ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. V, 3. SECTIO A 1951

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

W. JANKOWSKI

Sur les zéros des polynomes contenant des paramètres arbitraires.

O zerach wielomianów zawierających dowolne parametry.

О корнях полиномов с параметрами.

Introduction.

Ce travail a pour objet la détermination de la limite supérieure du module d'un certain nombre de zéros d'un polynome, limite indépendante de la valeur des paramètres arbitraires qui y figurent, dans les cas où ces paramètres entrent linéairement dans le polynome. E. Landau [1]) a donné le premier exemple d'une limite indépendante des coefficients arbitraires du polynome. P. Montel [2]) généralise ce problème posé par E. Landau en montrant que le polynome

$$1 + a_1 z + \ldots\ldots + a_p z^p + a_{p+1} z^{n_{p+1}} + \ldots\ldots + a_{p+k-1} z^{n_{p+k-1}}$$

dans lequel $a_1, \ldots, a_p$ sont des nombres fixes, a toujours p zéros dont le module est inférieur à un nombre fixe $\varphi(a_1, \ldots, a_p, k)$ ne dépendant que de $a_1, \ldots, a_p$ et du nombre des termes du polynome. Ces questions sont connues sous le nom de problème de Landau-Montel.

---

[1]) E. Landau — *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard.* (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, t. 24, 1907, p. 179—201).

[2]) P. Montel — *Sur les modules des zéros des polynomes* (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, t. 40, 1923, p. 1—34).

M. Biernacki[3]) s'est occupé de ce problème et a étudié le polynome du type

$$a_1 P_1 (z) + \ldots\ldots + a_k P_k (z)$$

où l'on ne suppose connus que les degrés des polynomes $P_1(z), \ldots, P_k(z)$ et les regions $R_1, \ldots, R_k$ qui contiennent respectivement tous leurs zéros. M. Biernacki a obtenu pour $k=2$ le résultat suivant:

$P(z)$ étant un polynome de degré p, dont tous les zéros ne dépassent pas en module P, $Q(z)$ un polynome de degré q $(q > p)$, dont tous les zéros ne dépassent pas en module Q, l'équation $P(z) + aQ(z) = 0$ a p zéros au moins dont le module ne dépasse pas le nombre

$$r = \max \left\{ Q, \frac{qP + pQ}{q - p} \right\}$$

et cette limite supérieure est atteinte.

L'étude de ce problème dans le cas où $k=3$ et $k=4$ est l'objet de ce travail.

Je voudrais exprimer ici ma reconnaissance profonde particulièrement à M. le professeur M. Biernacki, dont je suis l'élève, pour l'aide considérable et suivie qu'il a bien voulu m'accorder dans mon premier travail scientifique. J'adresse aussi mes remerciements sincères à M. le docteur Z. Butlewski pour ses conseils qui ont guidé mes premiers pas dans le domaine du travail scientifique.

§ 1. Nous commencerons par établir deux lemmes.

Lemme 1. *Si $P(z)$ est un polynome de degré p, dont tous les zéros ne dépassent pas en module P. $Q(z)$ est un polynome de degré q $(q > p)$, dont tous les zéros ne depassent pas en module Q et $|a| \geqslant m$ (m est un nombre positif arbitraire), tous les zéros du polynome $P(z) + aQ(z)$ ne dépassent pas en module le nombre.*

$$M(m) = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m}} + \frac{qQ + pP}{q - p} \quad \text{[4]}) \tag{1}$$

[3]) M. Biernacki — *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires.* (Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques, série A, 1927, p. 541—685).

[4]) Dans la démonstration nous écrirons M au lieu de M (m).

Démonstration. Nous nous appuyons sur le théorème de R o u c h é[5]. Dans ce but nous déterminons pour $|a| \geqslant m$ un cercle sur la circonférence duquel sera satisfaite l'inégalité $|P(z)| < |aQ(z)|$. Désignons par M le rayon du cercle en question. Si l'inégalité $|P(z)| < |aQ(z)|$ est vérifiée pour $|z| = M$, les fonctions $aQ(z)$ et $P(z) + aQ(z)$ auront le même nombre de zéros dans le cercle $|z| < M$. Pour $M > Q$ tous les zéros de la fonction $P(z) + aQ(z)$ seront contenus dans le cercle $|z| < M$. Vu la condition $|a| \geqslant m$ nous remplaçons l'inégalité $|P(z)| < |aQ(z)|$ par l'inégalité $|P(z)| < |mQ(z)|$. Si $M > Q$, les inégalités suivantes seront vraies: $|P(z)| \leqslant m(M + P)^p$.

$$m(M - Q)^q \leqslant |m\,Q(z)| \leqslant m(M + Q)^q$$

Donc l'inégalité $|P(z)| < |mQ(z)|$ peut être remplacée par

$$(M + P)^p < m(M - Q)^q \tag{2}$$

En posant $M - Q = u$, on obtient ainsi

$$u + P + Q < \sqrt[p]{m} \cdot u^{\frac{q}{p}} \tag{3}$$

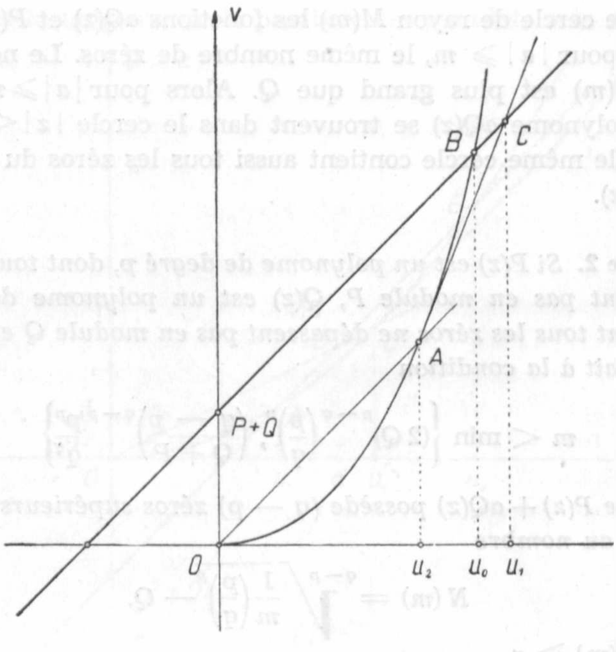

Fig. 1

[5]) S. S a k s i A. Z y g m u n d — *Funkcje analityczne*, 2-e éd., 1948, III, § 10, p. 152.

L'inégalité (3) est satisfaite pour $u > u_0$; u_0 désigne l'abscisse du point d'intersection B de la droite $v = u + P + Q$ avec la parabole $v = \sqrt[p]{m} \cdot u^{\frac{q}{p}}$ (fig. 1). La détermination exacte du nombre u_0 dans le cas général est un problème difficile. Nous remplaçons donc u_0 par l'abscisse u_1 du point d'intersection C de la droite $v = u + P + Q$ avec la tangente de la parabole du point A:

$$u_1 = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m} + \frac{p}{q-p}}\,(P+Q).$$

En posant $u = M - Q$ nous revenons à l'inégalité (2) et nous obtenons le nombre M (en fonction du paramètre m), satisfaisant à la condition (2)

$$M(m) = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m} + \frac{qQ + pP}{q-p}}$$

Dans le cercle de rayon $M(m)$ les fonctions $aQ(z)$ et $P(z) + aQ(z)$ possèdent, pour $|a| \geqslant m$, le même nombre de zéros. Le nombre déterminé $M(m)$ est plus grand que Q. Alors pour $|a| \geqslant m$ tous les zéros du polynome $aQ(z)$ se trouvent dans le cercle $|z| < M(m)$ et, de ce fait, le même cercle contient aussi tous les zéros du polynome $P(z) + aQ(z)$.

Lemme 2. *Si $P(z)$ est un polynome de degré p, dont tous les zéros ne dépassent pas en module P, $Q(z)$ est un polynome de degré q $(q > p)$, dont tous les zéros ne dépassent pas en module Q et $|a| \leqslant m$, où m satisfait à la condition*

$$m < \min\left\{(2Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p, \left(\frac{q-p}{Q+P}\right)^{q-p}\frac{p^p}{q^q}\right\}$$

le polynome $P(z) + aQ(z)$ possède $(q-p)$ zéros supérieurs ou égaux en module au nombre

$$N(m) = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p} - Q. \tag{4}$$

et l'on a $N(m) > r$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous nous appuyons sur le théorème de R o u c h é. Nous trouverons un cercle de centre O, sur la circonférence duquel sera satisfaite l'inégalité $|P(z)| > |aQ(z)|$.

Si $|a| \leqslant m$, on peut remplacer cette inégalité par l'inégalité $|P(z)| > |mQ(z)|$. En désignant par N[6]) le rayon du cercle cherché, nous obtenons pour $P < N$ les inégalités suivantes

$$(N - P)^p \leqslant |P(z)| \leqslant (N + P)^p, \qquad |m\,Q(z)| \leqslant m\,(N + Q)^q.$$

On peut remplacer l'inégalité $|P(z)| > |mQ(z)|$ par

$$(N - P)^p < m\,(N + Q)^q. \tag{5}$$

En posant $N + Q = u$, on obtient ainsi

$$u - (P + Q) > \sqrt[p]{m} \cdot u^{\frac{q}{p}} \tag{6}$$

Pour résoudre cette inégalité nous cherchons des valeurs de u telles que les ordonnées de la droite $v = u - (P + Q)$ soient plus grandes que celles de la parabole $v = \sqrt[p]{m} \cdot u^{\frac{q}{p}}$. On voit, d'après la fig. 2, que l'inégalité (6) est satisfaite dans l'intervalle (u_1, u_2). Pour résoudre cette inégalité il faudrait déterminer l'abscisse u_2 du point B. Vu l'impossibilité de déterminer exactement ce nombre dans le cas général, nous nous contentons de la valeur de l'abscisse u_0 du point C, où la tangente de la parabole est parallèle à la sécante AB.

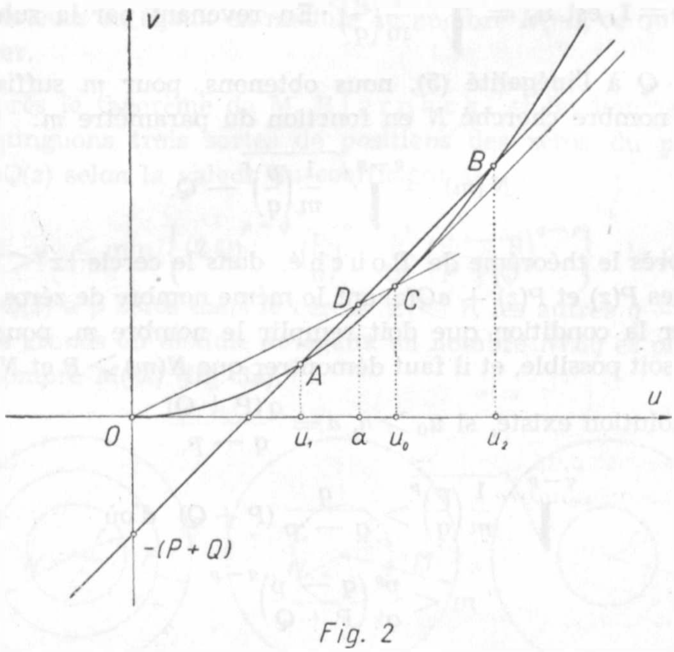

Fig. 2

---

[6]) N est une fonction du paramètre m. Dans la démonstration nous écrirons N au lieu de N (m).

Pour cela nous cherchons, pour la famille des paraboles $y = ax^n$, le lieu géométrique des points, où le coefficient angulaire de la tangente a une valeur fixe k: $y = ax^n$, $nax^{n-1} = k$, d'où $y = \frac{k}{n} \cdot x$. Donc le lieu géométrique de ces points est la droite $y = \frac{k}{n} x$, passant par l'origine.

