ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VI, 5 SECTIO A 1952

Z Seminarium Matematycznego I Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur la dérivée logarithmique des intégrales des équations différentielles linéaires

O pochodnej logarytmicznej całek równań różniczkowych liniowych

О логарифмической производной интегралов дифференциальных линейных уравнений

§ 1. Le but de cet article est d'indiquer quelques limitations supérieures des dérivées logarithmiques ou des expressions analogues des intégrales de certaines équations linéaires homogènes d'ordre n. Il s'agira des intégrales $y(x)$ qui tendent vers l'infini lorsque $x \to \infty$, en même temps que leurs dérivées de n premiers ordres. Je vais établir d'abord le résultat général suivant.

Théorème I. *Soit $A(x)$ une fonction positive non décroissante et continûment dérivable pour $x \geqslant x_0$, telle que $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = +\infty$. Si la fonction $y(x)$ satisfait pour $x > x_0$ aux conditions:*

$$y > 0, \quad y' > 0, \ldots, \quad y^{(n-1)} > 0, \quad 0 < \frac{y^{(n)}}{y} \leqslant A(x)$$

alors on a pour $x > x_1$ des inégalités:

$$\frac{y'}{y} < n!\,[A(x)]^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{y''}{y} < n(n-1)\ldots 3\,[A(x)]^{\frac{2}{n}}, \ldots,$$

$$\frac{y^{(k)}}{y} < n(n-1)\ldots(k+1)\,[A(x)]^{\frac{k}{n}}, \ldots, \frac{y^{(n-1)}}{y} < n\,[A(x)]^{\frac{n-1}{n}}$$

Dans ces inégalités les exposants $1/n, 2/n, \ldots, n-1/n$ ne peuvent être diminués et on déduit de la première que

$$y(x) < C e^{n!\int\limits_{x_0}^{x} [A(x)]^{1/n}\,dx}$$

où C est une constante.

Les conditions du théorème I sont remplies, par exemple, par des intégrales de l'équation $y^{(n)} = A(x)\,y$ qui satisfont aux conditions initiales: $y(x_0) > 0,\; y'(x_0) > 0, \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) > 0$.

Démonstration. En multipliant l'inégalité $y^{(n)} - Ay \leqslant 0$ par $2\,y^{(n-1)}$ et en intégrant par parties on a:

$$\{[y^{(n-1)}]^2 - 2\,Ay \cdot y^{(n-2)}\}_{x_0}^{x} + 2\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}(Ay)\,y^{(n-2)}\,dx \leqslant 0.$$

En vertu des hypothèses faites l'intégrale est positive et tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc pour x assez grand on a nécessairement

$$[y^{(n-1)}]^2 - 2\,Ay \cdot y^{(n-2)} < 0$$

En multipliant cette inégalité par $3\,y^{(n)}$ on a

$$3\,[y^{(n-1)}]^2 \cdot y^{(n)} - 3!\,Ay\,y^{(n-2)}\,y^{(n)} < 0$$

et en tenant compte de l'inégalité $y^{(n)} \leqslant Ay$ *a fortiori*

$$3\,[y^{(n-1)}]^2\,y^{(n)} - 3!\,(Ay)^2\,y^{(n-2)} < 0.$$

En intégrant par parties il vient:

$$\{[y^{(n-1)}]^3 - 3!\,(Ay)^2\,y^{(n-3)}\}_{x_0}^{x} - 3!\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}(Ay)^2 \cdot y^{(n-3)}\,dx < 0$$

et comme l'intégrale tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ on a pour x assez grand

$$[y^{(n-3)}]^3 - 3!\,(Ay)^2\,y^{(n-3)} < 0$$

En continuant le procédé qui vient d'être décrit on obtient l'inégalité

$$[y^{(n-1)}]^n - n!\,(Ay)^{n-1}\,y < 0$$

qui peut s'écrire:

$$\frac{y^{(n-1)}}{y} < \sqrt[n]{n!}\,A^{\frac{n-1}{n}} < n\,A^{\frac{n-1}{n}}$$

et constitue la dernière inégalité de l'énoncé. En remplaçant maintenant dans tous ce qui précède n par $n-1$ et la fonction A par $n\,A^{\frac{n-1}{n}}$ on obtient

$$\frac{y^{(n-2)}}{y} < (n-1)\left(nA^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} < n\,(n-1)\,A^{\frac{n-2}{n}}$$

En remplaçant n par $n-2$ et A par $n(n-1)A^{\frac{n-2}{n}}$ on obtient

$$\frac{y^{(n-3)}}{y} < (n-2)\,[n(n-1)]^{\frac{n-3}{n-2}} A^{\frac{n-3}{n}} < n(n-1)(n-2)A^{\frac{n-3}{n}}$$

En continuant ce procédé on obtient successivent toutes les inégalités de l'énoncé.

