ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VI. 1 SECTIO A 1952

Z Seminarium Matematycznego Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownicy: prof. dr Mieczysław Biernacki i prof. dr Adam Bielecki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes

O pewnym zagadnieniu ekstremalnym dotyczącym figur wpisanych i opisanych na owalach

О некоторой экстрэмальной задаче, касающейся фигур вписанных и описанных на выпуклых фигурах

1. Dans ce travail je m'occupe du problème des rectangles et des parallélépipèdes rectangles inscrits ou circonscrits aux figures convexes (théorèmes I, II et III).

Parmi les résultats connus, relatifs à ce problème, mentionnons les suivants:

Dans toute figure convexe plane on peut inscrire au moins un carré. A chaque figure convexe plane on peut circonscrire au moins un carré. Dans toute figure convexe plane on peut inscrire au moins deux rectangles, dont les côtés ont un rapport correspondant donné. A chaque corps convexe de l'espace on peut circonscrire une infinité de cubes [1]). Le résultat de Pólya [2]): Il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que dans chaque figure convexe plane R on peut inscrire un rectangle P dont l'aire $\{P\} \geqslant \lambda \{\text{aire } R\}$. Le résultat de Schnirelman [3]): Sur chaque courbe fermée, ayant une courbure continue, il existe quatre points qui sont les sommets d'un carré.

M. Biernacki a démontré que dans toute figure convexe plane R ayant un centre de symétrie, et dont la frontière ne contient aucun segment rectiligne, on peut inscrire un rectangle P dont l'aire est au moins égale à la moitié de l'aire de la figure convexe R. Avec la permission de l'auteur je reproduis une esquisse de la démonstration.

[1]) Pour ces théorèmes, voir: Bonnesen et Fenchel, Theorie der konvexen Körper p. 55.

[2]) Pólya et Szegö, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.

[3]) Uspehi Matem. Nauk 10, 1944, 34–44.

Soient AB et A_0B_0 les cordes qui joignent les points de contact de la figure convexe R avec deux différentes droites d'appui parallèles, dont la distance est maximum resp. minimum. Nous appelons droite d'appui une droite ayant au moins un point commun avec la frontière de la figure convexe et n'ayant pas de points communs avec son intérieur. Nous construisons les cercles K et K_0 de diamètres AB resp. A_0B_0. Le cercle K_0 est entièrement contenu dans R qui, à son tour, est entièrement contenu dans le cercle K. Menons maintenant dans chaque direction φ deux droites d'appui différentes parallèles et traçons les cordes $A_\varphi B_\varphi$ joignant les points A_φ, B_φ, où ces droites touchent la figure convexe R. Sur chacune des cordes $A_\varphi B_\varphi$ comme diamètre nous traçons le cercle K_φ et nous menons, pour chacune de ces cordes, les droites d'appui de la figure convexe R parallèles à cette corde $A_\varphi B_\varphi$. Les points M_φ et N_φ, où ces droites touchent R, varient d'une manière continue avec la direction φ. Il en est de même des cercles K_φ de diamètres $A_\varphi B_\varphi$. Comme le point M_φ se trouve d'abord à l'extérieur du cercle K_0, puis à l'intérieur du cercle K, lorsque le cercle K_0 se transforme continûment en cercle K, il doit exister une position telle que le point M_{φ_0} se trouvera sur la circonférence du cercle K_{φ_0}. En ce moment, si l'on joint les extrémités de la corde $A_{\varphi_0}B_{\varphi_0}$ aux points M_{φ_0} et N_{φ_0} on aura un rectangle $A_{\varphi_0}M_{\varphi_0}B_{\varphi_0}N_{\varphi_0}$. Traçons maintenant un parallélogramme circonscrit à la figure convexe R, dont les côtés sont situés sur les droites d'appui correspondant aux points A_{φ_0}, B_{φ_0}, M_{φ_0}, N_{φ_0} de R; une paire de ces côtés étant parallèle à la droite $A_{\varphi_0}B_{\varphi_0}$; l'aire de ce parallélogramme est deux fois plus grande que celle du rectangle $A_{\varphi_0}M_{\varphi_0}B_{\varphi_0}N_{\varphi_0}$. Le théorème est ainsi démontré.

M. le Professeur Biernacki a posé le problème si son résultat peut être étendu à des figures convexes sans hypothèse particulière sur leur symétrie et leur frontière. Dans le cas du plan la réponse est affirmative (th. I). Dans le cas de l'espace j'ai pu obtenir un résultat pour les figures convexes ayant un plan de symétrie (théorème II). Enfin je donne la démonstration d'un théorème analogue sur les parallélépipèdes rectangles circonscrits à un corps convexe de l'espace (théorème III).

Je tiens à exprimer mes remerciements à M. le Professeur Biernacki, et particulièrement à M. le Professeur Bielecki pour les précieux conseils et les remarques qui m'ont aidé dans le rédaction de ce travail.

2. Je passe maintenant à la démonstration du théorème I, en commençant par quelques théorèmes auxiliaires et quelques définitions dont il sera fait usage dans la démonstration. Bien que quelques uns de ces théorèmes soient connus, pourtant je les rappelle pour la commodité du lecteur.

Théorème 1 — *Si $f(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement et $g(x)$ une fonction semi-continue supérieurement dans $[a, b]$, alors il existe max $g(x)$ et min $f(x)$ dans $[a, b]$.*

Démonstration — Posons $k = \inf f(x)$ et supposons que $\inf f(x)$ ne soit pas atteint. Il existe alors une suite $x_v \to \bar{x}$ telle que $\bar{x} \epsilon [a, b]$ et $\lim f(x_v) = k$. De la semi-continuité inférieure de $f(x)$ il résulte que $f(\bar{x}) \leqslant k$, donc $f(\bar{x}) = k$. On démontre de même l'existence de max $g(x)$ dans $[a, b]$.