Pour la famille des paraboles déterminées par l'équation $v = \sqrt[p]{m} \cdot u^{\frac{q}{p}}$, les points $C(u_0, v_0)$, où le coefficient angulaire $= 1$, se trouvent sur la droite $v = \frac{p}{q} u$

Si m est un nombre suffisamment petit, la parabole $v = \sqrt[p]{m} \cdot u^{\frac{q}{p}}$ coupe la droite $v = u - (P + Q)$; l'abscisse u_0 du point C est plus grande que l'abscisse a du point D et satisfait à l'inégalité (6). L'abscisse u_0 du point de la parabole, où le coefficient angulaire de la tangente $= 1$, est $u_0 = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p}$. En revenant par la substitution $u = N + Q$ à l'inégalité (5), nous obtenons, pour m suffisamment petit, le nombre cherché N en fonction du paramètre m:

$$N(m) = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p} - Q.$$

D'après le théorème de Rouché, dans le cercle $|z| < N(m)$ les polynomes $P(z)$ et $P(z) + aQ(z)$ ont le même nombre de zéros. Il reste à trouver la condition que doit remplir le nombre m, pour que la solution soit possible, et il faut démontrer que $N(m) > P$ et $N(m) > r$.

La solution existe, si $u_0 > a$, $a = \frac{q(P+Q)}{q-p}$

$$\sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p} > \frac{q}{q-p}(P+Q) \quad \text{d'où}$$

$$m < \frac{p^p}{q^q}\left(\frac{q-p}{P+Q}\right)^{q-p} \tag{7}$$

Pour m satisfaisant à la condition (7),

$$N(m) = u_0 - Q > a - Q = \frac{qP + pQ}{q-p} > P.$$

La condition $N(m) > r$ est remplie lorsque $N(m) > Q$ et

$$N(m) > \frac{pQ + qP}{q - p}$$

$$\sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p} - Q > Q, \quad \text{lorsque} \quad m < (2Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p$$

$$\sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p} - Q > \frac{pQ + qP}{q - p}, \quad \text{lorsque} \quad m < \frac{p^p}{q^q}\left(\frac{q - p}{P + Q}\right)^{q-p}$$

Si l'inégalité $N(m) > r$ doit être vérifiée, le nombre m doit satisfaire à la condition

$$(7') \qquad m < \min\left\{(2Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p, \quad \frac{p^p}{q^q}\left(\frac{p - q}{P + Q}\right)^{q-p}\right\}$$

Si $|a| \leqslant m$ (m est un nombre satisfaisant à la condition 7'). le polynome $P(z)$ possède p zéros dans le cercle $|z| < N(m)$. En vertu du théorème de R o u c h é le polynome $P(z) + aQ(z)$ a aussi p zéros dans le cercle $|z| < N(m)$, tandis que $q - p$ zéros de ce polynome sont supérieurs ou égaux en module au nombre $N(m)$, ce qu'il fallait démontrer.

D'après le théorème de M. B i e r n a c k i et les lemmes 1 et 2 nous distinguons trois sortes de positions des zéros du polynome $P(z) + aQ(z)$ selon la valeur du coefficient a:

a) Si $|a| < \min\left\{(2Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p, \frac{p^p}{q^q}\left(\frac{q - p}{P + Q}\right)^{q-p}\right\}$, le polynome $P(z) + aQ(z)$ a p zéros dans le cercle $|z| \leqslant r$, les autres $q - p$ zéros sont plus grands en module ou égaux au nombre $N(|a|)$ et plus petits que le nombre $M(|a|)$ (fig. 3a).

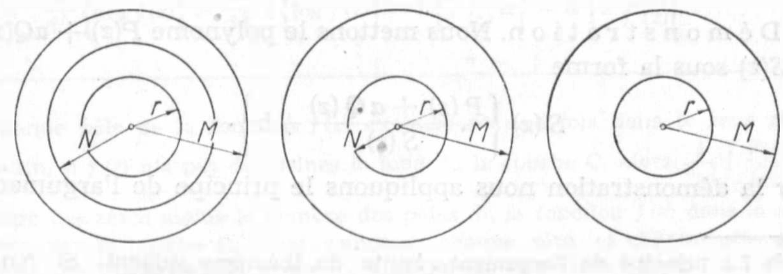

Fig. 3a Fig. 3b Fig. 3c

b) Si $|a| = \min \left\{ (2Q)^{p-q} \left(\frac{p}{q}\right)^{p}, \frac{p^p}{q^q} \left(\frac{q-p}{P+Q}\right)^{q-p} \right\}$, le polynome $P(z) + aQ(z)$ a p zéros au moins dans le cercle $|z| \leqslant r$ et $q-p$ zéros au plus sont plus grands en module ou égalent r et sont plus petits que $M(|a|)$ (fig. 3b).

c) Si $|a| > \min \left\{ (2Q)^{p-q} \left(\frac{p}{q}\right)^{p}, \frac{p^p}{q^q} \left(\frac{q-p}{P+Q}\right)^{q-p} \right\}$, dans le cercle $|z| \leqslant r$ il y a p zéros au moins du polynome $P(z) + aQ(z)$ et tous ces zéros sont plus petits en module que le nombre $M(|a|)$ (fig. 3c).

Il résulte de ces considérations que lorque $|a|$ croît, les nombres $M(|a|)$ et $N(|a|)$ décroissent et, lorsque $|a|$ décroît, les nombres $M(|a|)$ et $N(|a|)$ croissent. Nous profiterons de ces lemmes pour étudier le problème posé par M. Biernacki dans les cas où $k=3$ et $k=4$.

Théorème I. *Si $P(z)$ est un polynome de degré p, dont tous les zéros ne dépassent pas en module le nombre P, $Q(z)$ un polynome de degré q, dont tous les zéros ne dépassent pas en module le nombre Q, $S(z)$ un polynome de degré s ($s > q > p$), dont tous les zéros ne dépassent pas en module le nombre S, alors le polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z)$ a p zéros au moins, dont le module ne dépasse pas le nombre*

$$R = \frac{sM + qS}{s-q} \tag{8}$$

où $$M = \left\{ \max \left[S, \frac{(2s-q+p)r + (q+p)S}{2s-q-p} \right] + Q \right\} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}} + \frac{qQ+pP}{q-p}$$

$$r = \max \left\{ Q, \frac{pQ+qP}{q-p} \right\}.$$

Démonstration. Nous mettons le polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z)$ sous la forme

$$S(z) \left\{ \frac{P(z) + aQ(z)}{S(z)} + b \right\}. \tag{9}$$

Pour la démonstration nous appliquons le principe de l'argument [7]).

---

[7]) Le principe de l'argument résulte du théorème suivant: Si $f(z)$ est une fonction régulière dans la région G, à l'exception d'un nombre fini de pôles, et si l'on a, dans cette région, une courbe C qui entoure chaque racine

Nous distinguons deux cas selon la valeur du module du nombre a:

I. $|a| \leqslant m$,

II. $|a| \geqslant m$, où $m = \min \left\{ (S+Q)^{p-q} \left(\frac{p}{q}\right)^p, \right.$

$$\left. \left[\frac{(2s-q+p)\,r+(q+p)\,S}{2\,s-q-p}+Q\right]^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p \right\}$$

Cas I. Il résulte du lemme 2 que si $|a| \leqslant m$ et si m satisfait à la condition (7′), alors p zéros du polynome $P(z)+aQ(z)$ se trouvent dans le cercle $|z| \leqslant r$, $r = \max\left\{Q, \frac{pQ+qP}{q-p}\right\}$ et les autres zéros du polynome sont dans la région $|z| \geqslant N(m)$. Lorsque m décroît, $N(m)$ augmente. Le nombre m étant convenablement choisi, le polynome $P(z)+aQ(z)$ peut avoir pour $|a| \leqslant m$ $(q-p)$ zéros supérieurs ou égaux en module à un nombre K $(K > r)$, arbitrairement grand.

Supposons que le polynome $P(z)+aQ(z)$ possède p zéros dans le cercle $|z| \leqslant r$ et $(q-p)$ zéros dans la région $|z| \geqslant K$. Nous allons déterminer un nombre K et un nombre R_1, satisfaisant aux conditions $R_1 > S$, $r < R_1 \leqslant K$, tels que, lorsque z $(=R_1e^{i\vartheta})$ décrit dans le sens direct la circonférence $|z| = R_1$ [8]), l'argument de l'expression $\frac{P(z)+a\,Q(z)}{S(z)}$ décroisse d'une façon monotone, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg\frac{P(z)+a\,Q(z)}{S(z)}\right\} \leqslant O \quad {}^{9)} \tag{10}$$

---

[8]) La circonférence $|z| = R_1$ est la courbe C, le cercle $|z| \leqq R_1$ est la région G.

[9]) $\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\} = \frac{d}{d\vartheta}\, I\left\{\log f(z)\right\} = I\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\,iz\right\} = R\left\{z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}$

---

et chaque pôle de la fonction $f(z)$ exactement une fois dans le sens positif, et enfin, si $f(z)$ n'a pas de racines le long de la courbe C, alors $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$ nombre des zéros moins le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans la région limitée par la courbe C. Nous comptons chaque zéro et chaque pôle autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité (Bieberbach — *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. 1, p. 183, 1921).

Dans le cas étudié l'on a:

$$\frac{P(z)+a\,Q(z)}{S(z)}=\frac{\prod_{k=1}^{p}(z+u_k)\cdot\prod_{k=1}^{q-p}(z+v_k)}{\prod_{k=1}^{s}(z+w_k)}$$

où $\quad u_k=\varrho_{1k}\,e^{i\alpha_k},\qquad v_k=\varrho_{2k}\,e^{i\beta_k},\qquad w_k=\varrho_{3k}\,e^{i\gamma_k}$

$\quad \varrho_{1k}\leqslant r\qquad R_1\leqslant K\leqslant\varrho_{2k},\qquad \varrho_{3k}\leqslant S<R_1.$

$$\log\frac{P(z)+a\,Q(z)}{S(z)}=\sum_{k=1}^{p}\log(z+u_k)+\sum_{k=1}^{q-p}\log(z+v_k)-$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\log(z+w_k)$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg\frac{P(z)+a\,Q(z)}{S(z)}\right\}=R\left\{\sum_{1}^{p}\frac{z}{z+u_k}+\sum_{1}^{q-p}\frac{z}{z+v_k}-\sum_{1}^{s}\frac{z}{z+w_k}\right\}$$

L'inégalité (10) sera satisfaite, si le maximum de cette expression est négatif. On a

$$\max R\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{z}{z+u_k}\right\}=\max R\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{R_1\,e^{i\vartheta}\,(R_1\,e^{-i\vartheta}+\varrho_{1k}\,e^{-i\alpha_k})}{|R_1\,e^{i\vartheta}+\varrho_{1k}\,e^{i\alpha_k}|^2}\right\}=$$

$$=\max\sum_{k=1}^{p}\frac{R_1^2+R_1\,\varrho_{1k}\cos(\vartheta-\alpha_k)}{R_1^2+\varrho_{1k}^2+2R_1\,\varrho_{1k}\cos(\vartheta-\alpha_k)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\max\frac{R_1^2+R_1\,\varrho_{1k}\cos(\vartheta-\alpha_k)}{R_1^2+\varrho_{1k}^2+2R_1\,\varrho_{1k}\cos(\vartheta-\alpha_k)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{R_1}{R_1-\varrho_{1k}}\leqslant\frac{p\,R_1}{R_1-r}\quad\text{pour }\varrho_{1k}\leqslant r.$$

De façon analogue nous avons

$$\max R\left\{\sum_{k=1}^{q-p}\frac{z}{z+v_k}\right\}\leqslant\frac{(q-p)\,R_1}{R_1+K}\quad\text{pour }R_1\leqslant K\leqslant\varrho_{2k}$$

$$\min R\left\{\sum_{k=1}^{s}\frac{z}{z+w_k}\right\}\geqslant\frac{s\,R_1}{R_1+S}\quad\text{pour }\varrho_{3k}\leqslant S<R_1$$

De ce fait

$$\max \frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg \frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}\right\} \leqslant \frac{pR_1}{R_1-r}+\frac{(q-p)R_1}{R_1+K}-\frac{sR_1}{R_1+S}$$

L'inégalité (10) est donc satisfaite, si

$$\text{(11)} \qquad \frac{pR_1}{R_1-r}+\frac{(q-p)R_1}{R_1+K}-\frac{sR_1}{R_1+S} \leqslant 0$$