Pour voir que les exposants $1/n$, $2/n, \ldots, n-1/n$ ne peuvent être diminués considérons l'équation $y^{(n)} = A(x)\,y$ où

$$A(x) = e^{-x^2} \frac{d^n e^{x^2}}{dx^n}$$

$A(x)$ est positive et croissante pour x assez grand et l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)\,x^n = 2^n$. L'intégrale $y = e^{x^2}$ de l'équation satisfait aux relations

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{y^{(k)}}{y} : A^{\frac{k}{n}}\right] = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

§ 2. Dans le cas où $n = 2$ on peut obtenir un énoncé plus précis.

Théorème II. *Si y, y', y'' sont positives dans un intervale $a \leqslant x \leqslant b$ et si l'on a dans cet intervalle*

$$\operatorname{Min}\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y'}\right) \leqslant [A(x)]^{\frac{1}{2}}$$

où $A(x)$ est une fonction positive et non décroissante, on a aussi dans (a, b) l'inégalité

$$\frac{y'}{y} \leqslant \operatorname{Max}\left\{\frac{y'(a)}{y(a)}, [A(x)]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Pour établir le théorème il suffit de remarquer que de l'inégalité $y' : y > [A(x)]^{\frac{1}{2}}$ il résulte que $(y'' : y') < (y' : y)$, or cette inégalité exprime le fait que y'/y décroit. Les hypothèses de ce théorème sont évidemment verifiées lorsque $y''/y \leqslant A(x)$, il entraîne donc l'énoncé I dans le cas où $n = 2$ mais avec la suppression de la constante 2.

Admettons maintenant, les hypothèses du théorème I où $n = 2$ étant conservées, que $y'' = A(x)\,y$. Nous dirons pour abréger qu'une fonction est *oscillante pour* $x > x_0$ si elle a pour $x > x_0$ une infinité des maxima et minima dont les abscisses tendent vers $+\infty$. On voit aisément que $u = y'/y$ satisfait à l'équation $u' + u^2 = A(x)$, $A(x)$ étant non décroisante, il en résulte de suite que u ne peut être oscillante. Si u finit par décroître lorsque $x \to +\infty$ on a $u > \sqrt{A}$, ce n'est donc possible que si A reste bornée; donc puisque A n'est pas bornée u finit par croître et *l'on a donc à partir d'une valeur de* x $y'/y < y''/y$. D'autre part on a $(u'+u)^2 > A$, $u'+u > \sqrt{A}$. En vertu de la formule qui donne la solution de l'équation linéaire de 1° ordre on déduit de la dernière l'inégalité une *limitation inférieure* de u:

$$u > e^{-x}\left[C + \int_{x0}^{x} \sqrt{A}\, e^x\, dx\right]$$

où C est une constante.

§ 3. Passons au cas où $n = 3$. En conservant les hypothèses du § 1 relatives à la fonction $A(x)$ continument dérivable et en supposant que $y'''(x) = A(x)\,y$, $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$, $y''(x_0) > 0$ on obtient pour $u = y'/y$ l'équation différentielle

$$u'' + 3uu' + u^3 - A = 0$$

En multipliant le premier membre par u' et en intégrant par parties il vient

$$\left(\frac{u'^2}{2} + \frac{u''}{4} - Au\right)_{x0}^{x} + \int_{x0}^{x} (3uu'^2 + A'u)\,dx = 0$$

donc $u'^2/2 + u''/4 - Au < C$ (C — constante). Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$ on obtient *a fortiori* pour $x > x_1$

$$u = \frac{y'}{y} < \sqrt[3]{4}\,[A(x)]^{\frac{1}{3}} + \varepsilon$$

où ε est arbitrairement petit.