Théorème 2 [4]) — *Si les hypothèses du théorème 1 sont remplies et si, en outre, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\inf f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup g(x)$, alors il existe un nombre ξ tel que $a \leqslant \xi \leqslant b$ et $f(\xi) \leqslant \mu \leqslant g(\xi)$.*

Démonstration — Soit Z^- l'ensemble des nombres x tels que $x \epsilon [a, b]$ et $f(x) \leqslant \mu$. De la semi-continuité de $f(x)$ il résulte que l'ensemble Z^- est fermé; en vertu du théorème 1 il n'est pas vide.

Soit Z^+ l'ensemble des nombres x tels que $x \epsilon [a, b]$ et $g(x) \geqslant \mu$. L'ensemble Z^+ est aussi fermé et non vide.

$Z^- + Z^+ = [a, b]$, car il est impossible que les inégalités $f(x) > \mu$ et $g(x) < \mu$ aient lieu simultanément. Les ensembles Z^- et Z^+ ne peuvent être disjoints; on sait, en effet, qu'un intervalle fermé ne peut être décomposé en 2 ensembles disjoints fermés. Il en résulte l'existence du nombre ξ ayant les propriétés demandées.

Définition 1 — Nous appelons figure convexe plane tout ensemble fermé et borné de points du plan qui ne possède en commun avec une droite quelconque du plan qu'un segment de droite ou un seul point. Nous n'envisagerons que des figures convexes planes.

Définition 2 — Soit R une figure convexe plane dans le plan de laquelle nous introduisons un système de coordonnées cartésien x, y d'origine O. Le sens positif de l'axe x forme avec une certaine direction fixe (axe l_0) une angle φ. Le projection perpendiculaire de R sur l'axe x est un segment $a \leqslant x \leqslant b$ (cela résulte du fait que 1° tout segment joignant les projections de deux points de la figure convexe doit appartenir à la projection, 2° la projection est un ensemble fermé). La droite $x = \bar{x}$, où $a \leqslant \bar{x} \leqslant b$, possède avec R des points communs, dont les ordonnées y satisfons aux inégalités $f(\bar{x}) \leqslant y \leqslant g(\bar{x})$. L'ensemble des points, dont les coordonnées satisfont aux inégalités $a \leqslant x \leqslant b$, $o \leqslant y \leqslant g(x) - f(x)$, sera désigné par $R(\varphi, x)$. L'opération consistant à construire la figure convexe $R(\varphi, x)$ à partir de la figure convexe R sera dite déplacement de R vers l'axe x.

[4]) Ce théorème, qui généralise en un certain sens le théorème de Darboux, m'a permis d'abréger notablement la démonstration des théorèmes I et II. Il m'a été communiqué par M. le prof. A. Bielecki.

Théorème 3 — $R(\varphi, x)$ est une figure convexe.

Démonstration — Soient (x_1, y_1) et $x_2, y_2)$ deux points appartenant à $R(\varphi, x)$. Puisque R est une figure convexe, l'on obtient aisément

$$g(x) \geqslant g(x_1) + \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ pour } x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

$$f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ pour } x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

Donc

$$g(x) - f(x) \geqslant g(x_1) - f(x_1) + \frac{[g(x_2) - f(x_2)] - [g(x_1) - f(x_1)]}{x_1 - x_1}(x - x_1) \geqslant$$

$$\geqslant y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \geqslant 0 \text{ pour } x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

c'est-à-dire que le segment joignant les deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartient à $R(\varphi, x)$; l'énoncé du théorème en résulte immédiatement.

Définition 3 — En déplaçant $R(\varphi, x)$ vers l'axe y, nous obtenons, de même que dans la définition 2, une figure convexe que nous désignerons par $R(\varphi, x, y)$, (cela résulte du théorème 3).

Théorème 4 — Les aires de R, $R(\varphi, x)$ et $R(\varphi, x, y)$ sont égales, ce que nous écrivons $\{R\} = \{R(\varphi, x)\} = \{R(\varphi, x, y)\}$.

Démonstration — Règle de Cavalieri.

Théorème 5 — Si R possède des points intérieurs, il en est de même de $R(\varphi, x)$ et $R(\varphi, x, y)$.

Démonstration — L'on a alors $f(x) \neq g(x)$.

Dans la suite nous nous bornerons à l'étude des figures convexes R qui possèdent des points intérieurs.

Théorème 6 — Il existe un rectangle $OACB$, inscrit dans $R(\varphi, x, y)$, dont l'aire est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}\{R(\varphi, x, y)\}$.

Démonstration — Soit C un point de la frontière de $R(\varphi, x, y)$ et n'appartenant à aucun des axes de coordonnées. Cela est possible, car la figure convexe possède des points intérieurs. Soient A et B les projections du point C sur les axes x et y. L'aire $\{OACB\}$ est positive et bornée, car la figure convexe est bornée. Cette aire étant une fonction continue du point C elle atteint une valeur maximum, car la figure convexe $R(\varphi, x, y)$ est un ensemble ponctuel fermé.

Posons $M(\varphi) = \max\{OACB\}$. Le point C est situé sur l'hyperbole $xy = M(\varphi)$. A l'intérieur de l'hyperbole il ne peut y avoir aucun point de la figure convexe $R(\varphi, x, y)$; en effet, on démontre aisément que l'intérieur de l'hyperbole contiendrait alors un point frontière C' de $R(\varphi, x, y)$ et le rectangle correspondant $OA'C'B'$ aurait une aire supérieure à $M(\varphi)$. Aucun point de la figure convexe $R(\varphi, x, y)$ ne peut être situé au-dessus de la tangente à l'hyperbole au point C, car il existerait alors des points de $R(\varphi, x, y)$ à l'intérieur de l'hyperbole. La tangente considérée coupe les axes coordonnés respectivement aux points K et L. Les axes étant asymptotes de l'hyperbole, l'on a $CK = CL$ et de là on trouve immédiatement que $M(\varphi)$ est égal à la moitié de l'aire du triangle OKL, donc supérieur ou égal à $\frac{1}{2}\{R(\varphi, x, y)\}$. Comme $R(\varphi, x, y)$ est convexe, le rectangle $OACB$ y est contenu.