En tenant compte de la condition $R_1 \leqslant K$, nous posons $R_1=\lambda K$ $(0<\lambda\leqslant 1)$ dans l'inégalite (11) et, après avoir transformé cette inégalité, nous obtenons

$$\alpha(\lambda)K^2-\beta(\lambda)K+\gamma \geqslant 0,$$

où
$$\alpha(\lambda)=(s-q)\lambda^2+(s-p)\lambda$$
$$\beta(\lambda)=[(s-q+p)r+qS]\lambda+sr+pS$$
$$\gamma=(q-p)rS$$

Les coefficients $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ et γ sont positifs pour $o<\lambda\leqslant 1$. L'expression de la valeur limite de $K(\lambda)$, pour laquelle cette inégalité est satisfaite, serait assez compliquée. Nous simplifions donc en mettant

$$K(\lambda)=\frac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)}=\frac{[(s-q+p)r+qS]\lambda+rs+pS}{(s-q)\lambda^2+(s-p)\lambda}$$

Pour obtenir un résultat final, le meilleur possible, nous choisissons λ $(0<\lambda\leqslant 1)$ de façon que $K(\lambda)$ soit le plus petit possible. Il est facile de constater que $K(\lambda)$ est, pour $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, une fonction décroissante, et $R_1(\lambda)=\lambda K(\lambda)$ une fonction croissante. Donc le plus avantageux est de prendre $\lambda=1$. Pour cette valeur λ l'expression K prend la forme

$$K(1)=\frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}, \qquad K(1)<\frac{s+p}{s-q}\max\{S,r\}$$

En tenant compte de la condition $R_1>S$, l'inégalité (11) est vraie pour

$$\text{(12)} \qquad R_1=K=\max\left\{S, \frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}\right\}$$

Ce nombre est inférieur à $\dfrac{s+p}{s-q}\max\left\{S, Q, \dfrac{pQ+qP}{q-p}\right\}$

Nous substituons le nombre obtenu K dans l'équation (4) au lieu de N et déterminons m

$$(13)\qquad m = \min\left\{(S+Q), \left[\frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}+Q\right]\right\}^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^{p}$$

Il faut encore démontrer que $R_1 > r$:

$$R_1 = \frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p} = r + \frac{2pr+(q+p)S}{2s-q-p}$$

Comme $K > r$, le nombre m, déterminé par l'égalité (13), remplit la condition (7').

Il résulte du raisonnement précédent que, si $|a| \leqslant m$ (le nombre m est déterminé par l'équation 13) et $z = R_1 e^{i\vartheta}$ décrit la circonférence $|z| = R_1$ dans le sens direct,

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg\frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}\right\} \leqslant 0$$

c'est-à-dire l'argument de l'expression $\dfrac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}$ décroît d'une façon monotone. Donc le point correspondant à cette expression contourne l'origine $(s-p)$ fois dans le sens négatif. En même temps le point qui correspond à l'expression $\dfrac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}$ contourne un point arbitraire $-b$ au plus $s-p$ fois dans le sens négatif.

Nous passons au polynome de la forme (9). Si $|a| \leqslant m$, et si z décrit dans le sens direct la circonférence $|z| = R_1$,

$R_1 = \max\left\{S, \dfrac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}\right\}$ l'argument de $S(z)$ augmente jusqu'a $2\pi s$, et en même temps l'argument de $\dfrac{P(z)+aQ(z)}{S(z)} + b$ diminue jusqu'a $2\pi(s-p)$ au plus. Ainsi l'argument du produit de ces expressions augmente jusqu'à $2\pi p$ au moins.

Nous avons donc démontré que dans le cercle

$$|z| \leqslant R_1 = \max\left\{S, \frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}\right\}$$

il y a, pour $|a| \leqslant m$, au moins p zéros du polynome $P(z)+aQ(z)+ bS(z)$.

Cas II. $|a| \geqslant m$ (le nombre m est déterminé par l'équation 13).

Le polynome $P(z)+aQ(z)$ a p zéros au moins dans le cercle $|z| \leqslant r,\ r = \max\left\{Q, \dfrac{pQ+qP}{q-p}\right\}$, tous les zéros de ce polynome ne dépassent pas en module le nombre M, que l'on obtient en mettant le nombre m déterminé par l'équation (13) dans l'équation (1)

$$M = \left\{\max\left[S, \frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}\right]+Q\right\}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}+\frac{qQ+pP}{q-p},$$

$$M < \left\{\frac{s+p}{s-q}\max\left[S,\ Q, \frac{pQ+qP}{q-p}\right]+Q\right\}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}+\frac{qQ+pP}{q-p}.$$

Nous supposons que z décrit la circonférence $|z| = R_2$ ($R_2 > S$, $R_2 > M$) dans le sens direct. Le nombre R_2 sera déterminé de manière que l'argument de $\dfrac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}$ décroisse d'une façon monotone, c'est-à-dire que l'inégalité (10) soit satisfaite.

En raisonnant comme dans le premier cas, nous déterminons le nombre R_2 à partir de l'inégalité $\dfrac{qR_2}{R_2-M} - \dfrac{sR_2}{R_2+S} \leqslant 0$, qui donne $R_2 \geqslant \dfrac{sM+qS}{s-q}$.

$R_2 > M$ et $M > S$, donc, dans les cercle $|z| \leqslant R_2,\ R_2 = \dfrac{sM+qS}{s-q}$ il y a, pour $|a| \geqslant m$, q zéros au moins du polynome $P(z)+aQ(z)+bS(z)$.

En combinant les résultats obtenus dans les cas I et II nous voyons que dans le cecle $|z| \leqslant R,\ R = \dfrac{sM+qS}{s-q}$, il se trouve p zéros au moins du polynome $P(z)+aQ(z)+bS(z)$, les coefficients a et b étant arbitraires.

§ 2. Nous allons déterminer la limite exacte du module d'un certain nombre de zéros dans un cas particulier du polynome $P(z)+aQ(z)+bS(z)$.

Théorème II. *Si P et $\dfrac{a}{b}$ sont des nombres réels, et p un nombre naturel, le polynome*

(14) $$(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2}$$

a p zéros au moins ne dépassant pas en module le nombre

$$R = \frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2} |P|,$$

et cette limite supérieure est atteinte [10])

D é m o n s t r a t i o n. Si le polynome $(z+1)^p + az^q + bz^s$ $(p < q < s)$ a p zéros au moins ne dépassant pas en module le nombre R_1, qui est indépendant des coefficients a et b, le polynome

$$(15) \qquad \left(\frac{z}{P}+1\right)^p + a\frac{P^q}{P^p}\left(\frac{z}{P}\right)^q + b\frac{P^s}{P^p}\left(\frac{z}{P}\right)^s$$

de variable $\frac{z}{P}$ a aussi p zéros au moins qui ne dépassent pas en module le nombre R_1. $\left|\frac{z_k}{P}\right| \leqslant R_1$, donc $|z_k| \leqslant R_1 |P|$, pour $k = 1, 2, \ldots, p$. En multipliant le polynome (15) par P^p, nous obtenons que le polynome

$$(15') \qquad (z+P)^p + az^q + bz^s$$

a p zéros au moins qui ne dépassent pas en module le nombre $R = R_1 |P|$. Si nous posons dans le polynome (15') $q = p+1$, $s = p+2$ nous obtenons le polynome (14).

10) Le polynome $(z+P)^2 + az^3 + bz^4$ a deux zéros au moins ne dépassant pas en module le nombre $(3+\sqrt{3})|P|$.

R. B a l l i e u — *Limitations en module et localisations des zéros des polynomes* (Bruxelles, Marcel Hayez. Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique, 1936, théorème XV, p. 66) a établi le théorème suivant: Le polynome $a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p + a_{n_1} z^{n_1} + \ldots + a_{n_k} z^{n_k}$ $a_p \neq 0$, $p < n_1 < \ldots < n_k$) où $a_0, a_1, \ldots, a_p, a_p, n_1, \ldots, n_k$ sont fixes, a toujours un zéro dans tout domaine circulaire fermé, dont la circonférence passe par l'origine et par un zéro au moins de l'équation

$$a_0 \prod_{i=1}^{k} n_i + a_1 z \prod_{i=1}^{k} (n_i - 1) + \ldots + a_p z^p \prod_{i=1}^{k} (n_i - p) = 0$$

Ce théorème montre que le polynome $(z+P)^2 + az^3 + bz^4$ $(p = 2, k = 2, n_1 = 3, n_2 = 4)$ a au moins un zéro dans le cercle, dont la circonférence passe par l'origine et par le point $-(3-\sqrt{3})P$ ou par le point $-(3+\sqrt{3})P$. Donc, un zéro au moins du polynome $(z+P)^2 + az^3 + bz^4$ ne dépasse pas en module l'un des nombres $(3+\sqrt{3})|P|$ ou $(3-\sqrt{3})|P|$.

Il suffit de déterminer le nombre R_1, qui est la limite supérieure du module de p zéros du polynome

(16) $$(z+1)^p + az^q + bz^s.$$

Nous écrivons le polynome (16) sous la forme

(16′) $$z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)\left[\frac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}+b\right]$$

Nous distinguons trois cas selon le module M du nombre $\frac{a}{b}$ $\left(\left|\frac{a}{b}\right| = M\right)$.

I. $\left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q} \leqslant M$

où $$R_1 = \frac{-s\,\lambda^{s-q}+q}{-(s-p)\,\lambda^{s-q}+(q-p)}$$

$$\lambda^{s-q} = \frac{p\,(s-q)\,(s-q-1)+2\,q\,(s-p)-(s-q)\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4\,pq\,(s-p)}}{2\,s\,(s-p)}$$

q et s sont des nombres naturels ($p < q < s$); $\frac{a}{b}$ peut être un nombre complexe.

II. $R_1^{s-q} < M < \left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$ où $q = p+1$, $s = p+2$, $\frac{a}{b}$ est un nombre réel.

III. $M \leqslant R_1^{s-q}$ où q et s sont des nombres naturels ($p < q < s$), $\frac{a}{b}$ peut être un nombre complexe.

Premier cas. Nous posons $\frac{a}{b} = M\,e^{i\alpha}$ et cherchons un nombre R_1 $(1 < R_1 < \sqrt[s-q]{M})$, tel que l'argument de $f(z) = \frac{(z+1)}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}$ diminue d'une façon monotone, quand $z = R_1\,e^{i\vartheta}$ décrit la circonférence $|z| = R_1$, c. à. d. $\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\} \leqslant 0$.

