ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VI, 7 SECTIO A 1952

Z Seminarium Matematycznego I Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur une inégalité de F. Riesz et sur quelques inégalités analogues

O pewnej nierówności F. Riesz'a i o kilku nierównościach analogicznych

О некотором неравенстве Рисса и нескольких аналогичных неравенствах

§ 1. F. Riesz a démontré [1]) le lemme suivant: „Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs, vérifiant pour tout couple h, n d'entiers positifs, tel que $n > h$, les inégalités

(1) $$\frac{a_{h+1}+a_{h+2}+\ldots+a_n}{n-h} \leqslant K a_h$$

où K est une constante. Alors l'on a $a_n = 0\left(\frac{n}{\log n}\right)$ (c.-à-d. a_n: $n(\log n)^{-1}$ est bornée)".

I. *Je me propose do montrer que l'on a, dans ces conditions, l'égalité plus précise:*

$$a_n = 0\left(n^{1-\frac{1}{K}}\right).$$

Dans le cas où $K \leqslant 1$, l'égalité est banale, car pour $n = h+1$ l'inégalité (1) s'écrit $\frac{a_{h+1}}{a_h} \leqslant K$. Nous supposerons donc que $K > 1$. Introduisons la fonction „en escalier" $f(x)$, définie comme il suit:

$$\text{pour} \quad n-1 < x \leqslant n \qquad f(x) = a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et posons

(2) $$\Phi(h) = \int_h^n f(x)\,dx.$$

Lorsque h est un entier l'inégalité (1) peut s'écrire:

(3) $$\Phi(h) = \int_h^n f(x)\,dx \leqslant K(n-h) f(h).$$

---

[1]) Acta Scient. Math. (Szeged, Hungaria), tome 11, 1948.

Cette inégalité est cependant valable pour tout $h<n$, car si $h'-1<h<h'$, h' étant un entier, on a évidemment, en tenant compte de ce que $K>1$:

$$(*) \qquad \int_h^{h'} f(x)\,dx < K(h'-h)f(h').$$

Ajoutant l'inégalité (3), où l'on a remplacé h par h', et l'inégalité $(*)$, on obtient bien l'inégalité (3).

Il résulte de (2) que lorsque h n'est pas un entier on a $\Phi'(h) = -f(h)$, donc l'inégalité (3) peut s'écrire dans ce cas

$$\frac{\Phi'(h)}{\Phi(h)} \leqslant \frac{1}{K}\cdot\frac{-1}{n-h}.$$

En intégrant cette inégalité entre les limites 0 et 1, 1 et 2,..., $(n-2)$ et $(n-1)$ et en ajoutant les résultats, on obtient

$$\log\Phi(n-1) - \log\Phi(0) \leqslant -\frac{1}{K}\log n$$

c.-à-d. en vertu de la définition de $\Phi(h)$

$$\frac{\int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx}{\int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx} \leqslant e^{-\frac{1}{K}\log n} = n^{-\frac{1}{K}}$$

ou encore

$$a_n \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, n^{-\frac{1}{K}}$$

Mais, si $h=1$, l'inégalité (1) s'écrit:

$$\frac{a_2 + \ldots + a_n}{n-1} \leqslant K a_1$$

donc $a_1 + \ldots + a_n \leqslant \{(n-1)K+1\}\, a_1 < n(K+1)\, a_1$ et en définitive:

$$a_n \leqslant (K+1)\, a_1\, n^{1-\frac{1}{K}}$$

ce qui justifie bien notre assertion.

§ 2. Nous allons établir maintenant un théorème analogue en remplaçant la moyenne arithmétique du premier ordre, qui figure dans les inégalités (1), par des moyennes arithmétiques du second ordre. On obtient le résultat suivant:

II. *Si $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ est une suite infinie de nombres positifs, vérifiant pour tout couple h, n d'entiers positifs tel que $n > h$ les inégalités:*

$$\frac{(n-h)a_{h+1}+(n-h-1)a_{h+2}+\dots+2a_{n-1}+a_n}{\dfrac{(n-h)(n-h+1)}{2}} \leqslant K a_h \tag{4}$$

où K est une constante, alors $a_n = 0(n^{2-\frac{2}{K}})$ [2]).