Si l'on prend, au lieu du point C, un autre point C^* de la figure convexe $R(\varphi, x, y)$, l'aire du rectangle correspondant $OA^*C^*B^*$ sera inférieure à $M(\varphi)$, car C^* est situé à l'extérieur de l'hyperbole considérée. On obtient ainsi le

Théorème 7 — Il existe un rectangle $OACB$, et un seul, contenu dans la figure convexe $R(\varphi, x, y)$, tel que ses sommets sont situés sur les axes et son aire $M(\varphi)$ est maximum.

Définition 4 — Une droite parallèle à l'axe Ox, passant par le point C, coupe $R(\varphi, x)$ suivant un segment FG, l'abscisse de F étant inférieure à celle de G ($F \neq G$ car, dans le cas contraire, le point C serait situé sur l'axe Oy et l'on aurait $M(\varphi) = O$). Désignons par D et E les projections orthogonales de ces points sur l'axe Ox. Evidemment $BC = FG$, $OA = DE$, $\{DEFG\} = M(\varphi)$.

Une droite parallèle à l'axe Oy, passant par le point D coupe la figure convexe R suivant un segment T_2U_1, une droite parallèle à l'axe Oy passant par E, coupe R suivant un segment V_1W_2, les ordonnées de U_1W_2 étant supérieures à celles de T_2 et V_1 respectivement. Evidemment $DF \leqslant T_2U_1$ et $EG \leqslant V_1W_2$. Prenons sur le segment T_2U_1 deux points T_1 et U_2 et sur le segment V_1W_2 deux points V_2 et W_1, tels que l'on ait $T_1U_1 = T_2U_2 = DF = V_1W_1 = V_2W_2$. Désignons par $S_1(\varphi)$ le parallélogramme $T_1V_1W_1U_1$ et par $S_2(\varphi)$ le parallélogramme $T_2V_2W_2U_2$. Comme sens de parcours positif sur les parallélogrammes nous prenons le sens $V_1 \to W_1$, et respectivement $V_2 \to W_2$. Nous désignerons par $\Theta(\varphi)$ l'angle convexe positif que forme le côté orienté V_1W_1 avec le côte orienté W_1U_1 $\Theta(\varphi) = \sphericalangle(\overrightarrow{V_1W_1}, \overrightarrow{W_1U_1})$.

De même, soit $\omega(\varphi) = \sphericalangle(\overrightarrow{V_2W_2}, \overrightarrow{W_2U_2})$.

La construction montre que l'on a $\Theta(\varphi) \leqslant \omega(\varphi)$.

Théorème 8 — $\{S_1(\varphi)\} = \{S_2(\varphi)\} = M(\varphi)$. $S_1(\varphi)$ et $S_2(\varphi)$ sont des parallélogrammes inscrits dans la figure convexe R. L'aire d'un parallélogramme *quelconque, contenu dans la figure convexe R, dont deux côtés sont parallèles à l'axe Oy* (c'est-à-dire forment avec l'axe l_0 l'angle $\varphi + \pi/2$), *est inférieure ou égale à $M(\varphi)$. L'égalité n'a lieu que pour les parallélogrammes $TVWU$ où $TU = UW = T_1W_1$ et dont les côtés TU et VW sont situés sur les segments T_2U_1 et V_1W_2 respectivement. $\Theta(\varphi) \leqslant \sphericalangle(\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{WU}) \leqslant \omega(\varphi)$.*

Démonstration — Considérons le segment T_2U_1. S'il n'appartient pas entièrement à la frontière de la figure convexe R, on voit aisément que les seuls points situés sur celle-ci sont les extrémités T_2 et U_1, alors $T_2U_1 = DF$, et, par suite $T_1 = T_2$, $U_2 = U_1$. Si le segment T_2U_1 est situé sur la frontière de R, T_1 et U_1 sont des points frontières. Il en est de même pour le segment V_1W_2. $S_1(\varphi)$ et $S_2(\varphi)$ sont donc des parallélogrammes inscrits dans la figure convexe R. Pour la même raison la parallélogramme $TVWU$ est aussi inscrit dans R et l'on a les égalités

$$|TVWU| = |S_1(\varphi)| = |S_2(\varphi)| = M(\varphi).$$

Soit maintenant $XYZ\dot{Z}$ un parallélogramme quelconque contenu dans la figure convexe R, ayant deux côtés perpendiculaires à l'axe Ox, mais différent de $TVWU$. Le parallélogramme $XYZ\dot{Z}$ déplacé vers l'axe Ox formera un rectangle contenu dans $R(\varphi, x)$, ce qu'on vérifie aisément. Ce rectangle déplacé vers l'axe Oy formera un rectangle d'aire inférieure à $M(\varphi)$ (théorèmes 6 et 7) différent de $OACB$, dans le cas contraire, en effet, $XYZ\dot{Z}$ serait un parallélogramme du type $TVWU$, comme le montre la construction.

Théorème 9 — $M(\varphi)$ est une fonction semi-continue supérieurement du paramètre φ.

