ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VI, 3 SECTIO A 1952

Z Seminarium Matematycznego III. Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: z. prof. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Une théorie généralisée de la meilleure approximation

Uogólniona teoria najlepszej aproksymacji

Обобщенная теория наилучшей аппроксимации

Le travail présent a pour but l'étude de la généralisation de la théorie de la meilleure approximation.

Les § 1 et § 2 sont consacrés à une esquisse de la théorie bien connue des polynômes généralisés de la meilleure approximation et à l'introduction d'une notation appropriée. Le § 4 contient le théorème d'unicité. La méthode de la visualisation des procédés de la meilleure approximation est esquissée dans le § 5. Les § 6 — § 8 résolvent complètement la question de la continuité de la meilleure approximation. Les considérations du § 9 nous permettent d'introduire la notion d'orthogonalité généralisée de deux droites dans les espaces vectoriels.

Nous allons employer la notation introduite dans mon travail *Quelques remarques sur la convexité des sphères* (ce volume p. 19). En particulier nous comprenons toujours par $K(a, \sigma)$ une sphère fermée de centre a et de rayon σ. Mais nous n'emploirons pas les résultats de ce travail, sauf dans le § 4, et dans les exemples du § 5 et § 7. En citant les enoncés de ce travail, nous ferons suivre leurs numéros par les lettres „*CS*".

Je tiens à remercier ici M. Ważewski de ses conseils précieux qui m'ont facilité la redaction de ce travail.

§ 1. Soit C_δ un espace vectoriel, normé, avec la norme $\delta(x)$ et complet — c'est-à-dire un espace (B) de Banach.

Df. 1,1. *Soit une suite* $Z = \{z_k\} \subset C_\delta$. *Nous allons désigner par* F_n *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de* $z_1, ..., z_n$. (*C'est-à-dire que* $F_n = \{\Theta, z_1, ..., z_n\}$).

Df. 1,2. *La suite* Z *est un système, si pour chaque* n *les* $z_1, ..., z_n$ *sont linéairement indépendants,* c'est-à-dire si

$$z_{k+1} \overline{\in} F_k \qquad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \dots .$$

Df. 1,3. *Le système Z est fermé si*

$$\overline{\sum_{k=1}^{\infty} F_k} = C_\delta$$

(ou si pour chaque $y \epsilon C_\delta$ il existe une suite x_n, telle que $x_n \epsilon F_n$ et $x_n \to y$).

Df. 1,4. *Soit $x \epsilon C_\delta$. Posons*

$$\mu_n(x) \underset{df}{=} \mu_n(x, Z, \delta) \underset{df}{=} \operatorname{dist}(x, F_n)$$

(où par $\operatorname{dist}(x, F_n)$ *nous comprenons* $\operatorname*{Inf}_{a \epsilon F_n} \delta(x-a)$*).*

Si $x \overline{\epsilon} F_n$ alors $\mu_n(x) > 0$.

L'ensemble F_n étant compact et C_δ complet il existe au moins un élément $x_0 \epsilon F_n$ tel que $\delta(x-x_0) = \mu_n(x)$. Donc

Th. 1,5. $K(x, \mu_n(x)) \cdot F_n = F' K(x, \mu_n(x)) \cdot F_n \neq 0$.

Introduisons la définition

Df. 1,6. $A_n(x, Z, \delta) \underset{df}{=} K(x, \mu_n(x)) \cdot F_n$. *L'ensemble $A_n(x, Z, \delta)$, — nous le désignerons parfois par $A_n(x)$ — sera appelé n-ième projection de x.*

Le Théorème 1,5 nous dit que pour chaque n, la n-ième projection de $x \epsilon C_\delta$ est non-vide.

Etant donné que le produit de deux ensembles fermés et convexes est fermé et convexe, nous avons:

Th. 1,7. *L'ensemble $A_n(x)$ est convexe et fermé pour chaque x et pour chaque n.*

Nous démontrerons encore un théorème qui aura une certaine importance dans la suite.

Th. 1,8. *Si*

$$0 \neq B \underset{df}{=} F_n \cdot K(x, \sigma) \subset F' K(x, \sigma)$$

alors

$$B = A_n(x) \quad et \quad \sigma = \mu_n(x).$$

Introduisons la définition: *La varieté linéaire H est tangente à la sphère $K(a, \sigma)$ si $0 \neq H \cdot K(a, \sigma) \subset F' K(a, \sigma)$.* Maintenant notre théorème peut être énoncé autrement: *Si une sphère est tangente à F_n, alors son produit avec F_n forme la n-ième projection de son centre a.*

Dém. Vu la définition de μ_n nous avons $F_n \cdot K(x, \sigma) = 0$ pour $\sigma < \mu_n$. Donc $\sigma \geqslant \mu_n$. Or si $\sigma > \mu_n$:

$$K(x, \mu_n) \subset I' K(x, \sigma)$$

mais alors

$$A_n(x) = K(x, \mu_n(x)) \cdot F_n \subset K(x, \sigma) \cdot F_n = B$$

et cela signifierait que

$$B \cdot I' K(x, \sigma) \neq 0$$

et B ne vérifierait pas l'inclusion $B \subseteq F' K(x, \sigma)$, supposée dans les prémisses de notre théorème. Donc il doit être $\sigma = \mu_n(x)$. De la définition de B et de la Définition 1,6 nous avons

$$B = A_n(x).$$

C. Q. F. D.

§ 2. **Df. 2,1.** *Nous appelons chaque élément* $p_n(x) \in A_n(x, Z, \delta)$ *(donc appartenant à* F_n*) la meilleure* n-δ-Z-*approximation de* x, *ou le* n-*ième polynôme généralisé* δ-Z-*approximant* x.