Comme au § 1 on constate que ce théorème est banal si $K \leqslant 1$, on supposera donc que $K > 1$. Pour établir cette proposition introduisons encore la fonction $f(x)$ du § 1, mais posons

$$\psi(h) = \int_h^n \left(n + \frac{1}{2} - t\right) f(t)\,dt.$$

Lorsque h est un entier, l'inégalité (4) peut s'écrire

$$\psi(h) = \int_h^n \left(n + \frac{1}{2} - t\right) f(t)\,dt \leqslant \frac{K(n-h)(n-h+1)}{2} \cdot f(h). \tag{5}$$

Si h n'est pas un entier, posons $h'-1 < h < h'$, h' étant un entier. On vérifie sans peine l'inégalité suivante, dans laquelle $K \geqslant 1$:

$$\int_h^{h'} \left(n + \frac{1}{2} - t\right) dt < K \cdot \frac{(n-h)(n-h+1)-(n-h')(n-h'+1)}{2}.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $a_{h'}$ et en lui ajoutant membre à membre l'inégalité (5), où l'on a remplacé h par h', on obtient la même inégalité (5), qui est donc valable pour tout h de l'intervalle $0 < h < n$.

Lorsque h n'est pas un entier, on a évidemment

$$\psi'(h) = -(n + \tfrac{1}{2} - h) f(h),$$

---

[2]) Il résulte d'une proposition de M. J. Krzyż (*Monotonity preserving transformations*), ces Annales, tome VI, 1952, Nr 8) qui si la suite a_n est croissante, l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (4).

donc, dans ce cas, l'inégalité (5) peut s'écrire:

$$\frac{\psi'(h)}{\psi(h)} < -\frac{2(n+\frac{1}{2}-h)}{K(n-h)(n-h+1)} < -\frac{2}{K(n-h+1)}.$$

En intégrant cette inégalité entre les limites 0 et 1, 1 et 2,..., $(n-2)$ et $(n-1)$, et en ajoutant les résultats on obtient

$$\log\psi(n-1) - \log\psi(0) < \frac{2}{K}[\log 2 - \log(n+1)]$$

c.-à-d., en tenant compte de la définition de $\psi(h)$

$$\frac{\int\limits_{n-1}^{n}\left(n+\frac{1}{2}-t\right)f(t)\,dt}{\int\limits_{0}^{n}\left(n+\frac{1}{2}-t\right)f(t)\,dt} < e^{-\frac{2}{K}\log\frac{n+1}{2}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{-\frac{2}{K}}$$

ou encore

$$(*) \qquad a_n < [na_1 + (n_2-1)a + \ldots + 2a_{n-1} + a_n]\left(n+1\right)^{-\frac{2}{K}}.$$

Mais, si $h=1$, l'inégalité (4) s'écrit:

$$(n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n < \frac{n(n-1)}{2}Ka_1.$$

De cette dernière inégalité et de $(*)$ il résulte immédiatement que notre assertion est vraie.

§ 3. Nous allons nous occuper maintenant d'une inégalité plus simple.

III. *Si $a_1, a_2, \ldots$ est une suite infinie de nombres positifs tels que l'on a pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(6) \qquad a_{n+1} \leqslant K \cdot \frac{a_1 + \ldots a_n}{n}$$

où K est une constante positive, alors on a

$$(7) \qquad a_n \leqslant (1+K)\left(1+\frac{K}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{K}{n-2}\right)\frac{Ka_1}{n-1} \leqslant Ke^K(n-1)^{K-1}.$$

Remarque. Bien que ce théorème ait été appliqué à la théorie des fonctions par plusieurs auteurs [3]), il n'a pas été, à ma connaissance, formulé explicitement jusqu'à présent.