Démonstration — Soit $\varphi_n \to \varphi_0$. Désignons les sommets du parallélogramme $S_1(\varphi_n)$ par $T_1^n V_1^n W_1^n U_1^n$. La figure convexe R étant un ensemble borné et fermé et sa frontière étant aussi un enseble fermé, il existe une suite d'indices $\mu(i) \to \infty$ telle que $T_1^{\mu(i)} V_1^{\mu(i)} W_1^{\mu(i)} U_1^{\mu(i)}$ sont des suites de points convergeant respectivement vers les points frontières $T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0$ de R. Il est évident que le quadrilatère $T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0$ est un parallélogramme dont les côtés $T_1^0 U_1^0$ et $V_1^0 W_1^0$ font avec l'axe l_0 l'angle $\varphi_0 + \pi/2$. L'aire de ce parallélogramme $|T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0| = \lim_{i \to \infty} M(\varphi_{\mu(i)}) \leqslant M(\varphi_0)$ (théor. 8). Si, pour une suite φ_ν convergeant vers φ_0, l'on avait $\limsup_{\nu \to \infty} M(\varphi_\nu) > M(\varphi_0)$, il existerait une suite partielle φ_n convergeant vers φ_0 telle que $\lim_{n \to \infty} M(\varphi_n) > M(\varphi_0)$, contrairement à ce que nous avons démontré plus haut. On a donc toujours $\limsup_{\nu \to \infty} M(\varphi_\nu) \leqslant M(\varphi_0)$, pourvu que $\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = \varphi_0$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 10 — $M(\varphi)$ est une fonction semi-continue inférieurement du paramètre φ.

Démonstration — Il suffit de démontrer le fait suivant: φ_0 et $\varepsilon > 0$ étant donnés arbitrairement, il existe un angle x_0 tel que $M(\varphi) > M(\varphi_0) - \varepsilon$, lorsque $\varphi_0 - x_0 < \varphi < \varphi_0 + x_0$.

Soit $T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0$ un parallélogramme d'aire $M(\varphi_0)$, dont les côtés $T_1^0 U_1^0$ et $V_1^0 W_1^0$ font avec l'axe l_0 l'angle $\varphi_0 + \pi/2$. Menons par les sommets W_1^0, T_1^0 resp. par les sommets V_1^0, U_1^0 des droites parallèles, passant par des points intérieurs du parallélogramme $T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0$ et découpant sur le parallélogramme $T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0$ les triangles $W_1^0 V_1^0 W^{x_0}$ et $T_1^0 U_1^0 T^{x_0}$ ou respectivement $V_1^0 W_1^0 V^{x_0}$ et $U_1^0 T_1^0 U^{x_0}$. Nous menons ces droites de telle manière que l'on ait $\{W_1^0 V_1^0 W^{x_0}\} + \{T_1^0 U_1^0 T^{x_0}\} = \varepsilon$, $\{V_1^0 W_1^0 V^{x_0}\} + \{U_1^0 T_1^0 U^{x_0}\} = \varepsilon$. Soit la mesure de l'angle convexe $(W_1^0 W^{x_0}, W_1^0 V_1^0) = x_0$. Deux droites quelconques parallèles passant par les sommets opposés du parallélogramme et faisant avec l'axe l_0 l'angle $\varphi + \pi/2$, $\varphi_0 - x_0 < \varphi < \varphi_0 + x_0$, passe par des points intérieurs appartenant aux triangles $W_1^0 V_1^0 W^{x_0}$, $T_1^0 U_1^0 T^{x_0}$ ou $V_1^0 W_1^0 V^{x_0}$, $U_1^0 T_1^0 U^{x_0}$. Chaque couple de telles droites parallèles découpe donc dans le parallélogramme $T_1^0 V_1^0 W_1^0 U_1^0$ un parallélogramme dont l'aire est supérieure à $M(\varphi_0) - \varepsilon$. De là, en appliquant le théorème 8, on obtient $M(\varphi) > M(\varphi_0) - \varepsilon$ et le théorème se trouve démontré.

Théorème 11 — $M(\varphi)$ est une fonction continue de la variable φ.

Démonstration — Cela résulte des théorèmes 9 et 10.

Théorème 12 — $\Theta(\varphi)$ est une fonction semi-continue inférieurement, $\omega(\varphi)$ une fonction semi-continue supérieurement de la variable φ.

Démonstration — Soit $\varphi_n \to \varphi_0$. Admettons que l'on ait $\limsup\limits_{n\to\infty} \omega(\varphi_n) > \omega(\varphi_0)$. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 9 on voit qu'il existerait alors une suite partielle $\varphi_{\mu(i)}$ telle que $\lim\limits_{i\to\infty} \omega(\varphi_{\mu(i)}) = \omega^* > \omega(\varphi_0)$ $\lim\limits_{i\to\infty} S_2(\varphi_{\mu(i)}) = T^* V^* W^* U^*$ et $\lim\limits_{i\to\infty} M(\varphi_{\mu(i)}) = M(\varphi_0)$. Il y aurait contradiction, car, en vertu du théorème 11, on a $\{T^* V^* W^* U^*\} = M(\varphi_0)$, le parallélogramme $T^* V^* W^* U^*$ est donc du type $TVWU$ (voir la démonstration du théorème 8) et en appliquant le théorème 8 nous avons $\sphericalangle(\overrightarrow{V^* W^*}, \overrightarrow{W^* U^*}) = \omega^* \leqslant \omega(\varphi_0)$. Donc $\limsup\limits_{n\to\infty} \omega(\varphi_n) \leqslant \omega(\varphi_0)$.

La semi-continuité inférieure de la fonction $\Theta(\varphi)$ se démontre de la même façon.

Après ces théorèmes préliminaires nous sommes en état de demontrer le

Théorème I — *Dans toute figure convexe plane, ayant des points intérieurs, on peut inscrire un rectangle dont l'aire est au moins égale à la moitié de l'aire de la figure convexe. La limite est exacte pour le triangle.*

Démonstration — En conservant les notations introduites ci-dessus choisissons dans le plan de la figure convexe R une direction l_0 telle que l'on ait $M(0) = \max M(\varphi)$ (l'existence de ce maximum résulte du théorème 11).

Nous distinguerons trois cas.

