25))

$$H_I > \frac{\beta}{2} (\gamma - 8A_2) + g + f > 2\beta A_2 + g + f$$

$$H_{II} < -\frac{\beta}{2} (\gamma - 6A_2) + g + f < -2\beta A_2 + g + f$$

où $g = g(x, z, t)$ est pris sur les surfaces (5,11).

Etant donné les formules (5,24) pour $\beta \geq \beta_0$, (10,22) et l'hypothèse (10,12) nous voyons qu'il existe un β et un t tels que pour $\beta > \beta$ et $t \geq t$

$$(10,23) \quad |f(t) + g(x, z, t)| \Big|_{|x, z, t| \in T} < |f(t) + g_1(t)\beta| < \beta A_2$$

Le reste des raisonnements sera le même qu'aux numéros 5,3, 5,4, 5,5, 5,7. Mais les résultats du n° 4,4 ne peuvent être utilisés, le système (10,21) n'étant pas linéaire.

On serait porté à croire qu'il suffirait de supposer que $g_1(t)$ est borné et de satisfaire à l'inégalité (10,23) en choisissant γ suffisamment grand. Mais alors (comme on le voit aisément en généralisant les raisonnements du n° 5,4) il pourrait arriver que sur la droite $z = 0$ $x = \beta/2$ le glissement serait intérieur, ce qui empêcherait l'application du „Théorème de rétracte“. D'ailleurs — comme on peut le montrer à l'aide d'exemples — l'hypothèse que $g_1(t)$ est bornée ne suffit pas pour qu'il existe une famille infinie de solutions bornées (si les fonctions a et b vérifient la condition A1).

Cas **W 2**. Considérons le tube T donné par la formule (6,11) pour $\varepsilon > 0$ et posons

$$F(t) = \frac{f(t) + g(x, z, t)|_{|x, z, t| \leq r}}{r b(t) e^{\varepsilon t}} (-\lambda_2(t) \sin \varphi + \lambda_1(t) \cos \varphi)$$

(comparer avec la formule (6,41)). Nous avons

$$F(t) < \frac{4 A_2}{B_1} \left[\frac{f(t)}{r e^{\varepsilon t}} + R_1 g_1(t) \right].$$

Soit $\varepsilon = 0$. Pour chaque $\eta > 0$ — par exemple pour η , définie par (6,53) — il existe un t_1 et un $r(0)$ tels que pour $t \geq t_1$ et $r \geq r(0)$ la condition (6,59) sera vérifiée. Le reste des raisonnements du § 6 ne change pas.

Dans le cas **W 3**, nous obtenons les mêmes résultats en utilisant le tube T considéré au § 7.

Ainsi nous pouvons obtenir des résultats analogues à ceux du § 8. Etant donné que nous ne pouvons utiliser les résultats du n° 4,3 (l'équation 10,11 n'est pas linéaire) ces raisonnements ne pourront pas nous informer sur le nombre précis des solutions bornées.

Mais si l'équation (10,11) est linéaire (c'est-à-dire si $g(x, z, t) = 0$) alors en appliquant les résultats du n° 4,4 au Lemme VII nous obtenons immédiatement le Théorème I.

10,5. On peut donner au Lemme VII une forme plus concise, mais ne contenant pas tous les résultats de ce Lemme (k aura ici la même signification qu'au n° 2,4).

Théorème VII. Si $f(t)$ est une fonction bornée et les conditions **H, C** sont vérifiées, il existe une famille non vide de solutions de l'équation (10,11) qui sont bornées et qui ont des dérivées bornées.

L'ensemble de solutions de cette famille forme dans l'espace $|x, z, t|$ (où $z = \dot{x}$) un ensemble U à $k + 1$ dimensions (de Menger) au moins. Si $k = 2$, l'ensemble $\text{Co}U$ est vide, si $k < 2$ il existe des solutions non-bornées et la dimension de $\text{Co}U$ est égale à 3.

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que les solutions non-bornées (si elles existent) et leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées.

Ce théorème est une généralisation du Théorème I.

Évidemment on pourrait énoncer d'autres théorèmes analogues. Par exemple si nous supposons que $f(t) \rightarrow 0$ (pour $t \rightarrow +\infty$) toutes les solutions bornées de l'équation (10,11) (dont il est question dans le Théorème VII) tendent vers zéro quand t croît indéfiniment (ce qui généralise le Théorème V).