Ce résultat montre que les coefficients $n!, n \ldots 3, \ldots, n$ de l'énoncé I ne sont sans doute pas les meilleurs possibles. Est-il possible de les remplacer par une constante absolue? En supposant que $n = 3$ et que $A(x)$ satisfait à une condition supplémentaire j'ai pu les remplacer par 1, j'ai obtenu, en effet, l'énoncé suivant:

Théorème III. *Si* $A(x)$ *est une fonction positive, croissante et quatre fois dérivable pour* $x \geqslant x_0$, *telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$ *et si* A'/A *non décroît alors tout intégrale de l'équation* $y''' = A(x)\,y$ *pour laquelle* $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$, $y''(x_0) > 0$ *satisfait pour* x *assez grand aux inégalités:*

(A) $$\frac{y'}{y} < [A(x)]^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y''}{y} < [A(x)]^{\frac{2}{3}}$$

De plus, si y'/y n'est pas borné (ce cas se présente toujours lorsque $A'/A \to \infty$) on a pour x assez grand:

(B) $$\frac{y'}{y} < \frac{y''}{y'} < \frac{y'''}{y''} < \frac{y^{\mathrm{IV}}}{y'''}$$

Démonstration. Posons pour abréger $y'/y = u_1$, $y''/y' = u_2$, $y'''/y'' = u_3$, $y^{\mathrm{IV}}/y''' = u_4$. En supposant toujours que y et ses dérivées sont positives nous allons faire d'abord quelques remarques générales sur les fonctions u_i (ces remarques s'appliquent évidemment aussi dans le cas de n quelconque). Il est facile de vérifier que pour un indice i quelconque l'on a $u_i' = u_i(u_{i+1} - u_i)$, donc u_i croît si $u_{i+1} > u_i$ et décroît si $u_{i+1} < u_i$, les extréma de u_i sont donc identiques avec les points d'intersection de la courbe $y = u_i(x)$ avec la courbe $y = u_{i+1}(x) \cdot u_{i+1}$ est décroissante en un maximum de u_i et croissante et un minimum, u_{i+1} a donc un nombre impair des extréma entre deux extréma successifs de u_i. Analytiquement ce fait s'énonce sous la forme du lemme suivant:

Lemme. *$y(x)$ étant une fonction positive ainsi que ses dérivées de 2 premiers ordres, il y a entre deux racines consécutives de l'équation $yy'' - y'^2 = 0$ un nombre impair de racines de l'équation $y'y''' - y''^2 = 0$* [1]).

Il résulte de ce qui précède que si u_i est borné il en est de même avec u_{i-1} et que si u_i est oscillante il en est de même avec u_{i+1}. Dans le cas des fonctions remplissant les conditions du théorème III on a $u_1 u_2 u_3 \equiv A(x)$, donc $u_1'/u_1 + u_2'/u_2 + u_3'/u_3 \equiv A'(x)/A(x)$ c.-à-d. $(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) = u_4 - u_4 \equiv A'(x)/A(x)$. En vertu de l'hypothèse faite on a donc toujours $u_4 > u_1$ et la différence $u_4 - u_1$ est non décroissante.

Supposons d'abord que u_1 est borné. Alors $\varliminf\limits_{x \to +\infty} u_3$ est bornée, en effet si $\lim u_3 = y'''/y'' = \infty$ on en déduit en intégrant successivement que $\lim u_2 = \infty$ et $\lim u_1 = \infty$. Donc ou bien u_3 décroit ou bien est oscillante, dans le premier cas $u_4 < u_3$ et dans le deuxième cas $u_4 = u_3$ en une infinité de minima de u_3, donc en tout cas $\varliminf\limits_{x \to +\infty} u_4$ serait borné. Or $u_4 = u_1 + A'/A$ cela n'est donc possible que si A'/A est borné, alors u_4 est borné donc aussi u_3 et u_2. $A(x)$ croissant indefiniment lorsque $x \to +\infty$ les inégalités (A) de l'énoncé III sont donc évidentes.

Supposons en second lieu que u_1 n'est pas borné. Alors ou bien u_1 est croissante à partir d'une valeur de x ou bien elle est oscillante.

---

[1]) J'ignore si l'on a étudié systématiquement des expressions différentielles qui admettent un «théorème de Rolle» analogue.

Supposons d'abord que u_1 croit indéfiniment, alors il en est de même avec $u_4 = u_1 + A'/A$. En vertu des remarques que nous avons faites auparavant, on a constamment $u_2 > u_1$ donc $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} u_2 = \infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} u_3 = \infty$. Mais u_4 étant croissante u_2 et u_3 ne peuvent être oscillantes. Ainsi toutes les fonctions u_1, u_2, u_3, u_4 sont croissantes et l'on a par suite $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ c.-à-d. les inégalités (B) de l'énoncé. Les inégalités (A) en résultent immédiatement en tenant compte de ce que $u_1 u_2 u_3 = A(x)$.