I. $\Theta(0) \leqslant \pi/2 \leqslant \omega(0)$.

Dans le cas où $\Theta(0) < \pi/2 < \omega(0)$, au moins un des côtés $V_1 W_1, T_1 U_1$ du parallélogramme $S_1(0)$ et au moins un des côtés $V_2 W_2 U_2 T_2$ du parallélogramme $S_2(0)$ appartiennent à la frontière de la figure convexe R. Remarquons ici que si p. ex. les côtés $V_1 W_1$ et $V_2 W_2$ ne sont pas confondus, alors les côtés $T_1 U_1$ et $T_2 U_2$ doivent l'être, car, dans le cas contraire, en déplaçant le parallélogramme vers l'axe x nous n'aurions pas de rectangle maximum.

Soient, pour fixer les idées, $V_1 W_1$ et $V_2 W_2$ les côtés qui appartiennent à la frontière de la figure convexe et ne sont pas confondus. Si l'on déplace d'une façon continue le côté $V_1 W_1$ le long de $V_1 W_2$ jusqu'à ce qu'ils se confondent, on obtient un ensemble de parallélogrammes $TVWU$ pour lesquels l'angle $\sphericalangle(\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{WU})$ varie d'une façon continue de $\Theta(0)$ à $\omega(0)$. Comme $\Theta(0) < \pi/2 < \omega(0)$, l'angle $(\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{WU})$ doit passer par un angle droit et l'on obtient un rectangle inscrit dans R, ayant les propriétés demandées.

Dans le cas où $\Theta(0) = \pi/2$ ou $\omega(0) = \pi/2$, le théorème est évident.

II. $\Theta(0) \leqslant \omega(0) < \pi/2$.

Posons $\varphi_0 = \omega(0)$. Comme $M(0) = \max M(\varphi)$, $S_2(\varphi_0)$ est un parallélogramme maximum pour la direction φ_0. En appliquant le théorème 8 on voit facilement que $\omega(\varphi_0) \geqslant \pi - \omega(0) > \pi/2$. Donc, dans l'intervalle $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ la fonction $\omega(\varphi)$ prend des valeurs supérieures à $\pi/2$, et la fonction $\Theta(\varphi)$ des valeurs inférieures à $\pi/2$. Pour $\varphi \epsilon [0, 2\pi]$ on a ainsi $\inf \Theta(\varphi) \leqslant \varphi \leqslant \sup \omega(\varphi)$.

En vertu du théorème 8 $\Theta(\varphi) \leqslant \omega(\varphi) \cdot \Theta(\varphi)$ est semi-continue inférieurement, $\omega(\varphi)$ semi-continue supérieurement. Il résulte des théorèmes 1 et 2 qu'il existe une valeur $\overline{\varphi}$ telle que $\Theta(\overline{\varphi}) \leqslant \pi/2 \leqslant \omega(\overline{\varphi})$ et ainsi le second cas se trouve ramené au premier.

III. $\pi/2 < \Theta(0) \leqslant \omega(0)$.

Prenons $\varphi_0 = \Theta(0) \cdot S_1(0)$ est un parallélogramme maximum ayant deux côtés perpendiculaires à l'axe x, qui fait avec l'ave l_0 l'angle φ_0. En vertu du théorème 8 $\Theta(\varphi_0) \leqslant \pi - \Theta(0) < \pi/2$ d'où $\inf \Theta(\varphi) \leqslant \pi/2 \leqslant \sup \omega(\varphi)$. De même que plus haut, le troisième cas est ramené au premier.

3. Soit dans l'espace un corps convexe F tel qu'un partie de sa frontière appartienne à un plan τ et que toute droite perpendiculaire à τ

ait en commun avec le reste de la frontière de F au plus un point ou un segment, dont une extrémité est située sur τ.

Dans le plan τ introduisons un système de coordonnées cartésien x, y d'origine O' et fixons un sens direct sur l'axe l_0, avec lequel le sens positif de l'axe x fait l'angle φ. Par le point O' menons l'axe z, perpendiculaire à τ. Faisons passer par l'axe x un plan $\tau(\varphi, x)$ perpendiculaire au plan τ et par l'axe y un plan $\tau(\varphi, y)$ perpendiculaire à τ. Les notations seront analogues à celles du théorème précédent. Construisons enfin dans l'espace, comme dans la définition 2, le corps convexe $F(\varphi, x)$ en déplaçant le corps convexe F vers le plan $\tau(\varphi, x)$, et le corps convexe $F(\varphi, x, y)$ en déplaçant le corps convexe $F(\varphi, x)$ vers le plan $\tau(\varphi, y)$. Nous désignerons le volume du corps convexe X par $\{X\}$.

Démontrons d'abord quelques théorèmes préliminaires.

Théorème 1' — Il existe un parallélépipède rectangle $OABCO'A'B'C'$ inscrit dans le corps convexe $F(\varphi, x, y)$, de volume au moins égal à $\frac{2}{9}\{F(\varphi, x, y)\}$.

Démonstration — Soit C un point de la frontière de $F(\varphi, x, y)$ n'appartenant à aucun des plans coordonnés. Soient A, B, C' les projections de ce point sur les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ respectivement, et A', B' les projections des points A et B sur le plan $z=0$. Désignons encore par O le point d'intersection du plan ABC avec l'axe z. $\{OABCO'A'B'C'\}$ est borné et possède un maximum, on le démontre de même que dans le théorème 6. Posons max $\{OABCO'A'B'C'\} = I(\varphi)$. Le point C est situé srr la surface $x \cdot y \cdot z = I(\varphi)$. Cette surface n'a avec $F(\varphi, x, y)$ qu'un seul point commun $C(x_1, y_1, z_1)$; s'il existait encore un autre point commun $C'(x_2, y_2, z_2)$, le point

$$C''\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2}, \quad \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

appartiendrait aussi à $F(\varphi, x, y)$ et le volume du parallélépipède, dont le point C'' est un sommet, serait égal à

$$\frac{1}{8}(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) =$$

$$= \frac{1}{8} I(\varphi)\left(2 + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right) \geqslant I(\varphi)$$