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\} = R\left\{z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = R\left\{p\,\frac{z}{z+1} - q - (s-q)\,\frac{z^{s-q}}{z^{s-q}+\frac{a}{b}}\right\} =$$

$$= R\left\{ p \frac{R_1 e^{i\vartheta}(R_1 e^{-i\vartheta}+1)}{|R_1 e^{i\vartheta}+1|^2} - \right.$$

$$\left. - q - (s-q)\frac{R_1^{s-q} e^{i(s-q)\vartheta}[R_1^{s-q} e^{-i(s-q)\vartheta} + Me^{-ia}]}{|R_1^{s-q} e^{i(s-q)\vartheta}+Me^{ia}|^2} \right\} =$$

$$= p R_1 \frac{R_1 + \cos\vartheta}{R_1^2 + 1 + 2R_1\cos\vartheta} -$$

$$- q - (s-q) R_1^{s-q} \frac{R_1^{s-q} + M\cos[(s-q)\vartheta - a]}{R_1^{2(s-q)} + M^2 + 2R_1^{s-q} M\cos[(s-q)\vartheta - a]}$$

Nous déterminons le maximum de cette expression

$$\max\left[p R_1 \frac{R_1+\cos\vartheta}{R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta}\right] = \frac{pR_1}{R_1-1}, \text{ pour } \vartheta = \pi$$

$$\min\left\{ (s-q)R_1^{s-q}\frac{R_1^{s-q}+M\cos[(s-q)\vartheta-a]}{R_1^{2(s-q)}+M^2+2R_1^{s-q}M\cos[(s-q)\vartheta-a]}\right\} =$$

$$= -\frac{(s-q)R_1^{s-q}}{M-R_1^{s-q}}, \text{ pour } \cos[s-q)\vartheta - a] = -1$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\} \leqslant \frac{pR_1}{R_1-1} - q + \frac{(s-q)R_1^{s-q}}{M-R_1^{s-q}}$$

L'argument de $f(z)$ diminue d'une façon monotone, quand

$$\frac{pR_1}{R_1-1} - q + \frac{(s-q)R_1^{s-q}}{M-R_1^{s-q}} \leqslant 0 \tag{17}$$

$$\frac{-(q-p)R_1+q}{R_1-1} + \frac{(s-q)R_1^{s-q}}{M-R_1^{s-q}} \leqslant 0;$$

de là nous obtenons la condition nécessaire pour R_1

$$-(q-p)R_1 + q < 0, \qquad R_1 > \frac{q}{q-p}$$

En tenant compte de la condition $R_1^{s-q} < M$ nous posons $R_1 = \lambda\sqrt[s-q]{M}$, $(0 < \lambda < 1)$

$$\frac{p\lambda\sqrt[s-q]{M}}{\lambda\sqrt[s-q]{M}-1} - q + \frac{(s-q)\lambda^{s-q}M}{M-\lambda^{s-q}M} \leqslant 0$$

$$\frac{p\lambda\sqrt[s-q]{M}}{\lambda\sqrt[s-q]{M}-1} \leqslant \frac{-s\lambda^{s-q}+q}{1-\lambda^{s-q}}$$

Le membre gauche de l'inégalité obtenue est positif, donc $\lambda^{s-q} < \frac{q}{s}$

$$(18) \qquad \sqrt[s-q]{M} \geqslant \frac{-s\lambda^{s-q}+q}{-(s-p)\lambda^{s-q+1}+(q-p)\lambda} \quad \text{pour } \lambda^{s-q} < \frac{q-p}{s-p}$$

Ainsi l'inégalité (18) est satisfaite pour $0 < \lambda^{s-q} < \dfrac{q-p}{s-p}$. Nous remplaçons dans (18) le signe $\geqslant$ par $=$ et déterminons λ de sorte que $\sqrt[s-q]{M}$ soit le plus petit possible. Nous obtenons le minimum de la valeur $\sqrt[s-q]{M}$ pour

(19)

$$\lambda^{s-q} = \frac{p(s-q)(s-q-1)+2q(s-p)-(s-q)\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}}{2s(s-p)}$$

On peut montrer que le nombre obtenu satisfait à la condition $0 < \lambda^{s-q} < \dfrac{q-p}{s-p}$

En posant $R_1 = \lambda \sqrt[s-q]{M}$ nous revenons à la valeur R_1 et nous obtenons

$$(20) \qquad R_1 = \frac{\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}-p(s-q-1)}{\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}-p(s-q+1)} \cdot \frac{s}{s-p}$$

On peut constater que le nombre obtenu R_1 est, pour $p > 1$, plus petit que $\dfrac{q}{q-p} \cdot \dfrac{s}{s-p}$. Si $p=1$, $R_1 = \dfrac{q}{q-p} \cdot \dfrac{s}{s-p}$.

Ainsi, si $M \geqslant \left(\dfrac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$ et z décrit la circonférence $|z| = R_1$ dans le sens direct, $\dfrac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} \leqslant 0$ et $f(z)$ contourne un point quelconque $-b$ au plus $(q-p)$ fois dans de sens négatif, et l'origine — exactement $(q-p)$ fois dans le sens négatif; l'argument de $\left[\dfrac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\dfrac{a}{b}\right)}+b\right]$ diminue au plus de $2(q-p)\pi$ et, en même temps, l'argument de $z^q\left(z^{s-q}+\dfrac{a}{b}\right)$ augmente de $2\pi q$. Ainsi l'expression (16′) contourne l'origine $q-(q-p)=p$ fois au mois dans le sens direct. Pour $M \geqslant \left(\dfrac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$ le polynome $(z+1)^p+az^q+bz^s$ a p zéros au moins dans le cercle $|z| \leqslant R_1$.

Deuxiémc cas. Dans le cas précédent nous avons montré que si M est assez grand $\left[M \geqslant \left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}\right]$ et z décrit la circonférence $|z| = R_1$ dans le sens direct, l'argument de $f(z)$ diminue d'une façon monotone (fig. 4) et l'expression $f(z)$ contourne l'origine $(q - p)$ fois dans le sens négatif. Si $R_1^{s-q} < M < \left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$ il peut exister des intervalles de la valeur de ϑ, dans lesquels $\arg f(z)$ augmente.

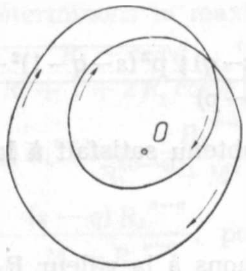

Fig. 4

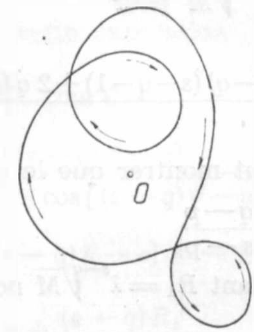

Fig. 5

La fig. 5 donne la représentation de la circonférence $|z| = R_1$ au moyen d'une fonction quelconque $f(z)$. Le point $f(z)$ décrit la courbe en contournant l'origine dans le sens négatif, mais $\arg f(z)$ ne diminue pas d'une façon monotone.

Nous allons déterminer exactement l'allure de la courbe $f(z) = \dfrac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q} + \frac{a}{b}\right)}$ dans le cas, où $q = p + 1$, $s = p + 2$ et $\frac{a}{b}$ est un nombre réel.

Pour cela nous étudierons la variation du module et de l'argument de $f(z)$. Dans le cas considéré

$$f(z) = \frac{(z+1)^p}{z^{p+1}(z \pm M)}, \quad s - q = 1, \quad R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$$

En remplaçant $q = p + 1$, $s = p + 2$ dans les équations (19) et (20) nous obtenons les valeurs λ et R_1 pour le cas étudié

$$\lambda = \frac{2(p+1) - \sqrt{2p(p+1)}}{2(p+2)} \tag{19'}$$

$$(20') \qquad R_1 = \frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2}, \quad \text{d'ici}$$

$$(21) \qquad \frac{R_1}{\lambda} = 3p + 2 + 2\sqrt{2p(p+1)}$$

Supposons que la ocurbe décrite par $f(z)$ soit l'image de la circonférence $|z| = R_1$ obtenue au moyen de la fonction $f(z)$, et que la distance d désigne la projection rectangulaire du vecteur de la vitesse au point $f(z)$ sur le vecteur $f(z)$.

$z = R_1 e^{i\vartheta}$,

$\frac{d}{d\vartheta} f(z) = i z f'(z)$ est le vecteur de la vitesse,

$\omega = \arg [i z f'(z)] - \arg f(z)$

$d = |i z f'(z)| \cos \omega$ est la projection rectangulaire du vecteur de la vitesse sur le vectur $f(z)$

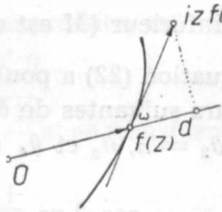

Fig. 6

$$d = |izf'(z)| \frac{R\left\{\frac{izf'(z)}{f(z)}\right\}}{\left|\frac{izf'(z)}{f(z)}\right|} = |f(z)| \cdot R\left\{iz\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = -|f(z)|\, I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}$$

Si $|f(z)|$ atteint son maximum. $I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = 0$ et change le signe — en +, c. à. d. $\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$.

Si $|f(z)|$ atteint son minimum, $I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = 0$ et change le signe +, en —, c. à. d $\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} < 0$.

Nous commençons l'étude de la courbe décrite par $f(z)$ en déterminant les extréma de $|f(z)|$.

$$I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = I\left\{\frac{pR_1 e^{i\vartheta}(R_1 e^{-i\vartheta}+1)}{|R_1 e^{i\vartheta}+1|^2} - (p+1) - \frac{R_1 e^{i\vartheta}(R_1 e^{-i\vartheta} \pm M)}{|R_1 e^{i\vartheta} \pm M|^2}\right\}$$

Les zéros de l'équation $I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=0$ déterminent les extréma de $|f(z)|$.

$$\frac{p\,R_1\sin\vartheta}{R_1^2+1+2\,R_1\cos\vartheta}\mp\frac{R_1\,M\sin\vartheta}{R_1^2+M^2\pm2\,R_1\,M\cos\vartheta}=0$$

ainsi nous obtenons

(22) $\sin\vartheta\,[\pm2\,(p-1)\,R_1\,M\cos\vartheta+p\,(R_1^2+M^2)\mp M\,(R_1^2+1)]=0$

Si $\frac{a}{b}=M$, nous prenons le signe supérieur; si $\frac{a}{b}=-M$, nous prenons le signe inférieur (M est un nombre positif).

L'équation (22) a pour $0\leqslant\vartheta\leqslant2\pi$ au plus quatre solutions pour les valeurs suivantes de ϑ:
$\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=\pi$, ϑ_3 et ϑ_4 (si elles existent), qui satisfont à l'équation

(23) $$\cos\vartheta=\frac{\pm M\,(R_1^2+1)-p\,(R_1^2+M^2)}{\pm2\,(p-1)\,R_1\,M}$$

Si $p=1$, il y a deux extréma de $|f(z)|$ pour $\vartheta=0$ et $\vartheta=\pi$.

Si $p\geqslant2$ et $\frac{a}{b}=-M$, il y a deux extréma de $|f(z)|$, parce que

$$\frac{-M\,(R_1^2+1)-p\,(R_1^2+M^2)}{-2\,(p-1)\,R_1\,M}>1$$

Si $p\geqslant2$ et $\frac{a}{b}=M$, il y a quatre extrema de $|f(z)|$, quisqu'on a l'inégalité

$$-1<\frac{M\,(R_1^2+1)-p\,(R_1^2+M^2)}{2\,(p-1)\,R_1\,M}<1$$

En transformant l'inégalité

$$-1<\frac{M\,(R_1^2+1)-p\,(R_1^2+M^2)}{2\,(p-1)\,R_1\,M}$$

nous obtenons

(24) $$p\,M^2-[(R_1-1)^2+2\,p\,R_1]\,M+p\,R_1^2<0$$

Cette inégalité est satisfaite pour $M=R_1$. On peut la mettre sous la forme

$$p\,(M-R_1)^2-M\,(R_1-1)^2<0$$

et, en remplaçant M par $\frac{R_1}{\lambda}$ $\left(\frac{R_1}{\lambda}\right.$ est déterminé par la relation 21$\left.\right)$, le membre gauche de l'inégalité s'annule. Donc l'inégalité (24) est satisfaite pour $R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$.

Nous montrons ensuite que

$$\frac{M(R_1^2+1)-p(R_1^2+M^2)}{2(p-1)R_1 M} < 1$$

En transformant cette inégalité nous obtenons

$$pM^2 - [(R_1+1)^2 - 2pR_1]M + pR_1^2 > 0 \tag{25}$$

$\triangle = (R_1+1)^2[(R_1+1)^2 - 4pR_1]$. Cette expression est négative, si

$$(R_1+1)^2 - 4pR_1 < 0.$$

En remplaçant $R_1 = \frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}$ et en transformant nous obtenons l'inégalité

$$-p(p-1) - 4(p^2-2) - 2(p-2)\sqrt{2p(p+1)} < 0,$$

qui est satisfaite pour $p \geqslant 2$.

Il en résulte qu'il existe toujours quatre extrema de $|f(z)|$ pour

$$R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}, \qquad \frac{a}{b} = M \text{ et } p \geqslant 2.$$

Pour déterminer le genre l'extrémum de $|f(z)|$ nous étudions, conformément au raisonnement de la page 49, le signe de l'expression

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} \tag{26}$$

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = pR_1\frac{(R_1^2+1)\cos\vartheta+2R_1}{(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)^2} - R_1 M\frac{(R_1^2+M^2)\cos\vartheta \pm 2R_1 M}{(R_1^2+M^2 \pm 2R_1 M\cos\vartheta)^2}$$

pour les valeurs ϑ correspondant aux extréma de $|f(z)|$

Si $\frac{a}{b} = M$, nous prenons le signe supérieur; si $\frac{a}{b} = -M$, nous prenons le signe inférieur (M est un nombre positif).