Pour achever la démonstration du théorème III il suffira de montrer que si u_1 *n'est pas bornée elle ne peut être oscillante.* Supposons que ce cas puisse se présenter. Alors toutes les fonctions u_1, u_2, u_3, u_4 sont oscillantes. On sait qu'il existe une suite x_n indéfiniment croissante des valeurs de x telles que pour ces valeurs $u_1(x)$ a les maxima et que pour $x_0 \leqslant x < x_n$, $u_1(x) < u_1(x_n)$. Désignons pour simplifier par X une valeur x_n et posons $u_1(X) = Y$. D'après ce qui précède la courbe u_2 $(y = u_2(x))$ passe par le point $E(X, Y)$ en décroissant et l'on a $u_3(X) < Y$. Désignons par D celui des points d'intersection de la courbe u_4 avec la droite $y = Y$ qui est le plus près à gauche du point E, soit d l'abscisse du point D, M le point de coordonnées $(X, u_4(X))$. La fonction u_3 qui croit pour $x = X$ car $u_3(X) < u_4(X)$ est croissante dans tout l'intervalle (d, X), autrement elle y aurait un minimum au point ξ où l'on aurait $u_4(\xi) < Y$ contrairement à la définition du nombre D. On a donc $u_3 < Y$ dans l'intervalle (d, X). Il en résulte que la fonction u_2 est décroissante dans cet intervalle, autrement elle y aurait un maximum plus grand que Y et l'on y aurait $u_3 > Y$. En particulier on a $u_2 > Y$ dans l'intervalle (d, X). u_1 est croissante dans (d, X) car autrement elle y aurait um minimum plus petit que Y et on y aurait $u_2 < Y$. *A fortiori* $u_4 = u_1 + A'/A$ est croissante dans (d, X). L'arc DM de la fonction croissante u_4 et l'arc GE de la fonction décroissante u_2 (G est le point de cet arc dont l'abscisse est d) se coupent en un seul point T de l'abscisse t. Il est clair enfin que la courbe u_3 coupera la courbe u_1 à gauche du point E, car en ce point $u_3 < u_1$ mais u_3 est oscillante et en ses extréma coupe u_4, donc se trouve au-dessus de la courbe u_1. Désignons par F ceux de ces points dont l'abscisse f est la plus grande. Je dis que $f < t$. En effet, au point F on a $u_1 = u_3$ et $u_3' \leqslant u_1'$ c.-à-d. $u_3(u_4 - u_3) \leqslant u_1(u_2 - u_1)$ ou $u_4 \leqslant u_2$. Nous allons maintenant distinguer deux cas:

1° cas: $f \leqslant d$ (fig. 1).

Désignons par Q et G les points des courbes u_1 et u_2 respectivement dont l'abscisse est d. On a $u_1' = u_1(u_2 - u_1)$ et $u_2' = u_2(u_3 - u_2)$ donc pour $d < x < X$ $|u_1'| < |u_2'|$, il en résulte en intégrant que $GD > DQ$. Il est clair que la courbe u_8 a pour $x < d$ des maxima supérieurs à G, il en résulte que la courbe u_3 possède aussi des maxima de cet espèce pour $x < d$, or en ces points $u_3 = u_4$. Ici on arrive à une contradiction car pour $x < d$ on a $u_1 < Y$ donc, A'/A étant non décroissante, $u_4 < Y + DQ < Y + DG$.