l'égalité n'ayant lieu, comme on le démontre facilement, que pour

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$$

Nous allons encore montrer que $F(\varphi, x, y)$ est situé entièrement d'un côté du plan tangent à la surface $xyz = I(\varphi)$ au point C. Cela résulte du fait que la surface $xyz = I(\varphi)$ est convexe pour $x > 0$, $y > 0$ et que $F(\varphi, x, y)$ n'a pas de points intérieurs communs avec le domaine convexe, limité par la surface $xyz = I(\varphi)$; il existe donc un plan séparant $F(\varphi, x, y)$ de ce domaine convexe [5]). Ce plan ne peut être autre que le plan tangent en C à la surface $xyz = I(\varphi)$, car celle-ci est régulière pour $x > 0$ $y > 0$. Le plan tangent en C à la surface $xyz = I(\varphi)$ coupe les axes aux points K, L, M. Le parallélépipède rectangle $OABCO'A'B'C'$ est contenu dans la pyramide $O'KLM$ et il est maximum dans celle-ci. Cela résulte du fait que tout autre point C'' de $F(\varphi, x, y)$ est situé à l'extérieur du domaine limité par la surface $xyz = I(\varphi)$; le parallélépipède rectangle correspondant a donc un volume plus petit. Comme le volume du parallélépipède rectangle maximum inscrit dans la pyramide $O'KLM$ est $\frac{2}{9}\{O'KLM\}$, on a $\{F(\varphi, x, y)\} \leqslant \frac{9}{2} I(\varphi)$.

Il en résulte immédiatement le

Théorème 2' — Il existe un parallélépipède rectangle $OABCO'A'B'C'$ et un seul, contenu dans $F(\varphi, x, y)$, dont les sommets $OABO'A'B'C'$ sont situés sur les plans coordonnés et dont le volume $I(\varphi)$ est maximum.

Par le point C menons maintenant un plan $\tau(c)$ perpendiculaire à l'axe z. Ce plan coupe le corps convexe $F(\varphi, x, y)$ suivant une figure convexe plane $R(\varphi, x, y)$, le corps convexe $F(\varphi, x)$ suivant une figure convexe plane $R(\varphi, x)$, et le corps convexe F suivant une figure convexe plane $R(\varphi)$. Le rectangle $OABC$ sera évidemment maximum dans $R(\varphi, x, y)$. Dans les figures convexes planes $R(\varphi, x, y)$, $R(\varphi, x)$ et $R(\varphi)$ faisons les mêmes constructions, en conservant les notations de la déf. 4. Désignons par M' la projection du point M, appartenant au plan $\tau(c)$, sur le plan τ. En abaissant les perpendiculaires des sommets des parallélogrammes $S_1(\varphi)$ et $S_2(\varphi)$ sur le plan τ nous obtenons les parallélépipèdes $P_1(\varphi)$ et $P_2(\varphi)$.

Théorème 3' — $\{P_1(\varphi)\} = \{P_2(\varphi)\} = I(\varphi)$. $P_1(\varphi)$ et $P_2(\varphi)$ sont des parallélépipèdes inscrits dans le corps convexe F. Le volume de tout parallélépipède contenu dans F, ayant deux côtés parallèles au plan $x = 0$ et un côté appartenant au plan $z = 0$, est au plus égal à $I(\varphi)$. L'égalité n'a lieu que pour les parallélépipèdes $TVWUT'V'W'U'$ (le parallélogramme $TVWU$ a été défini dans la démonstration du théor. 8) $\Theta(\varphi) \leqslant (\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{WU}) \leqslant \omega(\varphi)$.

Démonstration — On procède comme dans la démonstration du théorème 8, en remplaçant les figures planes par les corps correspondants.

Théorème 4' — $I(\varphi)$ est une fonction semi-continue supérieurement du paramètre φ.

---

[5]) Bonnesen et Fenchel, Theorie der konvexen Körper p. 5.

La démonstration est analogue à celle du th. 9.

Théorème 5' — *$I(\varphi)$ est une fonction semi-continue inférieurement du paramètre φ.*

Démonstration analogue à celle du th. 10

Théorème 6' — *$I(\varphi)$ est une fonction continue du paramètre φ.*

Théorème 7' — *$\Theta(\varphi)$ est une fonction semi-continue inférieurement, $\omega(\varphi)$ une fonction semi-continue supérieurement du paramètre φ.*

On démontre ces théorèmes de même que les th. 11 et 12.

Théorème II — *Dans tout corps convexe dans l'espace, ayant des points intérieurs et un plan de symétrie, on peut inscrire un parallélépipède rectangle de volume au moins égal à $\frac{2}{9}$ du volume de corps convexe.*

Démonstration analogue à celle du th. I.

Théorème III — *A tout corps convexe F dans l'espace, ayant des points intérieurs, on peut circonscrire un parallélépipède rectangle W tel que $\{W\} \leqslant 6\{F\}$.*

Démonstration — Soit AB la corde la plus longue du corps convexe F. Nous menons à l'extérieur de F un plan τ perpendiculaire à AB et déplaçons le corps convexe F vers lui. Après ce déplacement le segment AB se transforme en segment $A'B'$. Nous obtenons un corps convexe F' de volume égal à celui du corps convexe F. La projection du corps convexe F sur le plan τ est une figure convexe plane R. On sait qu'à une figure convexe plane on peut circonscrire un rectangle P tel que $\{P\} \leqslant 2\{R\}$. Nous construisons le parallélépipède rectangle W' circonscrit à F', dont la base est le rectangle P et la hauteur $A'B'$. Le volume du parallélépipède rectangle W' est $\{W'\} = \{P\}\{A'B'\}$. Nous construisons un cône S dont la base est la figure convexe plane R et la hauteur $A'B'$. La cône S est entièrement contenu dans le corps convexe F'. Son volume est $\{S\} = \frac{1}{3}\{A'B'\}\{R\}$. On a évidemment $\{S\} \leqslant \{F'\}$, donc $\{F'\} \geqslant \frac{1}{3}\{A'B'\} \cdot \cdot \{R\} \geqslant \frac{1}{6}\{A'B'\}\{P\} = \frac{1}{6}\{W'\}$.

