ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 1 SECTIO A 1953

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr. M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur quelques applications de la formule de Parseval. II

O kilku zastosowaniach wzoru Parsevala. II

О нескольких применениях формулы Парсевала. II.

§ 1. La formule de Parseval

(1) $$H(f,g,x) = H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\, g\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

dans laquelle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{et} \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n,$$

(nous dirons brièvement que $H(x)$ est une H-composition des fonctions f et g) et C est une courbe fermée contenant l'origine à son intérieur, tandis que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C et x choisi de manière que $g(tx/z)$ soit holomorphe pour tout $z \epsilon C$ et pour tout t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ a été appliquée par J. Hadamard [3] [1]) dans la démonstration de son fameux théorème sur la multiplication des singularités des fonctions analytiques. Dans un article précédent [1] j'ai appliqué la formule (1) dans le cas des fonctions holomorphes. Je vais exposer actuellement quelques autres applications du même genre [2]).

Voici les notations employées:

$$M(r,f) = \text{maximum de } |f(z)| \text{ dans le cercle } |z| \leqslant r;$$

$$I_k(r,f) = \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^k\, d\Theta\right]^{\frac{1}{k}} \quad (k > 0);$$

[1]) Les numéros renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

[2]) Les principaux résultats de ce travail ont été exposés au VIII-e Congrès des Mathématiciens Polonais (Varsovie, septembre 1953).

$S(r,f)=$ aire de la surface de Riemann décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z|\leqslant r$.

Je supposerai dans tout ce qui suit que $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans le cercle $|z|<1$. En posant $|x|=r$ $(0<r<1)$ et en prenant pour C la circonférence $|z|=\sqrt{r}$ [3]) on déduit de suite de (1) l'inégalité

$$\text{I} \qquad M(r,H)\leqslant I_1(\sqrt{r},f)\cdot M(\sqrt{r},g),$$

dans laquelle on peut évidemment permuter les fonctions f et g. En posant $x=re^{i\varphi}$, $z=\sqrt{r}\cdot e^{i\Theta}$, en intégrant les deux membres de (1) par rapport à φ, entre les limites 0 et 2π, et en changeant l'ordre des intégrations, on obtient l'inégalité

$$\text{II} \qquad I_1(r,H)\leqslant I_1(\sqrt{r},f)\cdot I_1(\sqrt{r},g).$$

En appliquant enfin l'inégalité de Hölder on déduit de (1) l'inégalité

$$\text{III} \qquad M(r,H)\leqslant I_p(\sqrt{r},f)\cdot I_q(\sqrt{r},g);\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

§ 2. On sait que

$$S(r,f)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2r^{2n};$$

or la fonction $H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2x^{2n}$ peut être considérée comme H-composition des fonctions $z^2f'(z^2)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{2n}$ et $\bar{f}(z)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_nz^{2n}$ ($\bar{a}$ désigne le nombre conjugué de a), donc d'après I et III on obtient les inégalités:

$$(2) \qquad S(r,f)\leqslant\pi rM(r,f')\,I_1(r,f),$$

$$(3) \qquad S(r,f)\leqslant\pi rM(r,f)\,I_1(r,f'),$$

$$(4) \qquad S(r,f)\leqslant\pi r\,I_p(r,f)\,I_q(r,f'),\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

L'inégalité (3) a une interprétation purement géométrique:

L'aire de la surface de Riemann décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z|\leqslant r$ ne dépasse pas la moitié du produit de la longueur de la frontière de ladite surface de Riemann par le rayon du plus petit cercle couvrant cette surface.

[3]) Plus généralement on pourrait prendre pour C une circonférence $|z|=\rho$ $(r<\rho<1)$.

Cet énoncé, qui ne peut être considéré comme nouveau, s'obtient aisément aussi par des considérations purement géométriques et est — au moins dans le cas où la surface de Riemann se réduit à un domaine convexe — une conséquence immédiate de l'inégalité $S \leqslant \frac{1}{4} LD$ (L longueur de la frontière du domaine et D son diamètre) due à Hayashi [5]. Il est cependant intéressant qu'il constitue une conséquence immédiate de la formule classique (1) [4]).