Remarque: Si C_δ est l'espace C^0 des fonctions définies et continues dans $\langle 0, 1 \rangle$ ayant comme norme $\max\limits_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |f(\tau)|$ et si la suite des monômes $\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2, \ldots$ forme le système (fermé) Z, alors $p_n(x)$ est le polynôme classique de la meilleure approximation (de Tchebycheff) de x.

Le Théorème 1,5 montre que si nous avons choisi un système Z, alors pour chaque $x \in C_\delta$ il existe au moins un n-ième polynôme $p_n(x)$, δ-Z-approximant x. Il possède les propriétés suivantes:

2,2. Il a la forme $p_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot z_k$.

2,3. Il donne la meilleure approximation, c'est-à-dire que pour tous les r_n ayant la forme 2,2 (donc appartenant a F_n), nous avons

$$\delta(x - r_n) \geqslant \delta(x - p_n).$$

2,4. Si Z est un système fermé, alors

$$\lim_{n \to \infty} \delta[x - p_n(x)] = 0$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(x) = 0$$

— pour les systèmes fermés le degré d'approximation croît idéfiniment.

2,5. Il suit du Théorème 1,7 qui si $p_n(x)$ et $\bar{p}_n(x)$ sont deux n-iémes polynômes δ-Z-approximant x et différents, alors chaque élément appartenant à $\langle p_n(x), \bar{p}_n(x) \rangle$ est aussi un n-iéme polynôme δ-Z-approximant x.

2,6. Nous avons supposé que C_δ soit complet, donc chaque segment $\subseteq C_\delta$ est non-dénombrable. De 2,5 nous voyons que le n-iéme polynôme δ-Z-approximant x est ou unique ou l'ensemble des $p_n(x)$ est non-denombrable.

§ 3. **Df. 3,1.** *Un système* Z *est un système* (U), *si tous les* $A_n(x)$ *pour chaque* $x \in C_\delta$ *et chaque* $n = 1, 2, \ldots$ *ne contiennent qu'un seul élément.*

La surface des sphères — qui peuvent être faiblement convexes — peut contenir des segments. Ceux-ci peuvent faire partie des ensembles $A_n(x)$. Donc *a priori* nous pouvons diviser les espaces C_δ en trois classes:

3,2. Dans C_δ chaque système est un système (U).

3,3. Dans C_δ il existe des systèmes (U) et des systèmes non-(U).

3,4. Dans C_δ aucun système n'est un système (U).

Pour qu'un espace C_δ appartienne à (3,2) il faut et il suffit que les sphères dans C_δ soient fortement convexes.

Dans les espaces des fonctions sommables dans $\langle 0,1 \rangle$ avec la $p > 1$ puissance et ayant la norme

$$\delta(x) = \sqrt[p]{\int_0^1 |x(\tau)|^p \, d\tau}$$

les sphères sont fortement convexes, donc tous les $A_n(x)$ (pour chaque système Z) contiennet un élément unique et $p_n(x)$ est défini univoquement. (Ce fait est connu depuis longtemps pour certains systèmes: par exemple pour le système des monômes et pour le système des fonctions trigonométriques).

L'espace C^0 nous fournit un exemple de (3,3).

Soit dans C^0 le système fermé des monômes $Z = \{\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau^2}, \ldots\}$. Les polynômes classiques de la meilleure approximation étant déterminés univoquement, ce système est un système (U). Ce résultat est possible — quoique les sphères dans C^0 soient faiblement convexes — parce que les sphères $K(x, \mu_n(x))$ „s'appuient" sur ces F_n par leurs „sommets" ou aux points où elles sont localement fortement convexes envers ces F_n.

Comme les sphères dans C^0 contiennent dans leur surface des segments, il existe dans C^0 des systèmes non-(U). Un tel système est formé par exemple par les fonctions

$$z_k(\tau) = \tau^k - \tau^{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

L'ensemble $A_1(\widehat{e^\tau})$ est alors non-dénombrable. (Mais par exemple $A_1(\widehat{(1-\tau)^2})$ ne contient qu'un seul élément).

§ 4. Maintenant nous allons résoudre le problème d'unicité de la meilleure approximation. Introduisons les définitions suivantes:

Df. 4,1. *Nous appelons chaque direction $a(a-x)$ où $x \in A_n(a)$, n-ième direction de la projection de l'élément a.*

Il résulte du Théorème 1,8 et de la Définition 2,10 CS:

Th. 4,2. *Si l'ensemble $A_n(x)$ contient plus d'un élément, alors toutes les n-ièmes directions de la projection sont contenues dans un cône d'additivité.*

Les n-ième directions de la projection de l'élément a dépendent non seulement de C_δ mais aussi de Z et de a, ce qui est assez évident — nous le démotrerons ultérieurement à l'aide d'un exemple.

Df. 4,3. *Soit L un ensemble de planéité de la sphère $K(a,\sigma)$. Supposons que $x, y \epsilon L$. Nous appelons angle d'additivité correpondant à la direction $\beta(x-y)$ (dite direction de planéité) l'ensemble des directions $\alpha(z-a)$ où $z \epsilon \langle x, y \rangle$.*

Vu le Théorème 2,8 CS l'ensemble de tous les angles d'additivité (et l'ensemble de toutes les directions de planéité) est le même pour chaque sphère $K(a,\sigma)$ — il depend seulement de C et de la norme δ. Nous pouvons donc dire: la direction de planéité et l'angle d'additivité de l'espace C_δ.