Pour déterminer la variation, de l'argument de $f(z)$, nous étudions le signe de la dérivée de arg $f(z)$ pour les extréma de $|f(z)|$,

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\} = R\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = \tag{27}$$

$$= pR_1\frac{R_1+\cos\vartheta}{R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta} - (p+1) - R_1\frac{R_1 \pm M\cos\vartheta}{R_1^2+M^2 \pm 2R_1 M\cos\vartheta}$$

Arg f (z) augmente, si $R\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$, — diminue, si $R\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} < 0$

L'etude de la courbe décrite par $f(z)$ sera faite dans quatre cas particuliers:

1. $p = 1, \quad \frac{a}{b} = M$
2. $p = 1, \quad \frac{a}{b} = -M$
3. $p \geqslant 2, \quad \frac{a}{b} = M$
4. $p \geqslant 2, \quad \frac{a}{b} = -M.$

Cas 1. $p = 1, \frac{a}{b} = M, R_1 = 3, f(z) = \frac{z+1}{z^2(z+M)}, 3 < M < 9$

Nous avons constaté a la page 50, qu'il y a dans ce cas seulement deux extréma de $|f(z)|$ pour $\vartheta = 0, \pi$.

Nous démontrerons qu'à la valeur $\vartheta = 0$ correspond un minimum de $|f(z)|$. Pour cela, nous posons $\vartheta = 0$, $p = 1$ et $R_1 = 3$ dans l'équation (26).

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = \frac{3}{16} - \frac{3M}{(3+M)^2} = \frac{3}{16(3+M)^3}(M-1)(M-9)$$

Nous obtenons un minimum de $|f(z)|$, parce que l'expression obtenue est négative pour $3 < M < 9$.

Nous démontrerons qu' à la valeur $\vartheta = \pi$ correspond un maximum de $|f(z)|$.

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = -\frac{3}{4} + \frac{3M}{(M-3)^2} = -\frac{3}{4(M-3)^2}(M-1)(M-9)$$

Nous obtenons un maximum de $|f(z)|$, parce que l'expression obtenue est positive pour $3 < M < 9$.

Nous allons étudier maintenant la dérivée de arg $f(z)$. Pour cela, nous posons $p = 1$ et $R_1 =$ dans l'équation (27)

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 3\,\frac{3+\cos\vartheta}{10+6\cos\vartheta} - 2 - 3\,\frac{3+M\cos\vartheta}{9+M^2+6M\cos\vartheta} =$$

$$= -\frac{72M\cos^2\vartheta + 3(3M^2+32M+45)\cos\vartheta + (11M^2+189)}{2(5+3\cos\vartheta)(9+M^2+6M\cos\vartheta)}$$

L'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$ possède quatre racines au plus.

Nous démontrerons que dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a deux racines de cette équation. Nous posons $\cos\vartheta = x$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\} = -2$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\}_{x=-1} = -\frac{M^2 - 12M + 27}{2(M-3)^2} = \frac{9-M}{2(M-3)} > 0,$$

pour $3 < M < 9$

$$\frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\}_{x=0} < 0, \quad \frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\}_{x=1} < 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\} = -2$$

Il en résulte qu'il y a dans l'intervalle $(-\infty, -1)$ une racine de l'équation

$$72Mx^2 + 3(3M^2 + 32M + 45)x + 11M^2 + 189 = 0,$$

l'autre se trouve dans l'intervalle $(-1, 0)$. Donc il y a, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, seulement deux valeurs ϑ, pour lesquelles

$$\frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\} = 0.$$

Si $\vartheta = 0$ $(x = 1)$, l'argument de $f(z)$ diminue, parce que $\frac{d}{d\vartheta}$ $\{\arg f(z)\} < 0$. Si $\vartheta = 0$ $(x = -1)$, l'argument de $f(z)$ augmente, parce que $\frac{d}{d\vartheta}$ $\{\arg f(z)\} > 0$.

Les points d'intersection de la courbe décrite par $f(z)$ avec l'axe réel sont déterminés par la relation $I\{f(z)\} = 0$.

$$I\left\{\frac{3e^{i\vartheta} + 1}{9e^{i2\vartheta}(3e^{i\vartheta} + M)}\right\} = 0$$

$$I\{9e^{-i2\vartheta} + 3Me^{-i\vartheta} + 3e^{-i3\vartheta} + Me^{-i2\vartheta}\} = 0$$

$$\sin\vartheta\,[12\cos^2\vartheta + 2(9+M)\cos\vartheta + 3(M-1)] = 0$$

Nous obtenons les points d'intersection de la courbe décrite par $f(z)$ avec l'axe réel, si $\vartheta = 0, \pi, \vartheta_0$, où ϑ_0 satisfait à l'équation

$$\cos\vartheta_0 = \frac{-(9+M) + \sqrt{M^2 - 18M + 117}}{12}$$

Pour $3 < M < 9$ on a $-1 < \frac{-(9+M) + \sqrt{M^2 - 18M + 117}}{12} < 0$

Donc il y a, dans le cas étudié, quatre points d'intersection de la courbe décrite par $f(z)$ avec l'axe réel.

Table des valeurs de la fonction $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z+M)}$, $|z| = 3$

	$M=3$			$M=4$			$M=5$			$M=9$		
ϑ	0	π	ϑ_0	0	π	ϑ_0	0	π	ϑ_0	0	π	—
$f(z)$	0,074	∞	—0,09	0,064	—0,222	—0,079	—0,049	—0,074	—0,06	$\frac{1}{27} = 0{,}037$	$-\frac{1}{27} = -0{,}037$	—
										Dans ce cas $\lvert f(z)\rvert = \text{const} = \frac{1}{27}$		

Tableau de la fonction $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z+M)}$, $|z| = 3$

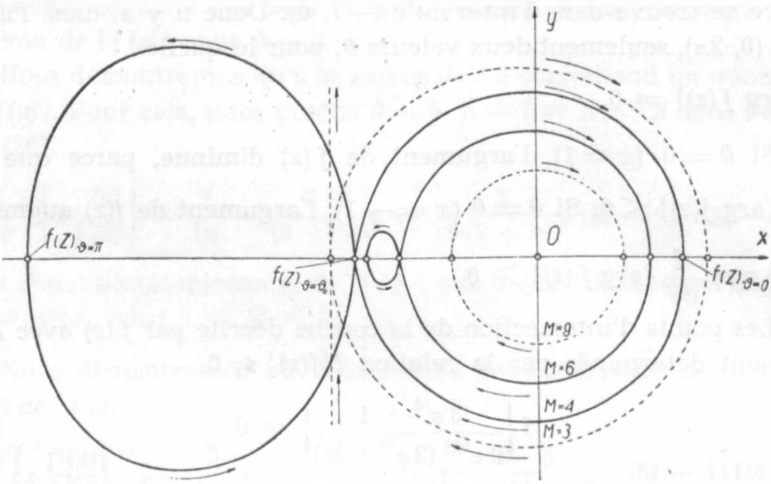

Fig. 7

La fig. 7 est une représentation de la fonction $f(z)$ pour différentes valeurs de M. L'argument de $f(z)$ diminue d'une facon monotone si $M = \dfrac{R_1}{\lambda} = 9$. Dans le cas où $3 < M < 9$, la courbe décrite par $f(z)$ se compose de deux boucles. Une de ces boucles contourne l'origine. Sur la boucle, qui ne contourne pas l'origine, il y a deux points où $\dfrac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

Mais dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a seulement deux racines de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Donc la courbe tracée par $f(z)$ ne peut avoir d'autres boucles que celle de la figure, car sur chaque boucle qui n'entoure pas l'origine, il y a au moins un point où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Si l'on met $M = 3$, la valeur de $f(z)$ sera infinie pour $\vartheta = \pi$.

Cas 2. $p = 1$, $\frac{a}{b} = -M$, $R_1 = 3$, $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-M)}$, $3 < M < 9$.

Nous avons constaté, à la page 50, qu'il y a dans ce cas seulement deux extréma de $|f(z)|$ pour $\vartheta = 0, \pi$.

Pour la valeur $\vartheta = 0$, nous obtenons un maximum de $|f(z)|$, car l'expression

$$\frac{d}{d\vartheta} I \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = \frac{3}{16} + \frac{3M}{(M-3)^2} \quad \text{est positive.}$$

Pour la valeur $\vartheta = \pi$ nous obtenons un minimum de $|f(z)|$, l'expression

$$\frac{d}{d\vartheta} I \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{(M+3)^2} \quad \text{etant négative.}$$

Maintenant nous allons étudier la dérivée de $\arg f(z)$. Pour cela nous posons $p = 1$, $R_1 = 3$ dans l'équation (27)

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 3\,\frac{3+\cos\vartheta}{10+6\cos\vartheta} - 2 - 3\,\frac{3 - M\cos\vartheta}{9 + M^2 - 6M\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{72M\cos^2\vartheta - 3(3M^2 - 32M + 45)\cos\vartheta - (11M^2 + 189)}{2(5 + 3\cos\vartheta)(9 + M^2 - 6M\cos\vartheta)}$$

L'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$ possède quatre racines au plus. Nous démontrerons que dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a deux racines au plus. Nous posons $\cos\vartheta = x$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = -2,$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=-1} = -\frac{M^2 + 12M + 27}{2(M+3)^2} = -\frac{M+9}{2(M+3)} < 0,$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=0} < 0,$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=1} = -\frac{5M^3 - 42M + 81}{4(M+3)^2} = -\frac{5M - 27}{4(M-3)}$$

$$\text{Si } 3 < M < \frac{27}{5}, \quad \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=1} > 0$$

$$\text{Si } M = \frac{27}{5}, \quad \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=1} = 0$$

$$\text{Si } \frac{27}{5} < M < 9, \quad \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=1} < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = -2.$$

Si $3 < M \leqslant \frac{27}{5}$, il y a dans l'intervalle fermé $[0, +1]$ une racine de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{\cos\vartheta = x} = 0$. L'autre se trouve dans l'intervalle $(-\infty, -1)$, car aux extrémités de cet intervalle la fonction $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{\cos\vartheta = x}$ prend des valeurs négatives, à son intérieur, au point $x = -\frac{5}{3}$, il y a un pôle de premier ordre. Il y a ainsi dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ deux valeurs de ϑ, pour lesquelles $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$

Si $\frac{27}{5} < M < 9$, il y a dans chacun des intervalles $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ une racine de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{\cos\vartheta = x} = 0$, car aux extrémites de ces intervalles la fonction $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{\cos\vartheta = x}$ prend des valeurs négatives et à l'intérieur, aux points $x = -\frac{5}{3}$ et $x = \frac{9+M^2}{6M}$ il y a des pôles de premier ordre. Ainsi dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, il n'y a pas, de racines de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Dans cet intervalle on a $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} < 0$.

Si $\vartheta = 0$ $(x = 1)$ et $3 < M < \frac{27}{5}$, $\arg f(z)$ augmente, car $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} < 0$.

Si $\vartheta = 0$ $(x = 1)$ et $\frac{27}{5} < M < 9$, arg $f(z)$ diminue, car $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} < 0$.

Si $\vartheta = \pi$ $(x = -1)$, arg $f(z)$ diminue, car on a $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} < 0$.

Les points d'intersection de la courbe décrite par $f(z)$ avec l'axe réel sont déterminés par la relation $I\{f(z)\} = 0$

$$I\left\{\frac{(3e^{i\vartheta}+1)}{9e^{i2\vartheta}(3e^{i\vartheta}-M)}\right\} = 0$$

$$I\left\{9e^{-i2\vartheta} - 3Me^{-i\vartheta} + 3e^{-i3\vartheta} - Me^{-i2\vartheta}\right\} = 0$$

$$\sin\vartheta\,[12\cos^2\vartheta + 2(9-M)\cos\vartheta - 3(M+1)] = 0$$

Nous obtenons les points d'intersection de la courbe décrite par $f(z)$ avec l'axe réel, si $\vartheta = 0, \pi, \vartheta_0$, où ϑ_0 satisfait à l'équation

$$\cos\vartheta_0 = \frac{-(9-M)+\sqrt{M^2+18M+117}}{12}$$

Pour $3 < M < \frac{27}{5}$ on a $0 < \frac{-(9-M)+\sqrt{M^2+18M+117}}{12} < 1$

Donc il y a, pour $3 < M < \frac{27}{5}$, quatre points d'intersection de la courbe décrite par $f(z)$ avec l'axe réel.