En posant $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ on peut remarquer [4]) qu'il suffit de considérer le cas où $na_{n+1} = KS_n$. On a alors $S_{n+1} = S_n(1+K/n)$, d'où, en tenant compte de (6), on obtient par induction la première des inégalités (7). La seconde inégalité (7) s'obtient en profitant des relations $1+x<e^x$ et $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-2}<1+\log(n-2)$. Il est clair que ce résultat s'obtiendrait aussi de la théorie générale des équations aux différences finies.

On peut cependant obtenir un résultat à un certain point de vue plus précis que l'inégalité (7):

III a. *Dans les conditions de l'énoncé* III *et si* $0<K\leqslant 1$ *ou* $K\geqslant 2$, *on a l'inégalité*

$$a_n \leqslant n^{K-1} a_1.$$

Dans le cas où $K\leqslant 1$ la suite a_n est donc bornée. Cela résulte aussi directement du fait que dans ce cas la moyenne arithmétique ne croît pas.

Nous établirons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Si* n *est un entier positif et* K *un nombre positif, on a*

$$\frac{K(1+2^{K-1}+\ldots+n^{K-1})}{n(n+1)^{K-1}}<1$$

si $K<1$ *ou si* $K>2$, *et l'inégalité contraire si* $1<K<2$. *Lorsque* $K=1$ *ou* $K=2$, *on a le signe d'égalité* [5]).

Si $n=1$ le premier membre est $K:2^{K-1}$ et l'on constate de suite l'exactitude de notre assertion. Supposons que les inégalités soient établies pour n, c.-à-d. que l'on ait $E_n = K(1+2^{K-1}+\ldots+n^{K-1}) - n(n+1)^{K-1} \leqslant 0\ (\geqslant 0)$ et faisons voir que $E_{n+1}\leqslant 0\ (E_{n+1}\geqslant 0)$. Il suffit pour cela d'établir que $E_{n+1}-E_n = (n+K)(n+1)^{K-1} - (n+1)\ (n+2)^{K-1} \leqslant 0)\ (\geqslant 0)$ c.-à-d. que $(n+K)\ (n+1)^{K-2} - (n+2)^{K-1} \leqslant 0\ (\geqslant 0)$. En prenant les logarithmes on obtient l'inégalité

$$H(K) = \log(n+K) - K\log\frac{n+2}{n+1} + \log(n+2) - 2\log(n+1) \leqslant 0)\ (\geqslant 0).$$

---

[3]) cf. par exemple G. M. Goluzin, *Geometriczeskaja teoria funkcji kompleksnowo pieremiennowo*, Moscou, 1952, p. 218, et O. Tammi, Annales Acad. Sc. Fennicae. Helsinki 1952, A I No 114, p. 10, theorem 1.

[4]) Cette démonstration est due à M. C. Ryll-Nardzewski.

[5]) Je n'utilise dans la suite que les cas où $K<1$ ou $K>2$.

On vérifie de suite que pour K assez grand et pour K voisin de 0 on a $H(K) < 0$ (cela résulte de la concavité de la fonction logarithmique). Pour $K=1$ et $K=2$ on a $H(K)=0$; comme $H'(K) = \frac{1}{n+K} - \log\frac{n+2}{n+1}$, $H(K)$ a un seul extremum, cette fonction ne s'annule donc que pour $K=1$ et $K=2$ et, par suite, elle est négative pour $0<K<1$, $K>2$, et positive pour $1<K<2$.