Df. 4,4. *Nous appelons chaque direction contenue dans F_n n-ième direction fondamentale de Z.*

Nous démontrerons maintenant le théorème d'unicité de la meilleure approximation.

Th. 4,5. *Pour qu'un système Z soit un système (U) il faut et il suffit que pour chaque n, aucune n-ième direction de la projection ne soit contenue dans aucun angle d'additivité qui correspond à une direction fondamentale de Z.*

Dém. I. Soit Z un système non-(U). Il existe alors un a et un n tel que $A_n(a)$ contienne plus d'un élément. Il existe donc un couple $x \neq y$, tel que $\langle x, y \rangle \subset A_n(a)$. Mais alors $\langle x, y \rangle \subset F_n$. Donc $\beta(x-y)$ est une n-ième direction fondamentale. Nous avons $\langle x, y \rangle \subset F' K(a, \mu_n(a))$, donc l'ensemble des directions $\alpha(z-a)$, où $z \epsilon \langle x, y \rangle$ forme un angle d'additivité qui corresponde à une n-ième direction fondamentale. Ainsi toutes les directions $\alpha(z-a)$ sont des n-ièmes directions de projection et sont contenues dans un angle d'additivité. La condition de notre théorème n'est pas verifiée.

II. Supposons maintenant que pour un n il existe une n-ième direction de la projection, contenue dans un angle d'additivité qui corresponde a une n-ième direction fondamentale. Par Définitions 4,1 et 4,3 il existe un $x \epsilon A_n(a)$ tel qu'une direction $\alpha(x-y)$ où $x \neq y$ soit en même temps une direction fondamentale de Z et une direction de planéité de C_δ, et la direction $\alpha(a-x)$ est contenue dans un angle d'additivité qui correspond à la direction $\beta(x-y)$. Nous pouvons supposer encore que y est choisi assez près de x et de sorte que la direction $\alpha(a-y)$ soit contenue dans ce angle d'additivité.

De la Définition 4,3 nous voyons que $\langle x, y \rangle$ est alors contenu dans un ensemble de planéité de la sphère $K(a, \mu_n(a))$, c'est-à-dire que

$$\langle x, y \rangle \subset F' K(a, \mu_n(a)).$$

Étant donné que x appartient à l'ensemble linéaire F_n et que $a(x-y)$ est une n-ième direction fondamentale, nous voyons que $\langle x, y\rangle \subset F_n$. Donc $\langle x, y\rangle \subset A_n(a, Z, \delta)$. Ainsi nous avons démontré que $A_n(x)$ contient plus d'un élément, donc Z n'est pas un système (U). C. Q. F. D.

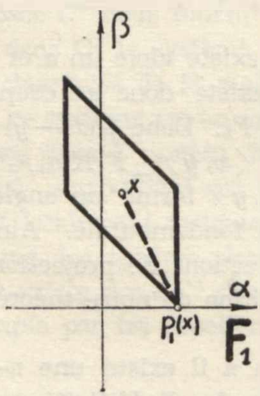
La condition du Théorème 4,5, quoique nécessaire et suffisante est très incommode. C'est qu'elle emploie la notion de direction de la projection, qui n'est pas un invariant de l'espace C_δ et du système Z. Mais un corollaire n'ayant plus les inconvénients mentionnés ci-dessus est une conséquence immédiate du Théorème 4,5:

Cor. 4,6. *Si aucune n-ième direction fondamentale de Z pour $n=1, 2, \ldots$ n'est pas égale à aucune direction de planéité de C_δ, alors le système Z est un système (U).*

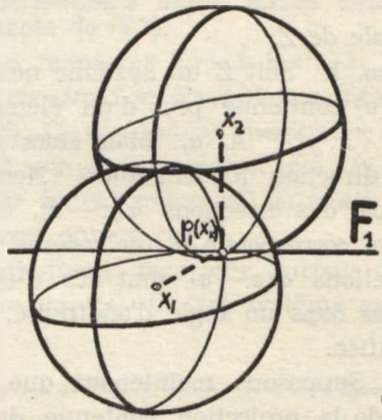
Le théorème inverse serait faux.

§ 5. Les considérations de deux derniers paragraphes peuvent être visualisées grâce à la mèthode du § 3 *CS*.

5,1. Prenons l'espace C^0 et le système fermé $\{\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2, \ldots\}$. Les $p_n(x)$ seront alors des polynômes classique de T c h e b y c h e f f. L'ensemble



1



2

$[\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}]$ c'est-à-dire le plan défini par les éléments $\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}$, contiendra toutes les fonctions linéaires $x(\tau) = a + \beta\tau$. Leurs premières meilleures approximations $p_1(x)$ seront des fonctions constantes. La figure 1 montre que les $p_1(x)$ pour $x \in [\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}]$ sont définis univoquement, chaque „cercle" contenu dans l'image de notre plan s'appuyant sur F_1 par un „sommet".

L'intersection de l'ensemble linéaire $[\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2] \subset C^0$ et de la sphère $K(\Theta, 1)$ contiendra des segments parallèles au plan $[\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}] = F_2$, ce qui démontre la remarque que le théoréme inverse au Corollaire 4.6 est faux.

Si nous prenons comme système $\{\overline{\hat{1}-\tau}, \overline{\tau-\hat{\tau}^2}, \ldots\} \subset C^0$ (il ne formera pas un système fermé) alors F_1 sera parallèle à une arête du „cercle"-parallèlogramme et si $x \bar{\epsilon} F_1$, $x \epsilon [\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}]$ alors les $A_1(x)$ seront non-dénombrables.