Si $M = \frac{27}{5}$ il y a deux points d'intersection avec l'axe réel, l'un d'eux étant triple.

Si $\frac{27}{5} < M < 9$, il y a deux points d'intersection avec l'axe réel.

Table des valeurs de la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-M)}$, $|z| = 3$

	$M=3$			$M=4$			$M=5{,}4$			$M=9$		
ϑ	0	π	ϑ_0	0	π	ϑ_0	0	π	ϑ_0	0	π	—
$f(z)$	∞	0,037	−0,157	−0,445	0,032	−0,168	$-\frac{5}{27} = -0{,}185$	0,026	$-\frac{5}{27} = -0{,}185$	−0,074	0,019	—

Table de la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-M)}$, $|z| = 3$

La fig. 8 représente la fonction $f(z)$ pour différentes valeurs de M. Si $\frac{27}{5} \leqslant M \leqslant 9$ l'argument de $f(z)$ diminue d'une façon monotone. Si $3 < M < \frac{27}{5}$, la courbe décrite par $f(z)$ se compose de deux boucles.

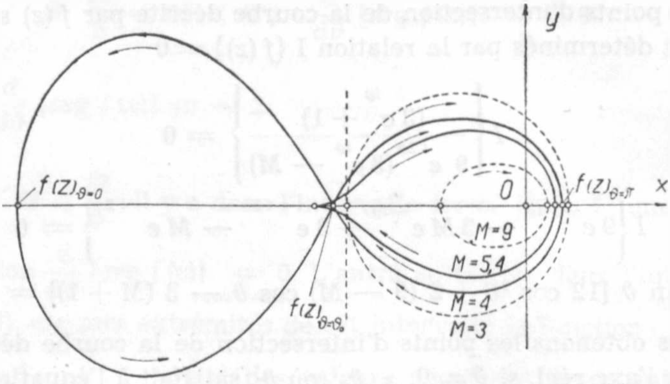

Fig. 8

Sur la boucle qui ne contourne pas l'origine, il y a deux points où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Mais dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a seulement deux racines de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Donc la courbe décrite par $f(z)$ ne peut avoir d'autres boucles que celle de la figure, car sur chaque boucle qui ne contourne pas l'origine il se trouve au moins un point où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Si l'on fait $M = 3$, la valeur de $f(z)$ pour $\vartheta = 0$ sera infinie.

Cas 3. $p \geqslant 2$, $\frac{a}{b} = M$, $f(z) = \frac{(z+1)^p}{z^{p+1}(z+M)}$, $|z| = R_1$,

$$R_1 = \frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2}, \quad \frac{R_1}{\lambda} = 3p + 2 + \sqrt{2p(p+1)},$$

$R_1 < \mathrm{M} < \frac{R_1}{\lambda}$.

Nous avons constate, à la page 50, qu'il y a dans ce cas quatre extréma de $|f(z)|$ pour $\vartheta = 0, \pi, \vartheta_3$ et ϑ_4 où, ϑ_3 et ϑ_4 satisfont à l'équation

$$(23') \qquad \cos\vartheta = \frac{M(R_1^2+1) - p(R_1^2+M^2)}{2(p-1)R_1 M}$$

Nous démontrerons qu'à la valeur $\vartheta = 0$ correspond un maximum de $|f(z)|$.

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = \frac{pR_1}{(R_1+1)^2} - \frac{R_1 M}{(R_1+M^2)} =$$

$$= \frac{R_1}{(R_1+1)^2(M+R_1)^2}\left\{(pM+R_1)^2 - M(R_1+1)^2\right\}$$

Cette expression est positive, si $p(M+R_1)^2 - M(R_1+1)^2 > 0$, ou

$$(25) \qquad pM^2 - \left[(R_1+1)^2 - 2pR_1\right]M + pR_1^2 > 0$$

Nous avons démontre, à la page 51, que cette inégalite est satisfaite pour chaque valeur de M.

Nous démontrerons qu' à la valeur $\vartheta = \pi$ correspond un maximum de $|f(z)|$.

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = -\frac{pR_1}{(R_1-1)^2} + \frac{R_1 M}{(M-R_1)^2} =$$

$$= \frac{R_1}{(R_1-1)^2(M-R_1)^2}\left\{-p(M-R_1)^2 + M(R_1-1)^2\right\}$$

Cette expression est positive, si $-p(M-R_1)^2 + M(R_1-1)^2 > 0$, ou

$$(24) \qquad pM^2 - [(R_1-1)^2 + 2pR_1]M + pR_1^2 < 0$$

Nous avons démontré, a la page 51, que cette inégalité est satisfaite pour $R_1 < M < \dfrac{R_1}{\lambda}$.

Nous démontrerons que chacune des valeurs ϑ_3 et ϑ_4 correspond à un minimum de $|f(z)|$. ϑ_3 et ϑ_4 satisfont à l'équation (23').

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = pR_1\frac{(R_1^2+1)\cos\vartheta + 2R_1}{(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)^2} -$$

$$- R_1 M\frac{(R_1^2+M^2)\cos\vartheta + 2R_1 M}{(R_1^2+M^2+2R_1 M\cos\vartheta)^2}$$

Suivant l'équation (23'), nous obtenons

$$R_1^2 + M^2 + 2R_1 M\cos\vartheta = \frac{M}{p}(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = pR_1\frac{(R_1^2+1)\cos\vartheta + 2R_1}{(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)^2} -$$

$$- \frac{p^2R_1}{M}\frac{(R_1^2+M^2)\cos\vartheta + 2R_1 M}{(R_1^2+M^2+2R_1 M\cos\vartheta)^2} =$$

$$= \frac{2p(p-1)R_1^2}{(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)^2}\left\{\frac{M(R_1^2+1)-p(R_1^2+M^2)}{2(p-1)R_1M}\cos\vartheta - 1\right\} =$$

$$= -\frac{2p(p-1)R_1^2}{(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)^2}(1-\cos^2\vartheta)$$

Nous obtenons pour les valeurs ϑ_3 et ϑ_4 des minima de $|f(z)|$, car l'expression obtenue est négative.

Nous étudions maintenant la dérivée de arg $f(z)$. D'après l'équation (27) (signe supérieur) nous obtenons

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = pR_1\frac{R_1+\cos\vartheta}{R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta} -$$

$$-(p+1) - R_1\frac{R_1+M\cos\vartheta}{R_1^2+M^2+2R_1M\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{a_0+a_1\cos\vartheta+a_2\cos^2\vartheta}{(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)(R_1^2+M^2+2R_1M\cos\vartheta)},$$

$$\text{où } a_2 = -2(p+3)R_1^2M.$$

L'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$ possède quatre racines au plus. Nous démontrerons qu'il y a, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, deux racines de cette équation. Nous posons $\cos\vartheta = x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = -\frac{(p+3)}{2}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=-1} = \frac{pR_1}{R_1-1} - (p+1) + \frac{R_1}{M-R_1} =$$

$$= \frac{1}{(R_1-1)(M-R_1)}[M(-R_1+p+1)+2R_1^2-(p+2)R_1] =$$

$$= \frac{\sqrt{2p(p+1)}}{2(R_1-1)(M-R_1)}\left(\frac{2R_1^2}{p+1}-M\right) = \frac{\sqrt{2p(p+1)}}{2(R_1-1)(M-R_1)}\left(\frac{R_1}{\lambda}-M\right)$$

Cette expression est positive pour $R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$.

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=0} = \frac{pR_1^2}{R_1^2+1} - (p+1) - \frac{R_1^2}{R_1^2+M^2} =$$

$$= -\frac{R_1^2+p+1}{R_1^2+1} - \frac{R_1^2}{R_1^2+M^2}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=1} = \frac{p\,R_1}{R_1+1} - (p+1) - \frac{R_1}{R_1+M} =$$

$$= -\frac{R_1+p+1}{R_1+1} - \frac{R_1}{R_1+M}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = -\frac{p+3}{2}$$

Il en résulte qu'il y a, dans l'intervalle $(-\infty, -1)$, une racine de l'équation $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$, l'autre se trouve dans l'intervalle $(-1, 0)$. Donc il y a, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ seulement deux valeurs ϑ, pour lesquelles $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

Si $\vartheta = 0$ $(x = 1)$, l'argument de $f(z)$ diminue, car $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} < 0$.

Si $\vartheta = \pi$ $(x = -1)$, l'argument de $f(z)$ augmente, car $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} > 0$.

Nous démontrerons que l'argument de $f(z)$ diminue, si $\vartheta = \vartheta_3$, ϑ_4

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = p\,R_1\,\frac{R_1+\cos\vartheta}{R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta} - (p+1) -$$

$$- R_1\,\frac{R_1+M\cos\vartheta}{R_1^2+M^2+2R_1M\cos\vartheta}$$

Nous posons $R_1^2 + M^2 + 2R_1M\cos\vartheta = \frac{M}{p}(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = p\,R_1\,\frac{R_1+\cos\vartheta}{R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta} -$$

$$-(p+1) - \frac{p\,R_1}{M}\cdot\frac{R_1+M\cos\vartheta}{R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{p\,R_1^2(M-1) - (p+1)(R_1^2+1)M - 2(p+1)R_1M\cos\vartheta}{M(R_1^2+1+2R_1\cos\vartheta)}$$

Cette expression est négative, si

$$p\,R_1^2(M-1) - (p+1)(R_1^2+1)M - 2(p+1)R_1M\cos\vartheta < 0$$

Nous posons $\cos\vartheta = \frac{M(R_1^2+1) - p(R_1^2+M^2)}{2(p-1)R_1M}$ et, après une transformation, nous obtenons

$$(p+1)(M-1)\left(M - \frac{R_1}{\lambda}\right) < 0,\ \text{où}\ \frac{R_1}{\lambda} = 3p+2+2\sqrt{2p(p+1)}$$

Cette inégalité est satisfaite pour $1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$, et aussi pour $R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$, car on a $R_1 > 1$.

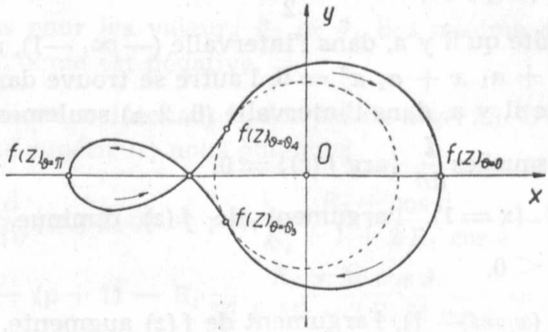

Fig 9

La fig. 9 représente la fonction $f(z) = \frac{(z+1)^p}{z^{p+1}\,(z+M)}$,

$|z| = \frac{2(p+1)+2\sqrt{2p(p+1)}}{2}$, pour $R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$.

La courbe décrite par $f(z)$ est symétrique par rapport à l'axe réel et se compose de deux boucles. Sur la boucle, qui ne contourne pas l'origine, il y a deux points où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Mais dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a seulement deux racines de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Donc la courbe décrite par $f(z)$ ne peut avoir d'autres boucles que celle de la figure, car sur chaque boucle qui ne contourne pas l'origine, il y a au moins un point où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

Cas 4. $p \geqslant 2$, $\frac{a}{b} = -M$, $f(z) = \frac{(z+1)^p}{z^{p+1}\,(z-M)}$, $|z| = R_1$

$R_1 = \frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}$, $\frac{R_1}{\lambda} = 3p+2+2\sqrt{2p(p+1)}$, $R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$

Nous avons constaté, à la page 50, qu'il y a dans ce cas seulement deux extréma de $|f(z)|$ pour $\vartheta = 0, \pi$.