Supposons maintenant que $f(z) \neq 0$ dans le cercle $|z| < 1$. En remplaçant dans la formule (1) $f(z)$ par $zf(z')$ on pourra écrire:

$$(1') \qquad H(zf', g, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} f(z) g\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z}.$$

En supposant toujours que C est la circonférence $|z| = \sqrt{r}$ et que $|x| = r$ et en profitant de l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$, on déduit de (1') inégalité

$$H(zf', g, x) \leqslant \tfrac{1}{2} M\left(\sqrt{r}, \frac{zf'}{f}\right) [I_2^2(\sqrt{r}, f) + I_2^2(\sqrt{r}, g)],$$

En posant $g(z) = \bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$ on a en particulier:

$$(5) \qquad S(r, f) \leqslant \pi M\left(r, \frac{zf'}{f}\right) I_2^2(r, f).$$

Donc, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^2|$ est convergente (et, a fortiori, si $f(z)$ est bornée dans le cercle $|z| < 1$) et si $f(z)$ ne s'annule pas dans le cercle $|z| < 1$ l'aire de la surface de Riemann décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leqslant r < 1$ ne dépasse pas le maximum du module de la dérivée logarithmique pour $|z| \leqslant r$, multiplié par un nombre qui ne dépend pas de r

En supposant toujours que $f(z) \neq 0$ on obtient soit de l'inégalité (3), soit de la formule (1'), où $g(z) = \bar{f}(z)$, l'inégalité

$$(6) \qquad S(r, f) \leqslant \pi I_1\left(r, \frac{zf'}{f}\right) M^2(r, f),$$

qui possède une interprétation géométrique analogue à l'inégalité (3):

[4]) L'égalité a lieu lorsque la surface de Riemann se reduit à un cercle (éventuellement couvert plusieurs fois). Dans l'espace on a une inégalité analogue $V \leqslant \frac{1}{3} PR$, où V est le volume d'un domaine, P l'aire de la surface limitant ce domaine, R le rayon de la plus petite sphère contenant le domaine.

Si $f(z) \neq 0$, l'aire de la surface de Riemann décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leqslant r$ ne dépasse pas la moitié du produit du maximum du carré de la distance des points de cette surface à l'origine par la longueur de la frontière de la surface de Riemann décrite par $\log f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leqslant r$.

En particulier, si cette dernière longueur est bornée, il en est de même du rapport $S(r,f) : M^2(r,f)$, c. à d. $f(z)$ est dite *faiblement multivalente.*

§ 3. Les opérations

$$zf'(z) \quad \text{et} \quad \int_0^z \frac{f(z)-a_0}{z}\,dz$$

$(f = a_0 + \ldots + a_n z^n + \ldots)$ constituent des H-compositions de $f(z)$ avec les fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \log \frac{1}{1-z}$$

respectivement. En profitant de l'inégalité II et de l'égalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{z}{(1-z)^2} \right| d\Theta = \frac{r}{1-r^2} \qquad (|z| = r),$$

on obtient de suite l'inégalité

$$I_1(r, zf') \leqslant \frac{\sqrt{r}}{1-r} I_1(\sqrt{r}, f), \tag{7}$$

que l'on pourrait déduire aussi de l'intégrale de Cauchy:

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz.$$

Or l'emploi de la formule de Parseval est plus avantageux, car il conduit à des généralisations: *au lieu de multiplier les coefficiens a_n par n, ce qui fournit zf', on pourra les multiplier par des coefficients b_n quelconques, pourvu que l'on ait*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \right| d\Theta \leqslant \frac{r}{1-r}.$$

et l'inégalité (7) *(dans laquelle on remplacera* $zf'(z)$ *par* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$*) sera toujours exacte.*

§ 4. Voici un autre exemple d'une généralisation de ce genre. Considérons les fonctions holomorphes *p-valentes en aire* dans le cercle $|z|<1$; ceci veut dire que l'aire de la portion de la surface de Riemann engendrée par $f(z)$, qui se projette sur le cercle $|w|<R$, ne dépasse pas, quel que soit R, $p\pi R^2$ (il est clair que toute fonction p-valente est aussi p-valente en aire). Selon D. C. Spencer [8] ces fonctions satisfont, si $f(0)=0$, à l'inégalité

$$(*) \qquad I_k(r,f) \leqslant \left| pk \int_0^r \frac{M^k(r)}{r}\, dr \right|^{\frac{1}{k}}, \qquad (0<r<1).$$