5,2. Soit maitenant le système fermé $Z = \{\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2, \ldots\}$ de l'espace L^2. Transformons en R_3 son sous-ensemble linéaire L_3^2 défini par les points $\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2$ (c'est-à-dire que $L_3^2 = [\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2]$). Ses éléments sont formés par les polynômes du deuxième degré $a + \beta\tau + \gamma\tau^2$. Les $p_1(x)$ sont des fonctions constantes. L'image de la sphère de L_3^2 sera ici la sphère euclidienne.

Soit $\bar{Z} = \{\hat{\tau}, \hat{1}, \hat{\tau}^2, \hat{\tau}^3, \ldots\}$, alors $\bar{F}_1 = [\Theta, \hat{\tau}]$. Nous voyons qu'en général $p_1(x) \neq \bar{p}_1(x)$ et qu'a Z et $\bar{Z}$ correspondent en général des differentes premières directions de la projection de a.

Si le point x se déplace dans un plan dont l'image est un plan orthogonal à l'image de F_1, alors la direction du segment $\langle x, p_1(x) \rangle$ peut changer. Autrement dit la première direction de la projection de x n'est pas un invariant ni de C_δ ni de Z. (Voir la figure 2 et consulter § 3 *CS*).

§ 6. Etant donné la continuité de la distance, nous avons le théorème suivant.

Th. 6,1. *La fonctionnelle $\mu_r(x)$ est continue. C'est-à-dire que si $b_n \to a$ alors $\mu_r(b_n) \to \mu_r(a)$.*

Rappelons la définition de la semi-continuité.

Df. 6,2. *Soit une suite d'ensembles $\{D_n\}$. Nous disons que*

$$\underline{D} = \underline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} D_n$$

si $\underline{D}$ est l'ensemble de tous les a pour lesquels dans chaque voisinage il existe des éléments qui appartiennent à presque tous les D_n.

Nous disons que

$$\overline{D} = \overline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} D_n$$

si $\overline{D}$ est l'ensemble de tous les a pour lesquels dans chaque voisinage il existe des éléments qui appartiennent à une infinité de D_n.

Si $\underline{D} = \overline{D}$, alors nous dirons qu'il existe la limite

$$D \underset{df}{=} \operatorname{Lim}_{n\to\infty} D_n \underset{df}{=} \underline{D} = \overline{D}.$$

Df. 6,3. *Une fonction $G(x)$ des points de C_δ ayant comme valeurs des ensembles (une opération) est semi-continue au point a si pour chaque suite $b_n \to a$, $b_n \neq a$ nous avons*

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} G(b_n) \subset G(a).$$

Nous allons démontrer la continuité de la meilleure approximation.

Th. 6,4. *Les opérations $A_r(x)$ sont semi-continues.*

Dém. Soit une suite $b_n \to a$, autrement dit soit

$$\delta(b_n - a) \longrightarrow 0.$$

Nous devons démontrer que

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_r(b_n) \subset A_r(a).$$

Posons

$$\delta(b_n - a) = \varepsilon_n. \tag{6,5}$$

Alors

$$\mu_r(b_n) = \operatorname{dist}(F_r, b_n) \leqslant \operatorname{dist}(F_r, a) + \delta(a - b_n) = \mu_r(a) + \varepsilon_n$$

donc

$$\mu_r(b_n) \leqslant \mu_r(a) + \varepsilon. \tag{6,6}$$

(Remarquons, qu'à l'aide de cette inégalité et à l'aide de l'inégalité $\mu_r(a) - \varepsilon_n \leqslant \mu_r(b_n)$ ont peut démontrer directement le Théorème 6,1).

Soit ε_n la suite des nombres positifs, définie par (6,5). Nous pouvons supposer qu'elle décroît d'une manière monotone. Dans le cas contraire nous prendrions une suite monotone majorante.

Nous disons que

$$K(b_n, \mu_r(b_n)) \subset K(b_n, \mu_r(a) + \varepsilon_n) \subset K(a, \mu_r(a) + 2\varepsilon_n). \tag{6,7}$$

La premiére inclusion est une suite de (6,6) et du fait que si $\tau_1 \leqslant \tau_2$ alors $K(x, \tau_1) \subset K(x, \tau_2)$. La seconde est une suite du fait que si $\delta(y - x) \leqslant \eta$ alors $K(y, \sigma) \subset K(x, \sigma + \eta)$.

Il suit de (6,7) et des propriétés du produit d'ensembles que

$$A_r(b_n) = F_r \cdot K(b_n, \mu_r(b_n)) \subset F_r \cdot K(a, \mu_r(a) + 2\varepsilon_n) \underset{df}{=} A_r^n. \tag{6,8}$$

De même, du fait que $\varepsilon_n \geqslant 0$ et que la suite des ε_n est monotone il résulte que pour $k \geqslant n$:

$$A_r(a) \subset A_r^k \subset A_r^n \tag{6,9}$$

Les A_r^n forment une suite décroissante d'ensembles (r est fixe), contenant $A_r(a)$. Nous savons qu'il existe alors un ensemble-limite non-vide

$$\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} A_r^k \underset{df}{=} A_r^\infty.$$

Nous avons $A_r^\infty \subset A_r^n$ pour chaque n.