10.4. Des raisonnements analogues, bien que plus longs et plus compliqués, conduisent au théorème suivant:

Théorème VIII. Si $f(t)$ est une fonction ε -bornée pour $\varepsilon > 0$ et les conditions H, C sont vérifiées, il existe une famille non vide de solutions de l'équation (10,11) qui sont ε -bornées pour $\varepsilon > 0$ et ont des dérivées ε -bornées pour $\varepsilon > 0$.

L'ensemble de solutions de cette famille forme dans l'espace $|x, z, t|$ (où $z = \dot{x}$) un ensemble U à $k + 1$ dimensions (de Menger). Si $k = 2$ l'ensemble CoU est vide, si $k < 2$, il existe des solutions qui ne sont pas ε -bornées et la dimension de CoU est égale à 3.

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que les solutions qui ne sont pas ε -bornées pour $\varepsilon \leq 0$ (si elles existent) et leurs dérivées ne soient pas ε_0 -bornées.

Ce Théorème généralise le Théorème II.

10.5. Soit l'équation non linéaire

$$(10.51) \quad \ddot{x} - |2a(t) + a_2(x, \dot{x}, t)| \dot{x} - |b(t) + b_2(x, \dot{x}, t)| x = g(x, \dot{x}, t) + f(t)$$

Supposons que les fonctions $a(t)$, $b(t)$ vérifient la condition H, que la fonction $g(x, z, t)$, vérifie la condition C, que les fonctions continues $a_2(x, z, t)$, $b_2(x, z, t)$ vérifient la condition

$$a_2^2(x, z, t) + b_2^2(x, z, t) < c(t)$$

où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

et par chaque point de E ne passe qu'une solution unique de (10,51).

Posons

$$G(x, z, t) = g(x, z, t) + a_2(x, z, t)z + b_2(x, z, t)x$$

Or nous voyons que la fonction $G(x, z, t)$ vérifie la condition C, donc si $f(t)$ est bornée (ou ε -bornée pour $\varepsilon > 0$) alors le Lemme VII et les Théorèmes VII et VIII sont vrais pour l'équation

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = G(x, \dot{x}, t) + f(t)$$

ce qui permet d'évaluer le nombre des solutions bornées (ou bien ε -bornées pour $\varepsilon > 0$) de l'équation (10,51).

10.6. Il est fort probable que les résultats obtenus dans ce travail soient vrais pour des équations linéaires (ou pour des équations qui „diffèrent peu” des équations linéaires) d'ordre n . (Remarquons que pour $n = 1$

des résultats analogues aux résultats de ce travail se laissent déduire élémentairement).

Ces résultats devraient admettre aussi des généralisations aux systèmes d'ordre n (le système (4,12) en est un cas particulier pour $n = 2$).

Le plus difficile serait de trouver une généralisation appropriée de la condition H. En tout cas cette condition devrait assurer que les solutions $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ de l'équation séculaire généralisant (2,21) soient distinctes et que leurs parties réelles ne changent pas de signe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Ascoli *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità* Atti. Accad. Linzei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), 9, (1950) p. 210—213.
- [2] R. Bellman *A survey of the Theory of the Boudness, Stability and Assymptotic Behavior of Solutions of Linear and Nonlinear Differential and Difference Equations* Washington 1949.
- [3] C. Kuratowski *Topologie* Warszawa 1952.
- [4] D. C. Lewis *Inequalities for complex linear differential systems of the second order* Proc. Am. Nat. Acad. of Sc. 38, (1952) p. 65—68.
- [5] A. N. Liapounoff *Problème général de la Stabilité du mouvement* Ann. Fac. Sc. de Toulouse (2), 9, (1907) p. 203—474.
- [6] O. Perron *Über ein Vermeintliches Stabilitätskriterium* Gott. Nahr. Math. Phys. Kl. 5. (1930) p. 28—29.
- [7] E. Picard *Traité d'Analyse* (3 éd.) Paris 1928.
- [8] H. Poincaré *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* Paris 1892.
- [9] K. Tatarkiewicz *Quelques exemples du comportement asymptotique des solutions des équations différentielles* — a paraître dans ces Annales.
- [10] R. E. Vinograd *Niekotoryje kriterii ograniczenosti reszenii sistemy dwuch liniejnych differencjalnych urawnienii* Dokl. Akad. Nauk n. s. 85, (1952) p. 265—268.
- [11] T. Ważewski *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires* Anri. Soc. Pol. Math. 20, (1948) p. 279—313.