Supposons que $f(z)$ satisfasse pour tout r de l'intervalle $0<r<1$, à l'inégalité:

$$(8) \qquad |f(z)| < \frac{Ar}{(1-r)^a},$$

où A et a sont des constantes positives. Si $a>1$ on déduit de la relation $(*)$, où $k=1$, l'inégalité

$$I_1(r,f) < \frac{A_1}{(1-r)^{a-1}},$$

donc, d'après l'inégalité (7)

$$(9) \qquad I_1(r,f') < \frac{A_2}{(1-r)^a};$$

A_1 et A_2 sont des constantes. L'inégalité (9) exprime le fait que *lorsque* $r\to 1$, *l'ordre de grandeur, par rapport à* $1/1-r$, *de la longueur de l'image de la circonférence* $|z|=r$, *fournie par* $f(z)$, *ne dépasse pas l'ordre de grandeur du diamètre de cette image* [5]). L'inégalité (9) a été obtenue, dans le cas des fonctions multivalentes en aire, par D.C. Spencer [8] et G.M. Golusin [2], qui ont fait d'ailleurs une hypothèse moins restrictive, à savoir $a>\frac{1}{2}$. Il résulte cependant de la démonstration ci-dessus que *l'inégalité* (9) *subsiste (du moins lorsque* $a>1$*) si l'on remplace la différentiation de* $f(z)$ *par la multiplication des coefficients de Taylor* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *de*

[5]) Il résulte de l'inégalité connue de F. Riesz que l'on peut remplacer, dans cet énoncé, la longueur de l'image de la circonférence $|z|=r$ par celle de l'image d'un rayon $\arg z=\theta$, $0<|z|<r$.

$f(z)$ par les termes de la suite $0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ respectivement, sous la seule condition que $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ satisfasse à l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\Theta})|\, d\Theta < \frac{Ar}{1-r}, \qquad \text{(A constante)}.$$

Il suffit, par exemple, que $g(z)$ soit univalente dans le cercle $|z| < 1$ et que $g(0) = 0$.

Il y a lieu de remarquer qu'une inégalité analogue à (9), mais relative à la moyenne d'ordre 2, c. à d. $I_2(r, f')$, a lieu *pour tout valeur positive de a*. On a notamment, sous la condition (8), l'inégalité

$$\text{(10)} \qquad I_2(r, f') < \frac{A_3}{(1-r)^{a+\frac{1}{2}}} \qquad (a > 0).$$

L'exemple de la fonction $f(z) = z(1-z)^{-2}$ montre d'ailleurs que l'exposant $a + \frac{1}{2}$ ne saurait être, en général, remplacé par un nombre moindre. Pour démontrer (10) remarquons que, $f(z)$ étant p-valente en aire, on a, en vertu de (8):

$$S(r) = \int_0^r dr \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|^2 r\, d\Theta < p\pi \frac{A^2 r^2}{(1-r)^{2a}} \text{ [6]}.$$

En remplaçant dans l'expression $r\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|^2 d\Theta$ r par z on obtient une fonction analytique, qui est la dérivée de $S(z)$, donc, en appliquant l'intégrale de Cauchy, citée au § 3, on obtient l'inégalité

$$I_2^2(r, f') < \frac{A_4}{(1-r)^{2a+1}}, \qquad (A_4 \text{ constante})$$

c. à d. l'inégalité (10). Il est clair que l'on a une généralisation de (10) analogue à celle de (9).

En tenant compte du résultat que nous venons d'obtenir il est naturel de se demander si l'inégalité (9) subsiste pour tout $a > 0$? Or la réponse est négative: *pour a positif et assez petit, l'inégalité (9) de Spencer-Golusin*

[6]) L'inégalité $S(r) < p\pi M^2(r)$ caractérise les fonctions *faiblement p-valentes*. L'inégalité (10) est donc valable lorsque $f(z)$ appartient à cette classe, bien plus étendue que celle des fonctions *p-valentes en aire*. Ce résultat ainsi qu'un résultat analogue relatif à $I_k(r, f')$, $k > 2$, a été établi par D. C. Spencer [8].

n'est plus exacte. Considérons, en effet, des fonctions $f(z) = z + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{2k+1} + \dots + a_n z^{nk+1} + \dots$ univalentes et k-symétriques dans le cercle $|z| < 1$. On sait que ces fonctions satisfont à l'inégalité

$$|f(z)| < \frac{Ar}{(1-r)^{\frac{2}{k}}}.$$

Donc, en appliquant l'inégalité (9) avec $a = 2/k$, on a

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|\, d\Theta < \frac{Ar}{(1-r)^{\frac{2}{k}}},$$

ce qui conduit de suite, en posant $r = 1 - 1/n$, à l'inégalité $|a_n| < A_6 n^{\frac{2}{k}-1}$, qui constitue l'hypothèse bien connue de G. Szegö. Or Littlewood a montré [6] que cette hypothèse n'est pas exacte pour k assez grand. Il serait intéressant de déterminer la borne inférieure exacte des valeurs de a, pour lesquelles l'inégalité (9) est valable.