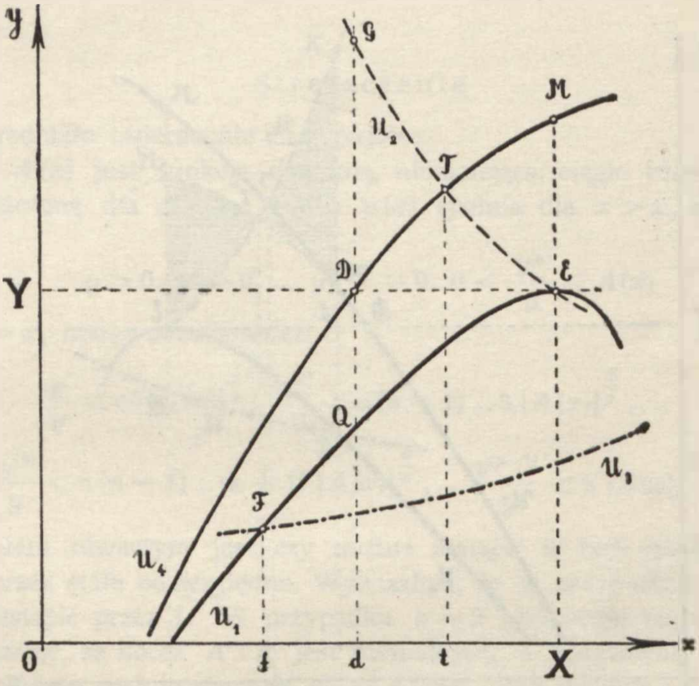

fig. 1

2° cas: $f > d$ (fig. 2).

Désignons par H, K et L des points des courbes u_2, u_4 et de la droite $y = Y$ respectivement dont l'abscisse est f, on a $u_2' < 0$ et $u_2'' = u_2 (2 u_2^2 + u_3 u_4 - 3 u_2 u_3)$. Or $2 u_2^2 + u_3 u_4 - 3 u_2 u_3 = 2 u_2 (u_2 - u_3) + u_3 (u_4 - u_2) > u_3 (u_2 + u_4 - 2 u_3)$ et $u_2 > u_3$, $u_4 > u_3$, donc $u_2'' > 0$. Traçons un arc KM' parallèle à l'arc FE de u_1.

Désignons par T' le point d'intersection de cet arc avec l'arc HE de u_2 et par M' le point de cet arc dont l'abscisse est X. A'/A étant non décroissante l'arc $KT'M'$ passe au-desous de l'arc KTM. Si l'équation de l'arc $KT'M'$ est $y = z(x)$ on a $z''(x) = u_1'' = u_1 (2u_1^2 + u_2 u_3 - 3 u_1 u_2)$. Or

$2u_1^2 + u_2u_3 - 3u_1u_2 = 2u_1(u_1 - u_2) + u_2(u_3 - u_1)$, donc $z''(x) < 0$. *Supposons que* $HK < KF = M'E$, il résulte de cette hypothèse et des inégalités $u_2' < 0$, $u_2'' > 0$, $z' > 0$, $z'' < 0$ que si t' est l'abscisse de T' on a $t' - f < X - t'$. Il résulte encore de ces mêmes relations que le segment de la droite $x = f + \delta\,(\delta > 0)$ contenu dans le domaine HKT' (cf. la fig. 2) est plus petit que le segment de la droite $x = X - \delta$ contenu