Streszczenie

1. Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe

$$(1,11) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = f(t)$$

przyczym funkcje $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ są określone i ciągłe dla wszystkich $t \geq 0$.

Asymptotycznemu zachowaniu się rozwiązań tego równania poświęcono już wiele prac, lecz wyczerpały one (i to niezupełnie) tylko wypadki

w których funkcje $a(t)$ i $b(t)$ albo zmierzają do skończonych granic, albo są okresowe, albo wreszcie gdy istnieją stałe A, B takie, że całki

$$\int_0^{\infty} |a(t) - A| dt \quad \int_0^{\infty} |b(t) - B| dt$$

są zbieżne.

Praca niniejsza poświęcona jest zbadaniu ograniczoności i asymptotycznego zachowania się rozwiązań równania (1,11) bez zakładania, iż funkcje $a(t)$ i $b(t)$ spełniają jeden z podanych wyżej warunków regularności.

2. Weźmy równanie (algebraiczne względem λ)

$$\lambda^2 - 2a(t)\lambda - b(t) = 0$$

i oznaczmy przez λ_1, λ_2 jego pierwiastki (będą to funkcje zmiennej t)

$$\lambda_1(t) = a(t) - \sqrt{a^2(t) + b(t)}$$

$$\lambda_2(t) = a(t) + \sqrt{a^2(t) + b(t)}$$

(gdzie $a^2(t)$ oznacza kwadrat funkcji $a(t)$ tj. $[a(t)]^2$).

Oznaczmy przez **A 1**, **A 2**, **A 3** następujące warunki.

A 1. Istnieją stałe dodatnie A_2, B_1 takie, że

$$a(t) < A_2, \quad 0 < B_1 < b(t)$$

A 2. Istnieją stałe dodatnie A_2, B_1, τ takie, że

$$a(t) < A_2, \quad 0 < B_1 < -b(t) < a^2(t) - \tau$$

A 3. Istnieją stałe dodatnie $A_1, A_2, \bar{\sigma}$ takie, że

$$0 < A_1 < a(t) < A_2, \quad a^2(t) + \bar{\sigma} < -b(t) < A_2^2 + \bar{\sigma}.$$

Jeżeli założymy, że jest spełniony dla wszystkich $t \geq 0$ albo warunek **A 1**, albo warunek **A 2**, albo warunek **A 3**, to wtedy znak części rzeczywistych funkcji $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$) — tj. funkcji $\mathbf{R}' \lambda_i(t)$ — jest stały (to znaczy że jest niezależny od t).

Jeśli jest spełniony warunek **A 2** to wtedy

$$\tau(t) \frac{1}{\sqrt{a^2(t) + b(t)}}$$

jest funkcją rzeczywistą.

Jeśli jest spełniony warunek **A 3** to wtedy

$$\sigma(t)_{df} | - a''(t) - b(t)$$

jest funkcją rzeczywistą.

3. Jeżeli jest spełniony warunek **A 2** albo warunek **A 3** to wtedy znak $a(t)$ jest stały. Oznaczmy przez **B 2** i **B 3** następujące warunki:

B 2. Funkcje $a(t)$, $b(t)$ posiadają ciągłe pochodne oraz istnieje stała $0 < \kappa < 1$ taka, że

$$\kappa \tau(t) \left| \frac{\lambda_j(t)}{b(t)} \right| \geq \left| \frac{a(t)}{b(t)} \right|$$

$$\tau(t) \left| \frac{\lambda_j(t)}{b(t)} \right| \geq 2(-1)^j \left| \frac{\tau(t)}{b(t)} \right|$$

przyczym jeśli $a(t) > 0$ to należy położyć $j = 1$, zaś jeśli $a(t) < 0$ to należy położyć $j = 2$.