Posons maintenant $a_n = n^{K-1} b_n$ $(n=1,2,\dots)$; l'inégalité (5) prend alors la forme

$$(*)\qquad b_{n+1} \leqslant K \cdot \frac{b_1 + 2^{K-1} b_2 + \dots + n^{K-1} b_n}{n(n+1)^{K-1}}, \qquad 0<K\leqslant 1 \text{ ou } K\geqslant 2).$$

En posant $n=1$ on a d'abord $b_2 \leqslant \frac{K}{2^{K-1}} b_1$, donc $b_2 \leqslant b_1$. Supposons démontré que $b_2 \leqslant b_1$, $b_3 \leqslant b_1, \dots, b_n \leqslant b_1$; il résulte de $(*)$ et du lemme que l'on a $b_{n+1} \leqslant b_1$. On a donc $b_n \leqslant b_1$ pour tout n naturel, ce qui équivaut à l'énoncé III a.

La proposition III a des applications dans la théorie des fonctions analytiques (cf. le renvoi [3]). Soit par exemple

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

une fonction holomorphe dans le voisinage de l'origine et ne s'annulant pas, sauf pour $z=0$, dans ce voisinage. La fonction

$$g(z) = \sqrt[s]{f(z^s)} = z + c_1 z^{s+1} + \dots + c_n z^{ns+1} + \dots$$

où l'on a choisi une branche déterminée du radical, est holomorphe dans le voisinage de l'origine; elle y est aussi s-symétrique, car, si ω est une racine s-ème de l'unité, on a $g(z\omega) = \omega g(z)$. La fonction $zf' : f$ est holomorphe dans le voisinage de l'origine. Posons

$$\frac{zf'}{f} = 1 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

On a

$$\frac{zg'}{g} = 1 + b_1 z^s + \dots + b_n z^{ns} + \dots$$

L'identité

$$zg' = \frac{zg'}{g} \cdot g$$

fournit, en égalant les coefficients de z^{ns+1} des deux membres, les relations

$$(ns+1)\,c_n = c_n + b_1\,c_{n-1} + \ldots + c_1\,b_{n-1} + b_n$$

ou

$$c_n = \frac{b_1\,c_{n-1} + \ldots + c_1\,b_{n-1}}{ns}.$$

Supposons que $|b_n| < p$, $n = 1, 2, \ldots$, où p est une constante; on aura

$$|c_n| < \frac{p}{s} \cdot \frac{|c_1| + \ldots + |c_{n-1}|}{n-1}.$$

On peut donc appliquer les théorèmes III et III a pour évaluer l'ordre de grandeur des coefficients c_n. Par exemple, si $p/s \leqslant 1$ ou si $p/s \geqslant 2$, le théorème III a fournit l'inégalité

$$|c_n| < |c_1|\,n^{\frac{p}{s}-1}.$$

§ 4. En remplaçant dans l'énoncé III la moyenne arithmétique du premier ordre par celle du second ordre on obtient l'inégalité

$$a_{n+1} \leqslant K \cdot \frac{n a_1 + (n-1)\,a_2 + \ldots + a_n}{\dfrac{n(n+1)}{2}}, \tag{8}$$

dont nous allons nous occuper maintenant. Il suffirait évidemment de considérer le cas d'égalité. L'équation obtenue serait une équation aux différences finies linéaire et du second ordre par rapport à la variable $n a_1 + (n-1)\,a_2 + \ldots + a_n$. Il semble cependant plus simple de remplacer cette équation par une équation différentielle. Dans ce but nous introduisons de nouveau la fonction „en escalier" $f(x)$, définie comme il suit:

$$\text{pour} \quad n-1 \leqslant x < n \qquad f(x) = a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et commençons par observer que l'inégalité (8) peut s'écrire

$$n(n+1)\,f(n) \leqslant 2K \int_0^n \left(n + \frac{1}{2} - t\right) f(t)\,dt.$$

Remplaçons dans le membre gauche de cette inégalité $n(n+1)$ par n^2 et considérons une valeur quelconque x de l'intervalle $n \leqslant x < n+1$; on aura

$$x^2 f(x) < 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 K \int_0^x \left(x + \frac{1}{2} - t\right) f(t)\,dt. \tag{8'}$$