Comme il est possible de circonscrire au corps convexe F un parallélépipède identique W et $\{F'\} = \{F\}$, l'on a enfin $\{F\} \geqslant 6\{W\}$.

Streszczenie

Figurą wypukłą nazywamy zbiór zamknięty i ograniczony punktów, który z dowolną prostą może mieć wspólnym najwyżej odcinek lub pojedyńczy punkt.

Twierdzenie I — *W każdą figurę wypukłą płaską, posiadającą punkty wewnętrzne, można wpisać prostokąt, którego pole jest nie mniejsze od połowy pola figury wypukłej.*

Niech R będzie figurą wypukłą płaską w płaszczyźnie której wprowadzimy układ współrzędnych kartezjańskich x, y o początku O. Kierunek dodatni osi Ox tworzy z pewnym ustalonym kierunkiem (osi l_0) kąt φ. Rzut prostopadły figury wypukłej R na oś Ox jest odcinkiem $a \leqslant x \leqslant b$. Prosta $x = \bar{x}$, gdzie $a \leqslant \bar{x} \leqslant b$, posiada z R punkty wspólne, których rzędne spełniają nierówności $f(\bar{x}) \leqslant y \leqslant g(\bar{x})$. Zbiór punktów, których rzędne spełniają nierówności $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant g(x) - f(x)$, oznaczymy przez $R(\varphi, x)$. Konstrukcję prowadzącą do zbudowania figury wypukłej $R(\varphi, x)$ z figury wypukłej R nazwiemy dosunięciem R do osi Ox. Dosuwając $R(\varphi, x)$ do osi Oy otrzymamy figurę wypukłą, którą oznaczymy przez $R(\varphi, x, y)$. Pola figur wypukłych R; $R(\varphi, x)$ i $R(\varphi, x, y)$ są równe, co zapiszemy $\{R\} = \{R(\varphi, x)\} = \{R(\varphi, x, y)\}$. Można udowodnić, że istnieje jeden i tylko jeden prostokąt $OACB$ wpisany w figurę wypukłą $R(\varphi, x, y)$, taki, że trzy jego wierzchołki leżą na osiach współrzędnych i jego pole $M(\varphi)$ jest maksymalne, mamy wiec $M(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}\{R(\varphi, x, y)\}$.

Załóżmy, że wierzchołek C prostokąta $OACB$ jest punktem leżącym na brzegu $R(\varphi, x, y)$ i nie leżącym na żadnej z osi współrzędnych. Prosta równoległa do osi Ox i przechodząca przez punkt C, przecina $R(\varphi, x)$ wzdłuż odcinka FG, odcięta punktu F jest mniejsza od odciętej punktu G. Oznaczymy odpowiednio przez D i E rzuty prostopadłe tych puntów na oś Ox. Oczywiście $BC = FG$, $CA = FD$, $\{DEFG\} = M(\varphi)$.

Prosta równoległa do osi Oy, przechodząca przez punkt D przecina R wzdłuż odcinka T_2U_1, prosta równoległa do osi Oy, przechodząca przez punkt E, przecina R wzdłuż odcinka V_1W_2, gdzie U_1 i W_2 mają rzędne odpowiednio większe niż T_2 i V_1. Oczywiście $DF \leqslant T_2U_1$ i $EG \leqslant V_1W_2$. Weźmy na odcinku T_2U_1 dwa punkty T_1 i U_2 i na odcinku V_1W_2 dwa punkty V_2 i W_1, tak, ażeby było $T_1U_1 = T_2U_2 = DF = V_1W_2 = V_2W_2$. Oczywiście $\{T_1V_1W_1U_1\} = \{T_2V_2W_2U_2\} = M(\varphi)$.

Jako obieg dodatni na równoległobokach $T_1V_1W_1U_1$ i $T_2V_2W_2U_2$ przyjmiemy kierunek $V_1 \to W_1$ i odpowiednio $V_2 \to W_2$. Oznaczymy przez $\Theta(\varphi)$ kąt wypukły dodatni jaki tworzy odcinek skierowany V_1W_1 z odcinkiem skierowanym W_1U_1. $\Theta(\varphi) = \sphericalangle(\overrightarrow{V_1W_1}, \overrightarrow{W_1U_1})$. Analogicznie $\omega(\varphi) = \sphericalangle(\overrightarrow{V_2W_2}, \overrightarrow{W_2U_2})$. Z konstrukcji jest widoczne, że $\Theta(\varphi) \leqslant \omega(\varphi)$. Dowodzi się, że $\Theta(\varphi)$ jest funkcją dolnie półciągłą, $\omega(\varphi)$ górnie półciągłą, a $M(\varphi)$ funkcją ciągłą parametru φ.

Obierzmy teraz w płaszczyźnie figury wypukłej R kierunek l_0 tak, ażeby było $M(0) = \max M(\varphi)$. Rozróżnimy trzy przypadki.

I. $\Theta(0) \leqslant \pi/2 \leqslant \omega(0)$.

Prawdziwość twierdzenia jest oczywista.

II. $\Theta(0) \leqslant \omega(0) < \pi/2$.

Przyjmiemy $\varphi_0 = \omega(0)$. Stwierdzamy, że $\omega(\varphi_0) \geqslant \pi - \omega(0) > \pi/2$. Stąd, istnieje wartość $\overline{\varphi}$ taka; że $\Theta(\overline{\varphi}) \leqslant \pi/2 \leqslant \omega(\overline{\varphi})$ i w ten sposób przypadek II sprowadzamy do I.