B 3. Funkcje $a(t)$, $b(t)$ posiadają ciągłe pochodne oraz istnieją stałe dodatnie κ_1 , κ_2 takie, że $0 < \kappa_1 + \kappa_2 < 2$ oraz

$$|\ln |a(t)|'| \leq \kappa_1 \sigma(t)$$

$$\frac{1}{a(t)} |\ln \sigma^2(t)|' \geq -\kappa_2.$$

4. Nazwijmy warunkiem **H**, następujący warunek:

H. Funkcje $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ są określone i ciągłe dla wszystkich $t \geq 0$ oraz jest spełniony

albo warunek **A 1**,

albo warunki **A 2**, $a(t) > 0$ i **B 2** dla $j = 1$,

albo warunki **A 2**, $a(t) < 0$ i **B 2** dla $j = 2$,

albo warunki **A 3**, $a(t) > 0$ i **B 3**,

albo warunki **A 3**, $a(t) < 0$ i **B 3**.

Oznaczmy przez k ilość niedodatnich wśród funkcji $R' \lambda_1$, $R' \lambda_2$ (jeżeli warunek **H** jest spełniony, to k nie zależy od t) oraz umówmy się, że przez 0 parametrową rodzinę będziemy rozumieć zbiór jednoelementowy.

5. Przy tych oznaczeniach są prawdziwe następujące twierdzenia:

Twierdzenie I. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ograniczona oraz jest spełniony warunek **H**, to wtedy istnieje dokładnie k parametrowa rodzina rozwiązań ograniczonych równania (1,11). Pochodne tych rozwiązań są też ograniczone.

Istnieje ponadto $\varepsilon_0 > 0$ takie, że wszystkie rozwiązania nie należące do owej rodziny nie spełniają warunków

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\varepsilon t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-\varepsilon t} = 0$$

a więc są nieograniczone wraz z pochodnymi.

Twierdzenie II. Jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\varepsilon t} = 0$$

oraz jest spełniony warunek **H**, to wtedy istnieje dokładnie k parametrowa rodzina rozwiązań równania (1,11) spełniających warunki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\varepsilon t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-\varepsilon t} = 0$$

dla każdego $\varepsilon > 0$.

Istnieje ponadto $\varepsilon_0 > 0$ takie, że wszystkie rozwiązania nie należące do owej rodziny, nie spełniają warunków

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\varepsilon_0 t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-\varepsilon_0 t} = 0.$$

6. W § 3 podana jest interpretacja geometryczna założeń. Parę funkcji

$$a = a(t) \quad b = b(t)$$

można interpretować jako krzywą (daną parametrycznie) na płaszczyźnie $[a, b]$. Okazuje się, że jeśli którykolwiek z warunków **A 1**, **A 2**, **A 3** jest spełniony to wtedy przy założeniu ciągłości funkcji $a(t)$ i $b(t)$ krzywa ta jest zawarta dla wszystkich $t \geq 0$ w jednym z pięciu obszarów uwidocznionych na rysunku 1.

7. Dowód obu tych twierdzeń polega na zamianie równania (1,11) na równoważny mu układ

$$\dot{x} = z$$

$$\dot{z} = b(t)x + 2a(t)z + f(t)$$

i na budowaniu „*rur*” z których w odpowiedni sposób rozwiązania wychodzą (albo do których wchodzą). Poczym stosuje się t. zw. „*twierdzenie retraktowe*” prof. T. Ważewskiego, (patrz [11]). Wypadek w którym spełniony jest warunek **A 1** traktowany jest w § 5, pozostałym wypadkom poświęcone są § 6, § 7 i § 8.

8. W § 9 zakładamy że warunek **H** jest spełniony i że $f(t) \rightarrow 0$. Pokazujemy, że istnieje wtedy k parametrowa rodzina rozwiązań zmierzających do 0 gdy $t \rightarrow +\infty$. Jeżeli zaś założymy, że $f(t) \equiv 0$ (to znaczy, gdy równanie (1,11) jest jednorodne), to wtedy istnieje k parametrowa rodzina rozwiązań, które dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ spełniają nawet warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{\varepsilon_0 t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{\varepsilon_0 t} = 0.$$

9. W ostatnim paragrafie uogólnia się uzyskane wyniki na *równania nieliniowe*

$$(10,11) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = g(x, \dot{x}, t) + f(t)$$

przyczym funkcja $g(x, z, t)$ spełnia następujący warunek **C**.