Pour la valeur $\vartheta = 0$ nous obtenons un maximum de $|f(z)|$, parce que l'expression

$$\frac{d}{d\vartheta} I \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = \frac{p R_1}{(R_1+1)^2} + \frac{R_1 M}{(R_1 - M)^2} \quad \text{est positive.}$$

Pour la valeur $\vartheta = \pi$ nous obtenons un minimum de $|f(z)|$, car l'expression

$$\frac{d}{d\vartheta} I \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = - \frac{p R_1}{(R_1-1)^2} - \frac{R_1 M}{(R_1 + M)^2} \quad \text{est négative.}$$

Nous étudions maintenant la dérivée de arg $f(z)$. D'après l'équation (27) (signe inférieur) nous obtenons

$$\frac{d}{d\vartheta} \{\arg f(z)\} = p R_1 \frac{R_1 + \cos\vartheta}{R_1^2 + 1 + 2 R_1 \cos\vartheta} -$$

$$- (p+1) - R_1 \frac{R_1 - M\cos\vartheta}{R_1^2 + M^2 - 2 R_1 M \cos\vartheta} =$$

$$= \frac{b_0 + b_1 \cos\vartheta + b_2 \cos^2\vartheta}{(R_1^2 + 1 + 2R_1\cos\vartheta)(R_1^2 + M^2 - 2R_1 M\cos\vartheta)}, \text{ où } b_2 = 2(p+3) R_1^2 M.$$

L'équation $\dfrac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$ possède quatre racines au plus. Nous démontrerons que, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a deux racines au plus. Nous posons $\cos\vartheta = x$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = -\frac{p+3}{2}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=-1} = \frac{p R_1}{R_1 - 1} - (p+1) - \frac{R_1}{M + R_1} =$$

$$= - \frac{R_1 - (p+1)}{R_1 - 1} - \frac{R_1}{R_1 + M}$$

Cette expression est négative, parce que $R_1 > p + 1$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=0} = \frac{p R_1^2}{R_1^2 + 1} - (p+1) + \frac{R_1^2}{R_1^2 + M^2} =$$

$$= - \frac{R_1^2 + p + 1}{R_1^2 + 1} - \frac{R_1^2}{R_1^2 + M^2}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{x=1} = \frac{p R_1}{R_1 + 1} - (p+1) + \frac{R_1}{M - R_1} =$$

$$= \frac{R_1(2R_1 + p + 2) - M(R_1 + p + 1)}{(R_1 + 1)(M - R_1)}$$

Cette expression est positive, si $R_1 < M < \frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1}$,

nulle, si $M = \frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1}$, et négative, si

$\frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1} < M < \frac{R_1}{\lambda}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = -\frac{p+3}{2}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = \pm\infty, \quad \text{si } x = -\frac{R_1^2+1}{2R_1}, \frac{R_1^2+M^2}{2R_1 M}$$

Si $R_1 < M \leqslant \frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1}$ il y a dans l'intervalle fermé $[0, +1]$ une racine de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{\cos\vartheta = x} = 0$.

L'autre racine se trouve dans l'intervalle $(-\infty, -1)$, parce que aux extrémités de cet intervalle la fonction $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}_{\cos\vartheta = x}$ prend des valeurs négatives et à l'intérieur de l'intervalle, au point $x = -\frac{R_1^2+1}{2R_1,}$ il y a un pôle de premier ordre. Il y a ainsi, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, deux valeurs de ϑ pour lesquelles $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

Si $\frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1} < M < \frac{R_1}{\lambda}$ il y a dans chacun des intervalles $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ une racine de l'équation

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}{(R_1^2+1+2R_1 x)(R_1^2+M^2-2R_1 M x)} = 0,$$

car aux extrémités de ces intervalles la fonction prend des valeurs négatives et à l'intérieur, relativement aux points $x = -\frac{R_1^2+1}{2R_1}$ et $x = \frac{R_1^2+M^2}{2R_1 M}$, il y a des pôles de premier ordre. Ainsi il n'y a pas, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, de racines de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

Les fig. 10 a et b sont des représentations de cette fonction.

Si $\frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1} \leqslant M < \frac{R_1}{\lambda}$ l'argument de $f(z)$ diminue d'une façon monotone. Si $R < M < \frac{R_1(2R_1+p+2)}{R_1+p+1}$, la courbe décrite par $f(z)$ se compose de deux boucles. Sur la boucle qui ne contourne pas l'origine il y a deux points où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$. Mais dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ il y a seulement deux racines de l'équation $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

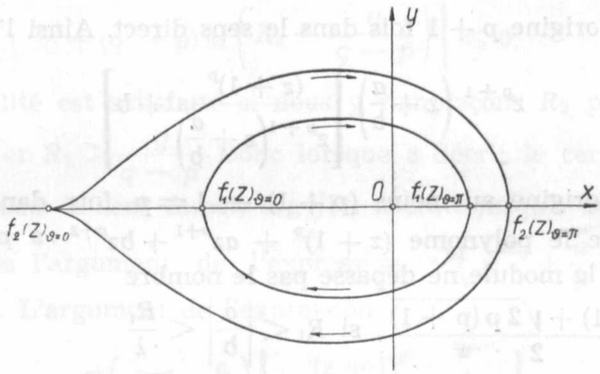

Fig. 10a

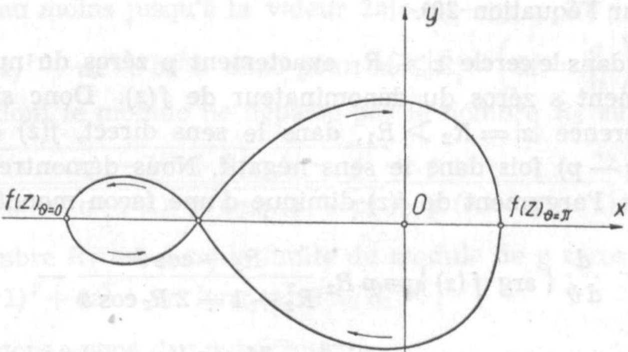

Fig. 10b

Donc la courbe décrite par $f(z)$ n'a d'autres boucles que celle de la figure, car sur chaque boucle qui n'entoure pas l'origine il y a au moins un point où $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = 0$.

Ainsi nous avons démontré que, si $q=p+1$, $s=p+2$, $\frac{a}{b}$ est un nombre réel, $R_1 < M < \frac{R_1}{\lambda}$ et z décrit la circonférence $|z|=R_1$ dans le sens direct, $f(z)$ contourne le point arbitraire $-b$ au plus $(p+1)-p=1$ fois dans le sens négatif (l'origine — exactement une fois dans le sens négatif). En même temps l'expression $z^{p+1}\left(z+\frac{a}{b}\right)$ contourne l'origine $p+1$ fois dans le sens direct. Ainsi l'expression

$$z^{p+1}\left(z+\frac{a}{b}\right)\left[\frac{(z+1)^p}{z^{p+1}\left(z+\frac{a}{b}\right)}+b\right]$$

contourne l'origine au moins $(p+1)-1=p$ fois dans le sens direct. Donc le polynome $(z+1)^p+az^{p+1}+bz^{p+2}$ a p zéros au moins, dont le module ne dépasse pas le nombre

$R_1=\frac{(2p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}$, si $R_1<\left|\frac{a}{b}\right|<\frac{R_1}{\lambda}$

Troisième cas. $\left|\frac{a}{b}\right| \leqslant R_1^{s-q}$, $f(z)=\frac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}$ (R_1 est déterminé par l'équation 20).

Il y a dans le cercle $|z|\leqslant R_1$ exactement p zéros du numérateur et exactement s zéros du dénominateur de $f(z)$. Donc si z décrit la circonférence $|z|=R_2>R_1$, dans le sens direct, $f(z)$ contourne l'origine $(s-p)$ fois dans le sens négatif. Nous démontrerons que, dans ce cas, l'argument de $f(z)$ diminue d'une façon monotone.

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}=pR_2\frac{R_2+\cos\vartheta}{R_2^2+1+2R_2\cos\vartheta}-$$

$$-q-(s-q)R_2^{s-q}\frac{R_2^{s-q}+M\cos[(s-q)\vartheta-a]}{R_2^{2(s-q)}+M^2+2R_2^{s-q}M\cos[(s-q)\vartheta-a]}$$

Nous calculons le maximum de cette expression

$$\max\left\{\frac{R_2+\cos\vartheta}{R_2^2+1+2R_2\cos\vartheta}\right\}=\frac{1}{R_2-1}$$

$$\min\left\{\frac{R_2^{s-q}+M\cos[(s-q)\vartheta-a]}{R_2^{2(s-q)}+M^2+2R_2^{s-q}M\cos[(s-q)\vartheta-a]}\right\}=\frac{1}{R_2^{s-q}+M}$$

Arg $f(z)$ diminue d'une façon monotone, si max $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} \leqslant 0$

$$\frac{pR_2}{R_2-1}-q-\frac{(s-q)\,R_2^{s-q}}{R_2^{s-q}+M}\leqslant 0$$

$$-\frac{1}{(R_2-1)(R_2^{s-q}+M)}\left[(s-p)\,R_2^{s-q}\left(R_2-\frac{s}{s-p}\right)+\right.$$

$$\left.+(q-p)\,M\left(R_2-\frac{q}{q-p}\right)\right]\leqslant 0.$$

Cette inégalité est satisfaite si nous y remplaçons R_2 par R_1, car $R_1 > \frac{s}{s-p}$ et $R_1 > \frac{q}{q-p}$. Donc lorsque z décrit le cercle $|z|=R_2$ $(R_2 > R_1)$ dans le sens direct, arg $f(z)$ décroît jusqu'à $2\pi(s-p)$. En même temps l'argument de l'expression $z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)$ augmente jusqu'à $2\pi s$. L'argument de l'expression

$$z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)\left[\frac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}+b\right]$$

croît alors au moins jusqu'à la valeur $2\pi[s-(s-p)] = 2\pi p$. Le polynome $(z+1)^p+az^q+bz^s$ a donc pour $M\leqslant R_1^{s-p}\left(M=\left|\frac{a}{b}\right|\right)$ p zéros au moins, dont le module ne dépasse pas le nombre R_2 supérieur à

$$R_1=\frac{\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}-p(s-q-1)}{\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}-p(s-q+1)}\cdot\frac{s}{s-p}.$$

Le nombre R_1 est donc la limite du module de p zéros du polynome $(z+1)^p+az^q+bz^s$ lorsque $M\leqslant R_1^{s-q}$.

Ainsi nous avons démontré que

1⁰ le polynome $(z+P)^p+az^q+bz^s$ où P est arbitraire, $\left|\frac{a}{b}\right|\geqslant\left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$ où $\left|\frac{a}{b}\right|\leqslant R_1^{s-q}$ (le nombre λ est déterminé par l'équation 19), a p zéros au moins dont le module ne dépasse pas le nombre

$$R=\frac{\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}-p(s-q-1)}{\sqrt{p^2(s-q-1)^2+4pq(s-p)}-p(s-q+1)}\cdot\frac{s}{s-p}\cdot|P|.$$

2^0. Si P et $\frac{a}{b}$ sont des nombres réels et p un nombre naturel, le polynome $(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2}$ a p zéros au moins dont le module ne dépasse pas le nombre

$$R = \frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2} \cdot \left|P\right| \tag{28}$$

Nous démontrerons que le nombre R, déterminé par la relation (28), est la limite exacte du module de p racines de l'équation

$$(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2} = 0$$

Pour cela nous formons l'équation, pour laquelle la racine la plus grande en module ,parmi les p racines de l'équation, est une racine triple. Dans ce but nous dérivons l'équation deux fois suivant z et éliminons les coefficients a et b.

$$(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2} = 0$$

$$p(z+P)^{p-1} + (p+1)\,az^p + (p+2)\,bz^{p+1} = 0$$

$$p(p-1)(z+P)^{p-2} + (p+1)\,paz^{p-1} + (p+2)(p+1)\,bz^p = 0$$

Le système de ces trois équations aux inconnues $(z+P)^{p-2}, az^{p-1}$ bz^p possède une solution, si

$$\begin{vmatrix} (z+P)^2, & z^2, & z^2 \\ p(z+P), & (p+1)z, & (p+2)z \\ p(p-1), & (p+1)p, & (p+2)(p+1) \end{vmatrix} = 0$$

Nous obtenons pour $z \neq 0$

$$2z^2 + 4(p+1)Pz + (p+1)(p+2)P^2 = 0$$

$$z = \frac{-4(p+1)P - 2\sqrt{2p(p+1)}\,P}{4} = -\frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}\,P$$

C'est donc la racine plus grande de l'équation. Elle est égale en module au nombre R, déterminé par la relation (28).