Cependant (9) est exacte, quel que soit $a > 0$, dans le cas particulier des *fonctions* $f(z)$ *univalentes et étoilées par rapport à l'origine* $(f(0) = 0)$. On a, en effet, dans ce cas d'après G. M. Golusin [2] p. 25 l'inégalité

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{z f''(z)}{f(z)} \right| |dz| < \frac{10}{1-r^2}.$$

Il résulte donc de (8) et de (*) que

$$I_1(r, f'') < \frac{A_7}{(1-r)^{a+1}}.$$

En intégrant on obtient (9). L'inégalité (9) est aussi valable pour tout $a > 0$ lorsque, $f(z)$ étant multivalente [7]), l'on a, pour tout r de l'intervalle $0 < r < 1$:

$$(*) \qquad \frac{Br}{(1-r)^a} < |f(z)| < \frac{Ar}{(1-r)^a},$$

A et B étant des constantes positives. En effet, en choisissant un entier λ tel que $\lambda a > 1$ et en appliquant l'inégalité (9) à la fonction $[f(z)]^\lambda$, qui est aussi multivalente, en obtient l'inégalité:

[7]) On pourrait supposer, plus généralement, que $f(z)$ est „en moyenne p-valente". c. à d. telle que la moyenne le long d'une circonférence $|w| = R$ du nombre de fois qu'une valeur $Re^{i\varphi}$ est prise ne dépasse pas p pour tout $R > 0$.

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^{\lambda-1} |f'(re^{i\Theta})| d\Theta < \frac{A_\alpha}{(1-r)^{\lambda\alpha}},$$

donc (9) est vraie en vertu de l'inégalité gauche de (*).

§ 5. Nous nous occuperons maintenant de la moyenne du carré du module sur une circonférence $|z|=r$, c'est-à-dire de l'expression $I_2(r,f)$. On sait que

$$I_2^2(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Or la fonction $|a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2 x^{2n} + \ldots$ est une H-composition des fonctions $f(z^2)$ et $\bar{f}(z^2)$, donc, d'après l'inégalité I du § 1, on a

(11) $$I_2(r,f) \leq \sqrt{M(r,f) I_1(r,f)}.$$

L'inégalité (11) n'est point nouvelle, car elle résulte aussi du fait connu que $I_k(r,f)$ est une fonction convexe de $1/k$ et de l'égalité $M(r,f) = \lim_{k\to\infty} I_k(r,f)$.

Considérons maintenant l'expression $I_2^2(r,f') = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-2}$. Or la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 x^{n-1}$ est une H-composition des fonctions

$$zf''(z) + f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{f}(z) - \bar{a}_0}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n z^{n-1},$$

donc l'inégalité I fournit les deux inégalités, peut-être nouvelles, suivantes:

(12) $$I_2(r,f') \leq \sqrt{M\left(r, \frac{f-a}{z}\right) \cdot I_1(r, f' + zf'')}$$

(13) $$I_2(r,f') \leq \sqrt{M(r, f' + zf'') \cdot I_1\left(r, \frac{f-a_0}{z}\right)}.$$

Rappelons que Hardy, Littlewood et Landau ont obtenu [4], entre autres, des inégalités de la forme

(*) $$I_k(f') \leq A(k) \cdot \sqrt{I_k(f) I_k(f'')},$$

où $A(k)$ ne dépend de k. Les inégalités (12) et (13) occupent une place en quelque sorte intermédiaire entre ces inégalités (*) et l'inégalité (11): en effet, les éléments qui figurent dans les inégalités de Hardy-