C. $g(x, z, t)$ jest funkcją określoną i ciągłą w zbiorze

$$E = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times \langle 0, +\infty \rangle,$$

istnieje funkcja $g_1(t)$ taka że

$$g(x, z, t) \leq g_1(t) \sqrt{x^2 + z^2}$$

gdzie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = 0.$$

oraz równanie (10,11) jest w E jednolite.

Pokazuje się, że rozwiązania równania nieliniowego (10,11) przy założeniu, że warunki **H** i **C** są spełnione, zachowują się podobnie jak rozwiązania równania liniowego (1,11) przy założeniu, że warunek **H** jest spełniony,

Na przykład mamy następujące twierdzenie (podane tutaj w skróceniu), a które uogólnia Twierdzenie I.

Twierdzenie VII. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ograniczona oraz spełnione są warunki **H** i **C**, to wtedy istnieją rozwiązania, które wraz z pochodnymi są ograniczone.

Резюме

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1,11) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = f(t)$$

причём функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ определены и непрерывны для всех $t > 0$.

Асимптотическому поведению решений этого уравнения посвящено уже много трудов, но они исчерпали (и то неполно) только случаи, в которых функции $a(t)$ и $b(t)$ или стремятся к определенным пределам, или они монотонны, или они периодические, или, наконец, когда существуют постоянные A и B такие, что интегралы

$$\int_0^{\infty} |a(t) - A| dt, \quad \int_0^{\infty} |b(t) - B| dt$$

сходятся.

Этот труд посвящен исследованию ограниченности и асимптотического поведения решений уравнения (1,11) без предположения, что функции $a(t)$ и $b(t)$ следуют одному из вышеприведенных условий регулярности.

2. Возьмём уравнение (алгебраическое относительно λ)

$$\lambda^2 - 2a(t)\lambda - b(t) = 0$$

и обозначим его корни через λ_1 , λ_2 (что будут функции переменного t),

$$\lambda_1(t) = a(t) - \sqrt{a^2(t) + b(t)}$$

$$\lambda_2(t) = a(t) + \sqrt{a^2(t) + b(t)}$$

($a^2(t)$ обозначает квадрат функции $a(t)$).

Обозначим символами **A 1**, **A 2**, **A 3** следующие условия.

A 1. *Существуют положительные постоянные A_2 , B_1 такие, что*

$$|a(t)| < A_2, \quad 0 < B_1 < b(t).$$

A 2. *Существуют положительные постоянные A_2 , B_1 , $\bar{\tau}$ такие, что*

$$|a(t)| < A_2, \quad 0 < B_1 < -b(t) < a^2(t) - \bar{\tau}.$$

A 3. *Существуют положительные постоянные A_1 , A_2 , σ такие, что*

$$0 < A_1 < |a(t)| < A_2, \quad a^2(t) + \bar{\sigma} < -b(t) < A_2 + \bar{\sigma}.$$

Если предположим, что для всех $t \geq 0$ исполнено или условие **A 1**, или **A 2**, или **A 3**, то знак действительной части функции $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$), т. е. функции $\operatorname{Re} \lambda_i(t)$, постоянен, независим от t .

Если исполнено условие **A 2**, тогда

$$\tau(t) \frac{d}{dt} \sqrt{a^2(t) + b(t)}$$

есть действительная функция.

Если исполнено условие **A 3**, тогда

$$\sigma(t) \frac{d}{dt} \sqrt{-a^2(t) - b(t)}$$

есть действительная функция.

5. Если исполнено или условие **A 2**, или условие **A 3**, тогда движение $a(t)$ стационарно.

Обозначим через **B 2** и **B 3** следующие условия:

B 2. Функции $a(t)$ и $b(t)$ обладают непрерывными производными, и существует постоянная α такая, что $0 < \alpha < 1$,

$$\alpha \tau(t) \left| \frac{\lambda_j(t)}{b(t)} \right| > \left| \frac{a(t)}{b(t)} \right|'$$

$$\tau(t) \left| \frac{\lambda_j(t)}{b(t)} \right| > 2(-1)^j \left| \frac{\tau(t)}{b(t)} \right|'$$

причём, если $a(t) > 0$, то следует принять $j=1$, если же $a(t) < 0$, то $j=2$.