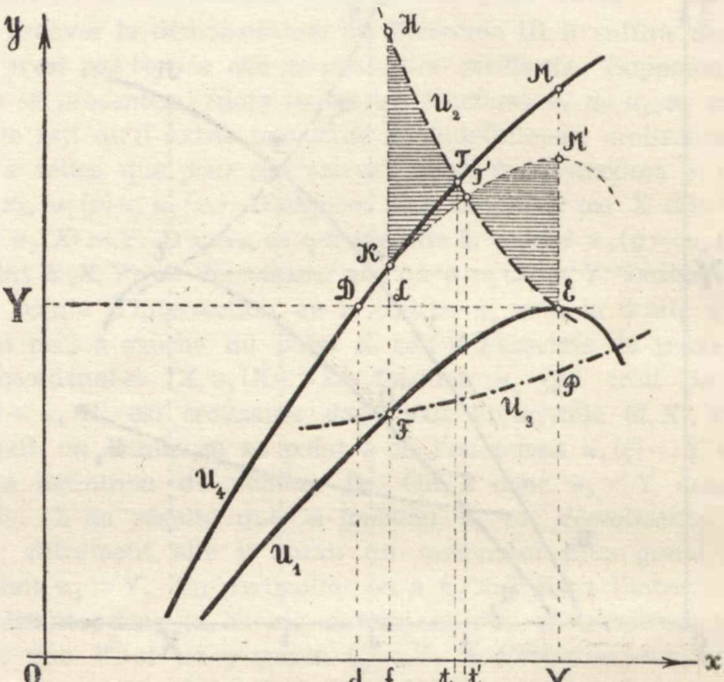

fig. 2

dans le domaine $T'EM'$. Puisque $t' - f < X - t'$ il en résulte que l'aire du domaine HKT' est plus petite que celle du domaine $T'EM'$. *A fortiori* l'aire HKT est plus petite que l'aire TEM c.-à-d. on a $\int_f^x (u_4 - u_2)\,dx > 0$ ou encore $\int_f^x (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3)\,dx > 0$. En vertu de la formule $u_i' = u_i(u_{i+1} - u_i)$ ceci signifie que $(\log u_2)_f^x + (\log u_3)_f^x > 0$, ou encore, P étant le point de l'arc u_3 dont l'abscisse est X, que la différence des logarithmes des ordonnées des points P et F serait supérieure à celle des logarithmes des points H et E; *a fortiori* on aurait $\log u_1(X) - \log u_1(f) > \log u_2(f) - \log u_2(X)$. Or pour $f < x < X$ on a $|u_2 - u_1| < |u_3 - u_2|$ c.-à-d. $\left|\frac{u_1'}{u_1}\right| < \left|\frac{u_2'}{u_2}\right|$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité précédente. Ainsi l'hypothèse $HK < M'E$ est inadmissible et l'on a $HK \geqslant M'E = KF$. On achève la démonstration comme dans le premier cas les points F, K, H jouant le même rôle que les points Q, D, G auparavant.

Streszczenie

Udowadniam twierdzenie następujące:

Jeśli $A(x)$ jest funkcją dodatnią, niemalejącą, ciągle różniczkowalną i nieograniczoną dla $x \geqslant x_0$ i jeśli $y(x)$ spełnia dla $x > x_0$ nierówności

$$y > 0,\ y' > 0, \ldots,\ y^{(n-1)} > 0,\ 0 < \frac{y^{(n)}}{y} \leqslant A(x)$$

to dla $x > x_1$ mamy nierówności:

$$\frac{y'}{y} < n!\,[A(x)]^{\frac{1}{n}},\quad \frac{y''}{y} < n(n-1)\ldots 3\,[A(x)]^{\frac{2}{n}},\ldots,$$

$$\frac{y^{(k)}}{y} < n(n-1)\ldots(k+1)\,[A(x)]^{\frac{k}{n}},\ldots,\ \frac{y^{(n-1)}}{y} < n\,[A(x)]^{\frac{(n-1)}{n}}$$

Zagadnieniem otwartym jest czy można zastąpić w tych nierównościach $n!, \ldots, n$ przez stałe bezwzględne. Wykazałem, że w przypadku $n = 2$ dają się one zastąpić przez 1. W przypadku $n = 3$ otrzymuję ten sam wynik przypuszczając, że iloraz $A' : A$ jest niemalejący a poczwórnie różniczkowalna funkcja y spełnia równość $y''' = A(x)\,y$. Jeśli ponadto $(A' : A) \to +\infty$ to zachodzą dla x dość dużego nierówności

$$\frac{y'}{y} < \frac{y''}{y'} < \frac{y'''}{y''} < \frac{y^{\mathrm{IV}}}{y'''}.$$

Резюме

Доказываю следующую теорему:

Если $A(x)$ является положительной, неубывающей, непрерывно дифференцируемой и неограниченной для $x \geqslant x_0$ функцией, и если $y(x)$ удовлетворяет для $x > x_0$ неравенствам

$$y > 0,\ y' > 0, \ldots,\ y^{(n-1)} > 0,\ 0 < \frac{y^{(n)}}{y} \leqslant A(x)$$

то для $x > x_1$ имеем неравенства

$$\frac{y'}{y} < n! \, [A(x)]^{\frac{1}{n}}, \ \frac{y''}{y} < n(n-1)\dots 3\, [A(x)]^{\frac{2}{n}}, \dots,$$

$$\frac{y^{(k)}}{y} < n(n-1)\dots(k+1)\,[A(x)]^{\frac{k}{n}}, \ \frac{y^{(n-1)}}{y} < n\,[A(x)]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Открытым является вопрос: можно-ли заменить в этих неравенствах $n!, \dots, n$ абсолютными постоянными. Доказываю, что для $n=2$ можно их заменить числом 1. Для $n=3$ получаю тот-же результат при предположении, что $A' : A$ является функцией неубывающей, имеющей производные до четвертой включительно и y удовлетворяет равенству $y''' = A(x)\,y$. Если кроме того $(A' : A) \to +\infty$, то для x достаточно большого имеют место неравенства:

$$\frac{y'}{y} < \frac{y''}{y'} < \frac{y'''}{y''} < \frac{y^{\mathrm{IV}}}{y'''}.$$