Littlewood-Landau diffèrent entre eux par l'ordre de dérivation, mais non pas par l'ordre de la moyenne, au contraire les éléments de l'inégalité (11) diffèrent entre eux par l'ordre de la moyenne, mais non pas par l'ordre de dérivation; enfin, les éléments des inégalités (12) et (13) diffèrent entre eux des deux manières à la fois.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Biernacki, Annales UMCS, Sectio A, 4, 1950.
2. G. M. Golusin, Travaux Matem. Instit. Stekloff, 27, 1949, cf. aussi son livre „Геометрическая теория функций комплексного переменного" Moscou - Leningrad, 1952, p. 199.
3. J. Hadamard, Acta Mathematica, 22, 1898.
4. Hardy-Littlewood-Landau, Mat. Zeit., 1935.
5. Hayashi, Tohoku Mat. Journal, 22, 1923.
6. J. E. Littlewood, Quart. Journ. of Mathem., 1938.
7. J. E. Littlewood, Proc. Lond. Mat. Soc., II série, tome 23.
8. D. C. Spencer, Proc. Lond. Mat. Soc. 47, 1942.

Państwowy Instytut Matematyczny — Institut Mathématique de l'Etat

Streszczenie

Oznaczając przez $M(r,f)$ maximum modułu $f(z)$ w kole $|z| \leqslant r$, przez $S(r,f)$ pole powierzchni Riemanna zakreślonej przez $f(z)$ gdy z zakreśla koło $|z| \leqslant r$ i przez $I_k(r,f)$ średnią rzędu k z modułu $f(z)$ na obwodzie koła $|z| = r$, otrzymuję, korzystając z klasycznego wzoru Parsevalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) g\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z},$$

nierówności:

$$S(r,f) \leqslant \pi r M(r,f') I_1(r,f); \quad S(r,f) \leqslant \pi r M(r,f) I_1(r,f')$$

i, o ile $f \neq 0$,

$$S(r,f) \leqslant \pi M\left(r, \frac{zf'}{f}\right) I_2^2(r,f); \quad S(r,f) \leqslant \pi I_1\left(r, \frac{zf'}{f}\right) M^2(r,f).$$

Wykazuję, że użycie wzoru Parsevala pozwala na uogólnienia, w których różniczkowanie lub całkowanie są zastąpione przez operacje ogólniejsze: jako przykład tej okoliczności podaję nierówność Gołuzina i Spencera: jeśli $f(0)=0$ i $f(z)$ jest jednolistna w kole $|z|<1$ oraz $|f(z)| < Ar(1-r)^{-\alpha}$

(A i a stałe, $a > \frac{1}{2}$), to $I_1(r,f') \leqslant A_1(1-r)^{-a}$. Wyprowadzam wreszcie nierówności:

$$I_2(r,f') \leqslant \sqrt{M\left(r, \frac{f-a}{z}\right) I_1(r, f' + zf'')}$$

$$I_2(r,f') \leqslant \sqrt{I_1\left(r, \frac{f-a_0}{z}\right) M(r, f' + zf'')}.$$

Резюме

Обозначая через $M(r,f)$ максимум модуля $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$, $S(r,f)$ площадь римановой поверхности, зачерченной значениями $f(z)$, когда z зачерчивает круг $|z| \leqslant r$, и через $I_k(r,f)$ среднюю величину порядка k из модуля $f(z)$ на окружности круга $|z| = r$, я получаю, пользуясь классической формулой Парсевала

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, g\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z},$$

неравенства

$$S(r,f) \leqslant \pi r M(r,f') I_1(r,f), \qquad S(r,f) \leqslant \pi r M(r,f) I_1(r,f')$$

и, поскольку $f \neq 0$

$$S(r,f) \leqslant \pi M\left(r, \frac{zf'}{f}\right) I_2^2(r,f), \qquad S(r,f) \leqslant \pi I_1\left(r, \frac{zf'}{f}\right) M^2(r,f).$$

Я показываю, что применение формулы Парсевала допускает обобщения, в которых дифференцирования или интегрирования заменены более общими операциями: как пример этого обстоятельсва я привожу неравенство Голузина и Спенцера: если $f(0) = 0$ и $f(z)$ однолистная функция в круге $|z| < 1$, а при том $|f(z)| < Ar(1-r)^{-a}$ (A и a постоянные, $a > \frac{1}{2}$), то $I_1(r,f') \leqslant A_1(1-r)^{-a}$.

Наконец, я даю вывод неравенств

$$I_2(r,f') \leqslant \sqrt{M\left(r, \frac{f-a_0}{z}\right) I_1(r, f' + zf'')}$$

$$I_2(r,f') \leqslant \sqrt{I_1\left(r, \frac{f-a_0}{z}\right) M(r, f' + zf'')}.$$