B 3. Функции $a(t)$ и $b(t)$ имеют непрерывные первые производные, и существуют положительные постоянные α_1, α_2 такие, что $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 2$ и

$$|\ln |a(t)|'| < \alpha_1 \sigma(t)$$

$$\frac{1}{a(t)} |\ln \sigma^2(t)|' \geq -\alpha_2$$

4. Назовём «условием **H**» следующее условие:

H. Функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ определены и непрерывны для всех $t \geq 0$, и также удовлетворено

или условия **A 1**;

или условия **A 2**, $a(t) > 0$ и **B 2** при $j=1$;

или условия **A 2**, $a(t) < 0$ и **B 2** при $j=2$;

или условия **A 3**, $a(t) > 0$ и **B 3**;

или условия **A 3**, $a(t) < 0$ и **B 3**.

Обозначим через k число *неположительных* среди функций $R' \lambda_1, R' \lambda_2$ (если удовлетворено условие **H**, то k не зависит от t) и условимся под 0 -параметровым семейством понимать множество с одним элементом.

5. При этих обозначениях верны следующие теоремы:

Теорема I. Если функция $f(t)$ ограничена и исполнено условие **H**, то существует в точности k -параметровое семейство ограниченных решений уравнения (1,11). Производные этих решений тоже ограничены.

Сверх того существует такое $\epsilon_0 > 0$, что все решения, не принадлежащие к этому семейству, не удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\epsilon_0 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-\epsilon_0 t} = 0;$$

стало быть они неограничены вместе с производными.

Теорема II. Если для всякого $\epsilon > 0$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\epsilon t} = 0$$

и также исполнено условие **H**, то существует в точности k -параметровое семейство решений уравнения (1,11),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\epsilon t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-\epsilon t} = 0$$

для всякого $\epsilon > 0$.

Сверх того существует такое $\epsilon_0 > 0$, что все решения, не принадлежащие к этому семейству, не удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\epsilon_0 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{-\epsilon_0 t} = 0.$$

6. В § 3 дано геометрическое толкование условий. Пару функций

$$a = a(t), \quad b = b(t)$$

можно толковать, как кривую (заданную параметрически) на плоскости $[a, b]$. Оказывается, что, если удовлетворено какое — нибудь из условий **A 1**, **A 2**, **A 3**, то, при предположении непрерывности функций $a(t)$ и $b(t)$, эта кривая для всех значений $t > 0$ заключена в одной из пяти областей, показанных на рисунке 1.

7. Доказательство обеих теорем состоит в замене уравнения (1,11) на равносильную с ним систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \\ \dot{z} &= b(t)x + 2a(t)z + f(t) \end{aligned}$$

и в постройке «трубок», из которых решения выходят соответствующим образом (или в которые они входят). Затем применяется т. н. «ретрактная теорема» проф. Т. Важевского (см. [11]).

Случай, в котором исполнено условие **A 1**, рассматривается в § 5, остальным случаям посвящены § 6, § 7 и § 8.

8. В § 9 полагаем, что условие **H** исполнено и что $f(t) \rightarrow 0$.

Доказывается, что тогда существует k -параметровое семейство решений, стремящихся к 0, когда $t \rightarrow \infty$. Если же предположить, что $f(t) \equiv 0$ (т. е. когда уравнение (1,11) однородно), то тогда существует k -параметровое семейство решений, которые для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{\varepsilon_0 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) e^{\varepsilon_0 t} = 0.$$

9. В последнем параграфе обобщены полученные результаты на нелинейные уравнения:

$$(10,11) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = g(x, \dot{x}, t) + f(t)$$

причём функция $g(x, z, t)$ удовлетворяет следующему условию **C**.

C. $g(x, z, t)$ есть определённая и непрерывная функция на множестве $E = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$, а притом существует $g_1(t)$ такая, что

$$|g(x, z, t)| < g_1(t) \sqrt{x^2 + z^2}$$

и, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = 0.$$

и через каждую точку E переходит точно одно решение уравнения (10,11).

Оказывается, что решения нелинейного уравнения (10,11) в предположении, что исполнены условия **H** и **C**, ведут себя подобным образом, как решения линейных уравнений (1,11) в предположении, что исполнено условие **H**.

Например, умеем следующую теорему (приводим её в сокращённом виде), обобщающую теорему I.

Теорема VII. Если функция f ограничена и исполнены условия **H** и **C**, то существуют решения, которые ограничены вместе с производными.