Si ε est arbitrairement petit et n assez grand, on a $(n+1)^2:n^2<1+\varepsilon$; en posant $K(1+\varepsilon)=K'$ on aura donc pour tout x assez grand:

$$x^2 f(x) < 2K' \int_0^x \left(x+\frac{1}{2}-t\right) f(t)\,dt.$$

En remplaçant x par $x+\frac{1}{2}$ on aura, a fortiori,

$$x^2 f\left(x+\frac{1}{2}\right) < 2K' \int_0^{x+\frac{1}{2}} (x+1-t)\, f(t)\,dt =$$

$$= 2K' \int_0^{x+\frac{1}{2}} \left(x+\frac{1}{2}-t\right) f(t)\,dt + K' \int_0^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt.$$

Posons maintenant

$$y(x) = \int_0^{x+\frac{1}{2}} \left(x+\frac{1}{2}-t\right) f(t)\,dt;$$

on a

$$y'(x) = \int_0^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad y''(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

(y'' n'existe pas au points $x=n+\frac{1}{2}$, n étant entier). Donc la dernière inégalité peut s'écrire

(9) $$x^2 y'' < 2K'y + K'y'.$$

Considérons une intégrale $z(x)$ de l'équation

(10) $$x^2 z'' = 2K'z + K'z',$$

qui satisfait aux conditions initiales $z(x_0)=y(x_0)$, $z'(x_0)=y'(x_0)$ (x_0 est un nombre quelconque assez grand). En vertu de raisonnements bien connus on a $y(x)<z(x)$ et $y'(x)<z'(x)$ pour $x>x_0$. Après le changement de variable $x=e^t$ l'équation (10) devient:

(10') $$\frac{d^2 z}{dt^2} = (1+K'e^{-t})\frac{dz}{dt} + 2K'z.$$

Pour évaluer $z(t)$ on peut remarquer que l'on a, pour t assez grand,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} < (1+\varepsilon)\frac{dz}{dt} + 2K'z$$

où ε est un nombre positif arbitrairement petit. Une nouvelle comparaison avec l'intégrale $u(t)$ de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - (1+\varepsilon)\frac{du}{dt} - 2K'u = 0 \tag{11}$$

qui satisfait aux conditions $u(t_0) = z(t_0)$, $u'(t_0) = z'(t_0)$, conduit aux inégalités $z < u$, $dz/dt < du/dt$ pour $t > t_0$. L'intégrale générale de (11) étant

$$u(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

où

$$s_1 = \frac{1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2+8K'}}{2}, \quad s_2 = \frac{1+\varepsilon-\sqrt{(1+\varepsilon)^2+8K'}}{2},$$

on a donc, pour t assez grand, $u(t) < C e^{s_1 t}$ et $dz/dt < C s_1 e^{s_1 t}$, où C est une constante. Il en résulte que $y < z < C x^{s_1}$ et

$$\frac{dy}{dx} < \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot e^{-t} < C s_1 x^{s_1 - 1},$$

donc, en vertu de (8)

$$y'' < K'C\left(2 + \frac{s_1}{x}\right) x^{s_1-2} < C' x^{s_1-2}$$

où C' est une nouvelle constante. En posant dans la dernière équation $x = n-1$ on a enfin l'inégalité

$$a_n < C'' n^{s_1-2} \qquad (C'' \text{ constante}).$$

En tenant compte de ce que $K' = K(1+\varepsilon)$, de la valeur de s_1, du fait que ε est de l'ordre de $1/n$ (cf. les relations (8′) et (10′)), et de la relation $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, on obtient en définitive l'énoncé suivant.

IV. *Si $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ est une suite infinie de nombres positifs tels que l'on a pour $n = 1, 2, \ldots$*

$$a_{n+1} \leqslant K \cdot \frac{n a_1 + (n-1) a_2 + \ldots + a_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{8}$$

où K est une constante positive, on a

$$a_n < C n^{\frac{\sqrt{1+8K}-3}{2}}$$

où C est une constante qui ne dépend pas de n [6]).

