ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. V, 4. SECTIO A 1951

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

JAN MINKIEWICZ

Sur la résolution approchée de l'équation du cinquième degré

O przybliżonym rozwiązaniu równania piątego stopnia.

О приближенном решении уравнений пятой степени

Il est bien connu que toute équation du cinquième degré peut être ramenée, au moyen d'une transformation convenable, à la forme

(1) $$x^5 + Ax + B = 0$$

Supposons A et B réels et mettons l'équation sous la forme

$$x^5 - (-A)\,x = -B$$

ou encore

(2) $$(x^3 - \sqrt{-A}\cdot x)\,(x^2 + \sqrt{-A}) = -B\,.$$

Considérons maintenant, dans un système de coordonnées rectangulaires, un cercle de centre O et de rayon arbitraire R (R sera calculé tout à l'heure), et soit ξ une racine réelle de l'équation (1). En portant l'abscisse ξ sur l'axe x et en élevant la perpendiculaire Mn, nous avons (cf. la figure)

(3) $$\cos\alpha = \frac{OM}{R} = \frac{\xi}{R}$$

D'autre part, si nous traçons l'angle 3α et si nous désignons par ξ_1 la projection du rayon OP sur l'axe x, il vient

(4) $$\cos 3\alpha = \frac{\xi_1}{R}\,.$$

Or,

(5) $$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$$

Des égalités (3), (4) et (5) il résulte, après un calcul simple,

(6) $$\xi^3 = \frac{3}{4}R^2\xi + \frac{R^2}{4}\xi_1$$

ξ est donc fonction de R et ξ_1

Substituons (6) dans l'équation (2), nous obtenons

$$\left[\left(\frac{3}{4}R^2-\sqrt{-A}\right)\xi+\frac{R^2}{4}\xi_1\right](\xi^2+\sqrt{-A})=-B.$$

Choisissons maintenant R de façon que l'on ait $\frac{3}{4}R^2-\sqrt{-A}=0$ c. à d.

$$R=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[4]{-A}. \tag{7}$$

Nous aurons

$$\frac{R^2}{4}\xi_1\ \ (\xi^2+\sqrt{-A})=-B \tag{8}$$

En substituant dans (8) les valeurs de ξ et ξ_1, données par (3) et (4), nous obtenons

$$\frac{R^3}{4}\cos 3\,\alpha\,(R^2\cos^2\alpha+\sqrt{-A})=-B \tag{9}$$

Les égalités (7) et (9) donnent, après quelques transformations très simples

$$\cos 3\,\alpha\left(\frac{4}{3}\cos^2\alpha+1\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{-A}} \tag{10}$$

Or, il est possible de dresser une table des valeurs approchées de la fonction $\varphi(\alpha)$ qui constitue le membre gauche de la dernière égalité. Donc, étant donnés les coefficients A et B de l'équation, on calculera la valeur correspondante de $\varphi(\alpha)$ et l'on déterminera, au moyen de la table des valeurs de $\varphi(\alpha)$, l'angle ou les angles α. En portant la valeur de α ainsi obtenue dans

$$\xi=R\cos\alpha=\frac{2}{3}\sqrt[4]{-A}\cdot\cos\alpha$$

on aura les valeurs approchées des racines de l'équation.

Exemple.

Soit l'équation $x^5-x-0{,}419=0$

Dans ce cas $A=-1$, $B=-0{,}419$ donc

$$\varphi(\alpha)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{-A}}}\approx 1{,}089$$

La valeur correspondante de α est $\approx 20^0$. Comme $\cos 20^0\approx 0{,}94$, on a

$$\xi=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[4]{-A}\cos\alpha\approx 1{,}085.$$

Vérification:

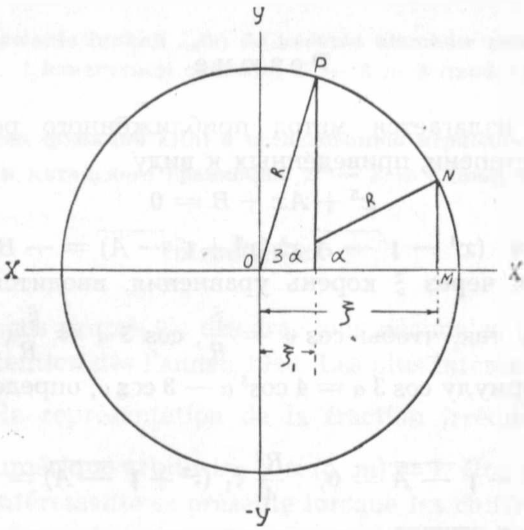
$$1{,}085^5-1{,}085-0{,}419\approx 1{,}505-1{,}504=0{,}001.$$

M. BIERNACKI

Remarque au sujet du travail de Jan Minkiewicz "Sur la résolution approchée de l'équation du cinquième degré".

La méthode employée par M. Minkiewicz s'apparente à celle employée par Gauss dans sa résolution de l'équation trinome (Werke Bd. III, 1876, p. 85). Comme la fonction $\cos 3\alpha\left(\frac{4}{3}\cos^2\alpha+1\right)$ employée par M. Minkiewicz oscille entre les limites $\pm\frac{7}{3}$, la méthode n'est applicable que dans le cas où

$$A<0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{B}{A\sqrt[4]{-A}}\right| \leqslant \frac{14\sqrt{3}}{27} \approx 0{,}898\,.$$



Streszczenie

W pracy podana jest metoda przybliżonego rozwiązywania równań stopnia piątego, sprowadzonych do postaci

$$x^5+Ax+B=0$$

$$\text{czyli } (x^3-\sqrt{-A}\cdot x)(x^2+\sqrt{-A})=-B\,.$$

Oznaczając przez ξ pierwiastek równania, wprowadza się parametry: kąt α, R i ξ_1, tak, by $\cos\alpha=\frac{\xi}{R}$, $\cos 3\alpha=\frac{\xi_1}{R}$ po czym, korzystając z wzoru $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ wyznacza się ξ_1 i R tak, by było

$$\frac{4}{3}R^2 - \sqrt{-A} = 0, \qquad \frac{R^2}{4}\xi_1(\xi^2 + \sqrt{-A}) = -B$$

Otrzymuje się stąd

$$\varphi(\alpha) = \cos 3\alpha\left(\frac{4}{3}\cos^2\alpha + 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{-A}}$$

Po wstawieniu współczynników A i B otrzymuje się pewną wartość na $\varphi(\alpha)$ i wyznacza się, przy pomocy tablicy wartości funkcji $\varphi(\alpha)$, odpowiedni kąt α. Pierwiastek równania dany jest wówczas wzorem

$$\xi = \frac{2}{3}\sqrt[4]{-A}\cdot\cos\alpha.$$

Резюме

В работе излагается метод приближённого решения уравнений пятой степени, приведённых к виду

$$x^5 + Ax + B = 0$$

$$\text{или}\quad (x^3 - \sqrt{-A}\,x)(x^2 + \sqrt{-A}) = -B$$

Обозначая через ξ корень уравнения, вводится параметры: угол α, R и ξ_1 так, чтобы $\cos\alpha = \frac{\xi}{R}$, $\cos 3\alpha = \frac{\xi_1}{R}$, после чего, используя формулу $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, определяется ξ_1 и R так, чтобы

$$\frac{3}{4}R^2 - \sqrt{-A} = 0, \qquad \frac{R^2}{4}\xi_1(\xi^2 + \sqrt{-A}) = -B$$

Получается отсюда

$$\varphi(\alpha) = \cos 3\alpha\left(\frac{4}{3}\cos^2\alpha + 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{-A}}$$

После подстановки коэффициентов A и B получается некоторое значение на $\varphi(\alpha)$ и определяется, при помощи таблицы значений $\varphi(\alpha)$ соответствующий угол α. Корень уравнения определится тогда формулой

$$\xi = \frac{2}{3}\sqrt[4]{-A}\cdot\cos\alpha$$