Nous disons que $A_r^\infty = A_r(a)$. De (6,9) il s'ensuit que $A_r(a) \subset A_r^\infty$. Il suffit donc de démontrer que si $x \in A_r^\infty$, (c'est-à-dire si $x \in A_r^n$ pour chaque n), alors $x \in A_r(a)$.

Si $x \in A_r^n$ pour chaque n, alors $x \in F_r$ et

$$\delta(x-a) \leqslant \mu_r(a) + 2\varepsilon_n$$

pour chaque n. Donc

$$\delta(x-a) \leqslant \mu_r(a).$$

Mais alors $x \in K(a, \mu_r(a))$ et étant donné que $x \in F_r$ nous voyons que $x \in A_r(a)$. Nous avons démontré que $A_r^\infty = A_r(a)$. Or d'après (6,8) nous avons $A_r(b_n) \subset A_r^n$, donc

(6,10) $$\overline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} A_r(b_r) \subset A_r^\infty = A_r(a).$$

C. Q. F. D.

Posons

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} A_r(b_n) \underset{df}{=} \overline{B}_r$$

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} A_r(b_n) \underset{df}{=} \underline{B}_r.$$

Alors du Théorème 6,4 et des propriétés des limites nous voyons que

(6,11) $$\underline{B}_r \subset \overline{B}_r \subset A_r(a):$$

Remarquons que $\underline{B}_r$ et $\overline{B}_r$ dépendent de la suite $\{b_n\}$ et que (6,11) n'est vrai que pour des $\underline{B}_r$ et $\overline{B}_r$ calculés pour la même suite $\{b_u\}$.

§ 7. On peut se demander si dans (6,11) on ne pourrait pas remplacer les inclusions par des égalités. Des exemples montrent que la reponse est négative.

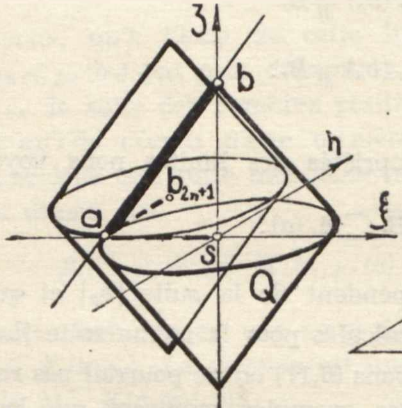
Dans le § 3 *CS* nous avons transformé l'intersection de la sphère de C_δ et d'un ensemble linéaire n dimensionnel en l'espace R_n. Mais nous pouvons procéder inversement. Soit une fermeture de domaine $M \subset R_n$ convexe et symétrique par rapport à un point — son centre.

Soit $C_n \subset C$. Supposons que C est un espace vectoriel complet et que C_n est un ensemble linéaire ayant n dimensions. A l'aide d'une colinéation T transformons M en un ensemble $G \subset C_n$ et éxigeons que son centre se transforme en Θ. Nous pouvons alors définir dans C une telle norme δ que les éléments contenus dans l'image de la frontière de M (par rapport à R_n) ont la norme égale à 1, (et tous les éléments $\in G$ ayant la norme $= 1$ sont contenus dans l'image de cette frontière).

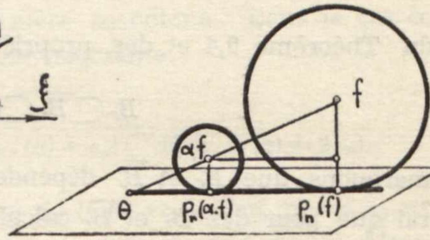
7,1. Pour construire l'exemple exigé supposons que l'ensemble M est formé de deux cônes ayant pour sommets les points $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$ respectivement (en coordonnées cartésiennes (ξ,η,ζ) de l'espace R_3), ayant le cercle $Q = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathrm{E}} [\xi^2+\eta^2=1, \zeta=0]$ commun. (Voir la figure 3.).

L'espace R_3 etant vectoriel et complet il suffirait pour construire notre exemple d'introduire une nouvelle norme (qui ne serait pas égale a la distance enclidienne $\varrho(z,\Theta)$) par la condition que $x \epsilon T(F'M)$ soit équivalent à $\delta(x)=1$. Mais nous obtiendrons ainsi un espace C_8 qui est seulement 3 dimensionnel.

Il est donc préférable de plonger M par une colinéation biunivoque T dans un espace vectoriel et complet C. (Il peut être quelconque, pourvu qu'il ait au moins trois dimmensions). En employant la méthode esquissée au commencement de ce paragraphe, nous pouvons introduire dans C une norme δ tel que si $x \epsilon T(F'M)$ alors $\delta(x)=1$).



3



4

Soit

$$a=(-1,0,0),\quad b=(0,0,1),\quad c=(0,1,0),\quad s=(0,0,0)\,\epsilon\, R_3$$

Introduisons la translation

$$P(q) = q - T(a)$$

définit pour tous les $q \epsilon C_8$.