On voit, en particulier, que si $K \leqslant 1$, la suite a_n est bornée, et si $K < 1$ elle tend vers zéro.

Streszczenie

Nawiązując do pewnego wyniku F. Riesza udowadniam twierdzenia:

I. Jeżeli ciąg liczb dodatnich a_n spełnia dla dowolnego naturalnego n i h, $n > h$, nierówność

$$(1) \qquad \frac{a_{h+1} + a_{h+2} + \ldots + a_n}{n-k} \leqslant K a_h$$

(K stałe), to jest $a_n = 0\,(n^{1-\frac{1}{K}})$.

II. Jeśli nierówność (1) zastąpić przez nierówność

$$\frac{(n-h)\,a_{h+1} + (n-h-1)\,a_{h+2} + \ldots + 2a_{n-1} + a_n}{\frac{(n-h)(n-h+1)}{2}} \leqslant K a_h$$

to jest

$$a_n = 0\,(n^{2-\frac{2}{K}}).$$

Znajduję również następujące oszacowania:

III. Jeśli dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} < K \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

przyczem $0 < K \leqslant 1$ lub $K \geqslant 2$, to jest $a_n \leqslant n^{K-1} \cdot a_1$.

---

[6]) Il résulte de la proposition de M. J. Krzyż citée au renvoi [2]) que si la suite a_n est croissante, l'inégalité (8) entraîne l'inégalité (6).

IV. Jeśli dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \leqslant K \cdot \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + a_n}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

przyczem $K > 0$, to jest $a_n = 0(n^{\frac{\sqrt{1+8K}-3}{2}})$.

Резюме

Навязывая к некоторому результату Ф. Рисса доказываю теоремы:

I. Если последовательность положительных чисел a_n удовлетворяет для произвольного натурального n и h, $n > h$, неравенству

$$\frac{a_{h+1} + a_{h+2} + \ldots + a_k}{n-h} \leqslant Ka_n \tag{1}$$

(K постоянная) то $a_n = 0(n^{1-\frac{1}{K}})$.

II. Если неравенство (1) заменить неравенством

$$\frac{(n-h)a_{h+1} + (n-h-1)a_{h+2} + \ldots + 2a_{n-1} + a_n}{\frac{(n-h)(n-h+1)}{2}} \leqslant Ka_h$$

то $a_n = 0(n^{2-\frac{2}{K}})$.

Нахожу тоже следующее оценки

III. Если для каждого натурального n имеет место неравенство

$$a_{n+1} < K\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

причем $0 < K \leqslant 1$ или $K \geqslant 2$, то $a_n \leqslant n^{K-1} \cdot a_1$.

IV. Если для каждого натурального n имеет место неравенство

$$a_{n+1} \leqslant K\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + a_n}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

причем $K > 0$, то $a_n = 0(n^{\frac{\sqrt{1+8K}-3}{2}})$.

Резюме

Пользуясь результату Ф. Рисса положим теорему:

I. Если последовательность неотрицательных чисел a_n удовлетворяет для каждого натурального n неравенству

$$\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \le K a_n \quad (1)$$

и постоянная, то $a_n = O(n^{1-\frac{1}{K}})$.

II. Если неравенство (1) заменить неравенством

$$\frac{(n-k)a_1+(n-k-1)a_2+\dots+2a_{n-k-1}+a_{n-k}}{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}} \le K a_n$$

то $a_n = O(n^{2-\frac{2}{K}})$.

Поэтому имеет следующее место

III. Если для каждого натурального n имеет место неравенство

$$a_{n+1} \le \frac{a_1+\dots+a_n}{n} K$$

причем $0<K<1$ или $K>2$, то $a_n = o(n^{K-1})$.

IV. Если для каждого натурального n имеет место неравенство

$$a_{n+1} \le K\frac{na_1+(n-1)a_2+\dots+a_n}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

причем $K>0$, то $a_n = O(n^{2K-1})$.