III. $\pi/2 < \Theta(0) \leqslant \omega(0)$.

Przyjmujemy $\varphi_0 = \Theta(0)$. Mamy stąd $\Theta(\varphi_0) \leqslant \pi - \Theta(0) < \pi/2$ i podobnie jak wyżej sprowadzamy ten przypadek do pierwszego.

W analogiczny sposób dowodzi się:

Twierdzenie II —,W dowolną figurę wypukłą przestrzenną, posiadającą punkty wewnętrzne i płaszczyznę symetrii, można wpisać prostopadłościan, którego objętość jest nie mniejsza od $\frac{2}{9}$ objętości figury wypukłej.

Podano też w tej pracy elementarny dowód:

Twierdzenie III — Na każdej figurze wypukłej przestrzennej, posiadającej punkty wewnętrzne, można opisać prostopadłościan, którego objętość jest nie większa od 6 objętości figury wypukłej.

Резюме

Выпуклой фигурой называем замкнутое и ограниченное множество точек, которое с произвольной прямой может иметь общим больше всего отрезок или одну точку.

Теорема 1. В каждую плоскую выпуклую фигуру R, имеющую внутренние точки, можно вписать прямоугольник, площадь которого не меньше $\frac{1}{2}$ площади фигуры R.

В плоскости фигуры R введем прямоугольную систему координат x, y с началом O. Положительное направление оси Ox образует с некоторым фиксированным направлением (оси l_0) угол φ. Ортогональная проекция фигуры R на ось Ox является отрезком $a \leqslant x \leqslant b$. Прямая $x = \overline{x}$, где $a \leqslant \overline{x} \leqslant b$, имеет с R общие точки, которых ординаты удовлетворяют неравенствам $f(\overline{x}) \leqslant y \leqslant g(\overline{x})$. Множество точек, которых ординаты удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $O \leqslant y \leqslant g(x) - f(x)$ обозначим через $R(\varphi, x)$. Повторяя выше указанную операцию относительно выпуклой фигуры $R(\varphi, x)$ и оси Oy получим выпуклую фигуру $R(\varphi, x, y)$. Площади фигур R, $R(\varphi, x)$ и $R(\varphi, x, y)$ являются равными, что запишем $|R| = |R(\varphi, x)| = |R(\varphi, x, y)|$. Можно доказать, что существует один и только один прямоугольник $OACB$, вписанный в $R(\varphi, x, y)$ и такой, что 3 его вершины принадлежат осям координат и площадь которого максимальна.

Предположим, что вершина C прямоугольника $OACB$ является точкой принадлежащей границе $R(\varphi, x, y)$ и не принадлежит никакой из осей координат. Прямая параллельная оси Ox и проходящая через точку C пересекает $R(\varphi, x, y)$ вдоль отрезка FG, точка F имеет абсциссу меньшую чем точка G. Обозначим через D и E ортогональные проекции этих точек на ось Ox. Имеем $BC = FG$, $CA = FD$, $\{DEGF\} = M(\varphi)$.

Прямая параллельная оси Oy, проходящая через точку D пересекает R вдоль отрезка T_2U_1, прямая параллельная оси Oy, проходящая через точку E пересекает R вдоль отрезка V_1W_2, где U_1 и W_2 имеют ординаты большые чем T_2 и V_1. Очевидно $DF \leqslant T_2U_1$ и $EG \leqslant V_1W_2$. Выберем на отрезке T_2U_1 точки T_1 и U_2, на отрезке V_1W_2 точки V_2 и W_1 так чтобы $T_1U_1 = T_2U_2 = DF = V_1W_1 = V_2W_2$. Имеем $\{T_1V_1W_1U_1\} = \{T_2V_2W_2U\} = M(\varphi)$.

Пусть положительным направлением обхода на параллелограмах $T_1V_1W_1U_1$ и $T_2V_2W_2U_2$ будет $V_1 \to W_1$ и $V_2 \to W_2$. Обозначим через $\Theta(\varphi)$ выпуклый положителный угол между направленными отрезками V_1W_1 и W_1U_1. $\Theta(\varphi) = \sphericalangle(\overrightarrow{V_1W_1}, \overrightarrow{W_1U_1})$. Аналогично $\omega(\varphi) = \sphericalangle(V_2W_2, W_2U_2$. Очевидно $\Theta(\varphi) \leqslant \omega(\varphi)$. Доказывается, что $\Theta(\varphi)$ является функцией полунепрерывной снизу, $\omega(\varphi)$ полунепрерывной сверху, $M(\varphi)$ непрерывной функцией параметра φ.

Выберем теперь в плоскости выпуклой фигуры R такое направление l_0, чтобы $M(0) = \max M(\varphi)$. Рассмотрим три случаи.

I. $\Theta(0) \leqslant \pi/2 \leqslant \omega(0)$.

Справедливость теоремы очевидна.

II. $\Theta(0) \leqslant \omega(0) < \pi/2$.

Пусть $\varphi_0 = \omega(0)$. Тогда $\omega(\varphi_0) \geqslant \pi - \omega(0) > \pi/2$, откуда существует такое значение $\bar{\varphi}$, что $\Theta(\bar{\varphi}) \leqslant \pi/2 \leqslant \omega(\bar{\varphi})$ и таким образом случай II приведен к I.

III. $\pi/2 < \Theta(0) \leqslant \omega(0)$,

Принимаем $\varphi_0 = \Theta(0)$. Тогда $\Theta(\varphi_0) \leqslant \pi - \Theta(0) < \pi/2$ и как выше приведем этот случай к I.

Аналогично доказывается:

Т е о р е м а 2. В каждое выпуклое тело F, имеющее внутренние точки и плоскость симметрии, можно вписать прямой параллелепипед, объем которого не меньше $\frac{2}{9}$ объема F.

В этой работе имеется тоже доказательство:

Т е о р е м а 3. На каждом выпуклом теле F, имеющем внутренние точки, можно описать прямой параллелепипед, объем которого не больше 6 объемов F.