La translation P est une colinéation biunivoque qui transforme $T(a)$ en l'élément neutre Θ. Posons $\bar{x} = P(T(x))$ pour $x \epsilon R_3$. Alors

$$P(T([a,b])) = [\bar{a},\bar{b}] \quad \text{et} \quad \bar{a} = \Theta.$$

Soit un systéme $Z=\{\bar{b}, z_2, z_3, \dots\}$ de l'espace C_δ. Considérons les premiers polynômes δ-Z-approximant les éléments de C_δ. Nous aurons $F_1=[\bar{a},\bar{b}]$ donc $A_1(\bar{s})=\langle \bar{a}, b\rangle$ — c'est un ensemble non-denombrable. Mais si $b_n \to s$ et les b_n sont contenus dans le plan $[\bar{s}, \bar{a}, \bar{c}]$ et ne sont pas contenus dans le plan $[\bar{s}, \bar{a}, \bar{b}]$, alors $A_1(\bar{b}_n)$ est composé uniquement de l'élément $\Theta=\bar{a}$ (qui est contenu dans $P(T(Q))$). Donc $\bar{B}_1=\{\bar{a}\}$ et dans notre exemple $\bar{B}_1 \neq A_1(\bar{s})$. Supposons maintenant que $b_{2n}=\bar{s}$ et que les b_{2n+1} ne sont pas contenus dans le plan $[\bar{s}, \bar{a}, b]$ (voir la figure 3) alors $\bar{B}_1=\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ et $\underline{B}_1=\{\bar{a}\}$. Il peut donc arriver que $\underline{B}_1 \neq \bar{B}_1$.

7,2. On peut construire un autre exemple d'espace C_δ (beaucoup plus compliqué que le précité) dans lequel nous pouvons choisir un z_1 et une suite $b_n \to a$, pour laquelle on à simultanément

$$\underline{B}_1 \neq \bar{B}_1 \neq A_1(a).$$

Dans le même espace C_δ (et pour le même z_1) nous aurons pour une autre suite $b_n^0 \to a$ l'ensemble $\underline{B}_1^0=0$.

Remarquons que les ensembles $A_r(b_n)$ étant contenus dans un ensemble compact et borné, nous avons toujours $\bar{B}_r \neq 0$.

Dans le prochain paragraphe nous démontrerons que si nous supposons l'unicité de $p_n(x)$ alors $\underline{B}_r \neq 0$ et la situation que nous avons rencontré dans l'exemple 7,2 ne peut avoir lieu.

§ 8. Th. 8,1. *Si l'ensemble $A_r(a)$ ne contient qu'un élément $p_r(a)$, c'est-à-dire si $A_r(a)=\{p_r(a)\}$, alors pour chaque suite $b_n \to a$ nous avons $\underline{B}_r \neq 0$.*

Dém. Supposons que $A_r(a)=\{p_r(a)\}$ et que $\underline{B}_r=0$. Alors dans un voisinage assez petit de $p_r(a)$, par exemple dans $I'K(p_r(a),\varepsilon)$ les éléments d'une sous-suite $A_r(b_{n_k})$ ne seraient pas contenus, Mais ces ensembles étant contenus dans A_r^1 (voir (6,8)), sont bornés. Posons

$$A_r(b_{n_k}) \subset A_r^1 - I'K(p_r(a), \varepsilon) \underset{df}{=} H$$

H est un ensemble fermé et borné, donc il existe

$$0 \neq \overline{\operatorname{Lim}_{k\to\infty}} A_r(b_{n_k}) \subset H$$

or $H \cdot A_r(a)=0$ et cependant d'après (6,10)

$$\overline{\operatorname{Lim}_{k\to\infty}} A_r(b_{n_k}) \subset \overline{\operatorname{Lim}_{n\to\infty}} A_r(b_n) \subset A_r(a).$$

Nous avons abouti à une contradiction, donc $\underline{B}_r \neq 0$.

C. Q. F. D.

Si $A_r(a)$ ne contient qu'un élément $p_r(a)$, alors il résulte de $\underline{B}_r \neq 0$ et de (6,11) que pour chaque suite $b_n \to a$ nous avons

$$\underline{B}_r = \overline{B}_r = A_r(a) = \{p_r(a)\}.$$

Nous avons donc démontré le théorème

Th. 8,2. *Si $A_r(a)$ ne contient qu'un élément $p_r(a)$, alors $p_r(a)$ est une opération continue au point a. C'est-à-dire que pour chaque suite $b_n \to a$ nous avons alors*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} A_r(b_n) = A_r(a)$$

ou bien

$$\lim_{n\to\infty} p_r(b_n) = p_r(a).$$

Remarques: 8,3⁰. Ce Théorème est aussi une conséquence du théorème sur la continuité de la distance.

8,4⁰. Les ensembles $A_r(b_n)$ peuvent contenir plus d'un élément, c'est-à-dire que les $p_r(b_n)$ peuvent être définis non univoquement.

8,5⁰. Dans les espaces du type (F) (donc dans les espaces du type (B)) la notion de la limite ne dépend pas de la norme, donc la limite $b_n \to a$ peut être prise d'après une autre norme que la limite $p_r(b_n) \to p_r(a)$.

On peut démontrer facilement que l'opération $A_r(x)$ (donc $p_r(x)$) est une opération complètement continue, c'est-à-dire qu'elle transforme les ensembles bornés en ensembles compacts,

§ 9 A. Soit un élément donné $f \,\overline{\epsilon}\, F_n$. Supposons que $a \in A_n(f)$ et prenons la droite $[a, f]$. Elle a comme équation

$$x_\tau = a + \tau(f - a) = a(1 - \tau) + \tau f, \qquad \tau \in R_1. \tag{9,1}$$

L'équation (9,1) nous donne une correspondance biunivoque des $x \in [a, f]$ et des $\tau \in R_1$. Donc non seulement x est une fonction de τ, mais aussi τ est une fonction de $x \in [a, f]$ et on peut écrire $\tau = \tau_x$.

Th. 9,2. *Si $a, b \in A_n(f)$ et si nous employons la notation exposée ci-dessus, alors*

$$c(x) \underset{df}{=} x + \tau_x(b - f) \in A_n(x) \tag{9,3}$$

où $x \,\overline{\epsilon}\, F_n$ est défini par (9,1).

Si $a \neq b$ et le segment $\langle a, b \rangle$ ne peut pas être prolongé au delà de b sans perdre la propriété d'être contenu dans un ensemble de planéité de $K(f, \mu_n(f))$, (donc d'être contenu dans $A_n(f)$) alors le segment $\langle a, c(x) \rangle$ contenu dans un ensemble de planéité de $K(x, \mu_n(x))$, ne peut pas être prolongé au-delà de $c(x)$ sans perdre la propriété $\langle a, c(x) \rangle \subset A_n(x)$.

Dém. 1°. Nous avons

$$c(x) = x + \tau_x (b - f) = a + \tau_x (f - a) + \tau_x (b - f) = a + \tau_x (b - a).$$

Or si $a, b \in A_n(f)$ alors $a, b \in F_n$, donc $c(x) \in F_n$.

Nous avons aussi

$$\delta(x - c(x)) = \delta(x - x - \tau_x (b - f)) = |\tau_x| \cdot \delta(b - f) = |\tau_x| \cdot \mu_n(f).$$

Donc $c(x) \in F' K(x, |\tau_x| \cdot \mu_n(f))$, ce qui donne moyennant $c(x) \in F_n$ que $c(x) \in A_n(x)$ et que

(9,4) $$\mu_n(x) = |\tau_x| \cdot \mu_n(f).$$

2°. Nous avons $\delta(x - a) = |\tau_x| \cdot \delta(a - f) = \mu_n(x)$ donc $a \in A_n(x)$.

Soit d un point situé sur la droite $[a, b]$:

$$d = a + \tau_d (b - a)$$

au-delà de $c(x)$ en se mouvant de a. Le point d correspond donc à une valeur du paramétre $\tau_d = \tau_x + \alpha$ où $\operatorname{sign} \tau_x = \operatorname{sign} \alpha$ (si $a \neq b$ et $x \bar{\in} F_n$ alors $a \neq c(x)$ et nous voyons que $\tau_x \neq 0$). Or

$$\begin{aligned} \delta(x - d) &= \delta[a + \tau_x(f - a) - a - (\tau_x + \alpha)(b - a)] = \\ &= \delta[\tau_x(f - a) - (\tau_x + \alpha)(b - a)] = \\ &= |\tau_x| \delta\left[f - a - \left(1 + \frac{\alpha}{\tau_x}\right)(b - a)\right] > |\tau_x| \mu_n(f) = \mu_n(x) \end{aligned}$$

(le point $a + (1 + \alpha/\tau_x)(b - a)$ étant situé sur $[a, b]$ au delà de b, n'appartient pas à $K(f, \mu_n(f))$ et nous avons l'inégalité forte dans la formule cidesus) donc

$$d \bar{\in} K(x, \mu_n(x)).$$

C. Q. F. D.

§ 9 B. L'opération $p_n(x)$ (ou $A_n(x)$) n'est pas additive. Mais nous avons le théorème.

Th. 9,5. *Supposons que $a \in F_n$. Si $y \in A_n(f)$ alors $y + a \in A_n(f + a)$ et inversement.*

Donc, si $A_n(f)$ contient un élément unique $p_n(f)$ alors

$$p_n(f + a) = p_n(f) + p_n(a).$$

Dém. 1°. Si $a, y \in F_n$ alors de la linéarité de F_n il résulte que $a + y \in F_n$.

2°. Il suit de la définition de la sphère que si $y \in K(f, \mu_n(f))$ alors $y + a \in K(f + a, \mu_n(f))$.

3^0. Il résulte de 1^0 et de 2^0 que $y+a\in F_n\cdot K(f+a,\mu_n(f))$, donc

$$\mu_n(f+a)\leqslant\mu_n(f).$$

4^0. En appliquant ce raisonnement à l'élément $f+a$ et en le soumettant à la translation $\bar{y}=y-a$ nous aurons

$$\mu_n(f)=\mu_n[(f+a)-a]\geqslant\mu_n(f+a)$$

donc

(9,6) $$\mu_n(f+a)=\mu_n(f)$$

et de 3^0 nous voyons que

$$y+a\in A_n(f+a).$$

5^0. Si $a\in F_n$ alors $p_n(a)=a$ — d'ou il s'ensuit la seconde partie du théorème. C. Q. F. D.

§ 9 C. Nous démontrerons maintenant quelques théorèmes sur les directions de la projection.

Th. 9,7. *Si* $a(f-b)$ *est une n-ième direction de la projection de* f *et* x *est défini par* (9,1), *alors* $a(f-b)$ *est aussi une n-ième direction de la projection de* x.

Dém. La démonstration est une suite de (9,3):

$$a(x-c(x))=a[x-x-\tau_x(b-f)]=\bar{a}(f-b).$$

C. Q. F. D.

Pour $a=b$ il en résulte le théorème.

Th. 9,8. *Si* $\tau\in R_1$ *et* x *est défini par* (9,1) *alors* $a\in A_n(x_\tau)$.

Donc si $A_n(f)$ contient un seul élément, tous les $A_n(x_\tau)$ contiennent aussi un seul élément.

Le Théorème 9,8 nous permet d'introduire la définition suivante:

Df. 9,9. *Soit* $f\bar{\in}F_n$ *et* $a\in A_n(f)$. *Si* $r_n=\beta(f-a)$ *(pour* $\beta\neq0$ *quelconque) alors la translation*

$$\bar{y}=y+r_n$$

sera dite orthogonale a F_n *du point* f *au point* a.

Nous pourrons dire aussi que la droite $[f,a]$ *est orthogonale a* F_n *du point* f *au point* a.

Introduisons encore la définition.

Df. 9,10. *Si* $a_n\in F_n$ *alors la translation*

$$\bar{y}=y+a_n$$

sera dite parallèle à F_n.

Les Théorèmes 9,5 et 9,7 nous donnent à l'aide des Définitions 9,9 et 9,10 le théorème suivant:

Th. 9,11. *Si l'on peut transformer le point f_1 et f_2 à l'aide d'une translation qui est* α) *parallèle à F_n ou* β) *orthogonale à F_n du point f_1 au point f_2, alors f_1 et f_2 ont les mêmes directions de la projection.*

§ 9 D. De (9,4) et de (9,6) nous avons.

Th. 9,12. *Si $a \in F_n$ alors $\mu_n(f+a) = \mu_n(f)$.*

Si x est défini par (9,1) *alors $\mu_n(x) = |\tau_x| \cdot \mu_n(f)$.*

L'appliquation la plus intéressante des Théorèmes 9,11 et 9,12 c'est le théorème sur l'homogénéité.

Th. 9,13. *La fonctionnelle $\mu_n(f)$ est homogène.*

L'opération $p_n(f)$ est homogène.

C'est-à-dire que

$$|a| \cdot \mu_n(f) = \mu_n(af)$$

et

$$a \cdot p_n(f) \in A_n(af).$$

Si $A_n(f)$ contient un élément unique $p_n(f)$ alors

$$a \cdot p_n(f) = p_n(af).$$

Dém. Transformons f à l'aide de la translation orthogonale à F_n de f à $p_n(f)$, fournie par la formule (voir la figure 4)

$$\bar{y} = p_n(f) + a(y - p_n(f)).$$

Faisons ensuite une translation parallèle à F_n, fournie par la formule

$$\bar{\bar{y}} = \bar{y} - (1-a) \cdot p_n(f)$$

f se transforme par ces translations en af et $p_n(f)$ se transforme en $a \cdot p_n(f)$. Il résulte du Théorème 9,11 que af aura comme projection $a \cdot p_n(f)$.

Du Théorème 9,12 il résultera que $\mu_n(f)$ est homogène.

C. Q. F. D.

Streszczenie

Oznaczmy przez C_δ przestrzeń wektorową, zupełną i unormowaną przez $\delta(x)$. Niech $\{z_1, z_2, \ldots\} \subset C_\delta$ i niech F_n będzie zbiorem wszystkich kombinacji liniowych $a_1 \cdot z_1 + \ldots + a_n \cdot z_n$. Załóżmy, że $z_{n+1} \bar{\in} F_n$. Oznaczmy $\mu_n(a) \underset{df}{=} \operatorname{Inf}_{x \in F_n} \delta(a - x)$ oraz $A_n(a) \underset{df}{=} F_n \cdot K(a, \mu_n(a))$ gdzie przez $K(a, \sigma)$ oznaczamy kulę zamkniętą. Każdy element $p_n(a) \epsilon A_n(a)$ nazywamy n-tym uogólnionym wielomianem najlepiej przybliżającym a (ze względu na przestrzeń C_δ i system $\{z_1, z_2, ...\}$).

W pracy tej, po przypomnieniu głównych wyników teorii uogólnionych wielomianów najlepiej przybliżających, podaję warunek konieczny i wystarczający na to by wszystkie zbiory $A_n(x)$ zawierały tylko po jednym elemencie (tw. 4,5) oraz udowadniam pół-ciągłość w sensie zawierania uogólnionego najlepszego przybliżenia.

W § 5 i w § 7 unaoczniam pewne przykłady, dzięki zastosowaniu metody, podanej przezemnie w pracy *Kilka uwag o wypukłości kul.* Wreszcie w § 9 przeprowadzam rozumowania umożliwiające zdefiniowanie w C_δ uogólnionej prostopadłości.

Резюмэ

Обозначим через C_δ пространство Банаха нормированное функционалом $\delta(x)$. Пусть $\{z_1, z_2, ...\} \subset C_\delta$ и F_n будет множеством всех линейных комбинаций $a_1 \cdot z_1 + ... + a_n \cdot z_n$. Предположим, что $z_{n+1} \overline{\epsilon} F_n$. Обозначим $\mu_n(a) \underset{df}{=} \operatorname{Inf}_{x \epsilon F_n} \delta(a - x)$ и $A_n(a) \underset{df}{=} F_n \cdot K(a, \mu_n(a))$ где $x \epsilon F_n$, пусть $K(a, \sigma)$ обозначает замкнутую сферу. Всякий элемент $p_n(a) \epsilon A_n(a)$ называем n-тым обобщенным полиномом найлучше аппроксимирующим a (в отношении к пространству C_δ и системе $\{z_1, z_2, ...\}$).

В этой работе, напомнив главные результаты теории обобщенных полиномов найлучше аппроксимирующих, даю необходимое и достаточное условие для того, чтобы все множества $A_n(x)$ содержали только по одном элементе (Т. 4,5) и доказываю полу-непрерывность в смысле включения этих множеств.

В § 5 и § 7 даю наглядное представление некоторых результатов, благодаря применению метода, данного мною в работе «Несколько замечаний о выпуклости сфер». Наконец, в § 9 привожу рассуждение позволяющее определить в C_δ обобщенную перпендикулярность.