En posant $z = -\frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}\,P$ nous cherchons la solution de l'équation $(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2} = 0$ et sa dérivée respectivement à a et b. Nous obtenons les coefficients a et b.

$$a_0 = 4\,\frac{[2p+\sqrt{2p(p+1)}]^{p-1}\,[p+\sqrt{2p(p+1)}]}{[2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}]^{p+1}} \cdot \frac{1}{P}$$

$$b_0 = 4\,\frac{\sqrt{2p(p+1)}\cdot[2p+\sqrt{2p(p+1)}]^{p-1}}{[2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}]^{p+2}}\cdot\frac{1}{P^2}$$

L'équation $(z+P)^p + a_0 z^{p+1} + b_0 z^{p+2} = 0$ possède $(p-1)$ racines au plus à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}\,|P|$, parce qu'il y a trois racines (une racine triple) sur la circonférence de ce cercle. Il en résulte que la limite exacte ne peut être remplacée par un nombre plus petit que R,

$$R = \frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}\,|P|$$

§ 3. Théorème III.

Si $P(z)$, $Q(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ sont des polynomes de degrés p, q, s et t, dont tous les zéros ne dépassent pas en module respectivement P, Q, S, T, et si $p < q < s < t$, le polynome

(29) $$P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$$

possède p zéros au moins qui ne dépassent pas en module le nombre

$$R = \frac{tM_1 + qM_2}{t-q},$$

où

$$M_1 = (K_1 + Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}} + \frac{qQ+pP}{q-p},$$

$$K_1 = \frac{(p+q)\,M_2 + (2t-q+p)\,r}{2t-q-p} < \frac{2\,(t+p)\,M_2}{2t-q-p},$$

$$M_2 = (K_2 + T)\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{s}{t-s}} + \frac{tT+sS}{t-s},$$

$$r = \max\left\{Q,\ T,\ \frac{pQ+qP}{q-p},\ \frac{sT+tS}{t-s}\right\},$$

$$K_2 = \max\left\{k_o r\left[1 + 2\,(k_0^2-1)\,\frac{t-s}{q-p}\right],\ l_0 M_1' + \right.$$

$$\left. + \frac{(t-s)\,(l_0^2 M_1'^2 - r^2)\,(l_0-1)\,M_1'}{(s+p)\,rM_1' + (q-p)\,r^2}\right\},$$

$$l_0 = \frac{(s-p)\,M_1' + (s+p)\,r}{(s-q)\,M_1'} < \frac{2s}{s-q},$$

$$k_0 = 2 \cdot \frac{s+p}{2s-q-p},$$

$$M'_1 = (k_0 r + Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}} + \frac{qQ+pP}{q-p}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous transformons le polynome (29) comme suit:

$$(29') \qquad \left[S(z) + \frac{c}{b}\,T(z)\right] \cdot \left[\frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)+\frac{c}{b}\,T(z)} + b\right].$$

Nous distinguons quatre cas selon le module des nombres a et $\frac{c}{b}$:

I. $|a| \leqslant m'_1, \left|\frac{c}{b}\right| \leqslant m_2$, où: $m'_1 = (k_0 r + Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p$

II. $|a| \geqslant m'_1, \left|\frac{c}{b}\right| \leqslant m_2$, $m_2 = (K_2+T)^{s-t}\left(\frac{s}{t}\right)^s$

III. $|a| \leqslant m_1, \left|\frac{c}{b}\right| \geqslant m_2$, $m_1 = (K_1+Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p$

IV. $|a| \geqslant m_1, \left|\frac{c}{b}\right| \geqslant m_2$, $K_1 = \frac{(p+q)\,M_2 + (2t-q+p)\,r}{2t-q-p}$

Premier cas: $|a| \leqslant m'_1, \left|\frac{c}{b}\right| \leqslant m_2$.

D'abord nous étudions l'expression

$$f(z) = \frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)+\frac{c}{b}T(z)}.$$

Si $|a|$ est suffisamment petit, le polynome $P(z) + aQ(z)$ a p zéros dans le cercle $|z| \leqslant r_1$, $r_1 = \max\left\{Q, \frac{pQ+qP}{q-p}\right\}$; le module $|a|$ étant convenablement choisi, les autres zéros, au nombre de $q-p$, peuvent être supérieurs en module à un nombre K'_1 $(K'_1 > r)$ arbitrairement grand.

Si $\left|\frac{c}{b}\right|$ est assez petit, le polynome $S(z) + \frac{c}{b}T(z)$ possède s zéros dans le cercle $|z| \leqslant r_2$, $r_2 = \max\left\{T, \frac{sT+tS}{t-s}\right\}$, et on peut choisir $\left|\frac{c}{b}\right|$ de manière que les autres zéros, aus nombre de $t-s$, soient supérieurs en module au nombre K_2, $(K_2 > r_2)$, aussi grand que l'on veut.

Nous déterminons le nombre R_1, supérieur à max $(r_1; r_2)$, et choisissons les nombres K_1' et K_2 ($R_1 \leqslant \min \{K'_1, K_2\}$) tels que, lorsque z $(=R_1 e^{i\vartheta})$ décrit la circonférence $|z| = R_1$ dans le sens direct, arg $f(z)$ décroisse d'une façon monotone.

$$f(z) \equiv \frac{P(z) + a\,Q(z)}{S(z) + \frac{c}{b}T(z)} \equiv \frac{\prod_{k=1}^{p} (z + u_k) \prod_{k=1}^{q-p} (z + v_k)}{\prod_{k=1}^{s} (z + \bar{u}_k) \prod_{k=1}^{t-s} (z + \bar{v}_k)}$$

où:

$$u_k = \varrho_{1k} e^{i\alpha_k}, \quad v_k = \varrho_{2k} e^{i\beta_k}, \quad \bar{u}_k = \varrho_{3k} e^{i\gamma_k}, \quad \bar{v}_k = \varrho_{4k} e^{i\delta_k},$$

$$\varrho_{1k} \leqslant r_1, \quad r_1 < R_1 \leqslant K_1' \leqslant \varrho_{2k}, \quad \varrho_{3k} \leqslant r_2, \quad r_2 < R_1 < K_2 \leqslant \varrho_{4k}$$

$$\max (r_1, r_2) < R_1 \leqslant \min (K_1, K_2).$$

L'argument de $f(z)$ décroît d'une façon monotone lorsque

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} \leqslant 0 \quad ^{11)} \tag{30}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = R\left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{z}{z + u_k} + \sum_{k=1}^{q-p} \frac{z}{z + v_k} - \sum_{k=1}^{s} \frac{z}{z + \bar{u}_k} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{t-s} \frac{z}{z + \bar{v}_k}\right\}$$

L'inégalité (30) est satisfaite, si le maximum de cette expression est négatif.

$$\max R\left\{\sum_{1}^{p} \frac{z}{z + u_k}\right\} = \max R\left\{\sum_{1}^{p} \frac{R_1 e^{i\vartheta}(R_1 e^{-i\vartheta} + \varrho_{1k} e^{-i\alpha_k})}{|R_1 e^{i\vartheta} + \varrho_{1k} e^{i\alpha_k}|^2}\right\} =$$

$$= \sum_{K=1}^{p} \max \frac{R_1^2 + R_1 \varrho_{1k} \cos(\vartheta - \alpha_k)}{R_1^2 + \varrho_{1k}^2 + 2 R_1 \varrho_{1k} \cos(\vartheta - \alpha_k)} \leqslant \frac{p R_1}{R - r_1} \text{ pour } \varrho_{1k} \leqslant r_1.$$

D'une façon analogue l'on a:

$$\max R\left\{\sum_{1}^{q-p} \frac{z}{z + v_k}\right\} \leqslant \frac{(q-p) R_1}{R_1 + K_1'} \text{ pour } \varrho_{2k} \geqslant K_1' \geqslant R_1$$

$$\min R\left\{\sum_{1}^{s} \frac{z}{z + \bar{u}_k}\right\} \geqslant \frac{s R_1}{R_1 + r_2} \text{ pour } \varrho_{3k} \leqslant r_2$$

---

11) $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} = R\left\{z \frac{f'(z)}{f(z)}\right\}$ (comparer note 9 à la page 39).

$$\min R\left|\sum_{1}^{t-s}\frac{z}{z+v_k}\right| \geqslant \frac{(t-s)R_1}{R_1-K_2} \text{ pour } \varrho_{4k} \geqslant K_2 > R_1$$

L'inégalité (30) est donc satisfaite si

$$(30') \qquad \frac{pR_1}{R_1-r_1}+\frac{(q-p)R_1}{R_1+K_1'}-\frac{sR_1}{R_1+r_2}-\frac{(t-s)R_1}{R_1-K_2}\leqslant 0.$$

Pour simplifier le calcul, nous remplaçons les nombres r_1 et r_2 par le nombre $r = \max(r_1, r_2)$ et posons $K_1' = R_1$. Nous obtiendrons alors

$$\frac{t-s}{K_2-R_1}\leqslant -\frac{p}{R_1-r}-\frac{(q-p)}{R_1+R_1}+\frac{s}{R_1+r}$$

Vu la condition $r < R_1 \leqslant K_1'$, nous posons $R_1 = kr$, $(k > 1)$ et nous obtenons ensuite

$$\frac{t-s}{K_2-kr}\leqslant\frac{(2s-q-p)k^2-2(s+p)k+(q-p)}{2k(k^2-1)r}$$

Le membre gauche de cette inégalité étant positif, l'inégalité suivante doit avoir lieu:

$$(2s-q-p)k^2-2(s+p)k+(q-p)>0.$$

Cette inégalité est satisfaite pour $k = k_0 = \dfrac{2(s+p)}{2s-q-p}$.

Nous déterminons le nombre K_2 de manière que l'inégalité (30′) soit satisfaite pour $R_1 = K'_1 = k_0 r$.

$$\frac{t-s}{K_2-k_0r}\leqslant\frac{q-p}{2k_0(k_0^2-1)r}\,; \quad K_2-k_0r\geqslant\frac{2k_0(k_0^2-1)r(t-s)}{q-p}.$$

Il vient

$$(31) \qquad K_2 \geqslant k_0 r\left[1+2(k_0^2-1)\cdot\frac{t-s}{q-p}\right].$$

Donc si $R_1 = K'_1 = k_0 r$ et si K_2 satisfait à la condition (31), l'inégalité (30′) est vérifiée.

Dans le cas considéré, le cercle $|z| \leqslant R_1 = k_0 r$ contient exactement p zéros du polynome $P(z)+aQ(z)$ et exactement s zéros du polynome $S(z)+\frac{c}{b}T(z)$.

Donc, lorsque z décrit la circonférence $|z| = k_0 r$ dans le sens direct, l'expression $f(z) \equiv \dfrac{P(z)+aQ(z)}{S(z)+\frac{c}{b}T(z)}$ contourne un point arbitraire

$-b$ au plus $s-p$ fois dans le sens négatif (l'origine — exactement $s-p$ fois dans le sens négatif). En même temps $S(z)+\frac{c}{b}T(z)$ contourne l'origine s fois dans le sens direct Donc

$$\left[S(z)+\frac{c}{b}T(z)\right]\cdot\left[\frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)+\frac{c}{b}T(z)}+b\right]$$

contourne l'origine $s-(s-p)=p$ fois au moins dans le sens direct.

Dans l'équation (4) nous remplaçons $N(m)$ par $K_1'=k_0r$ et désignons la valeur de m ainsi obtenue par m_1'

$$m_1'=(k_0r+Q)^{p-q}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^p\cdot$$

Ainsi, pour $|a|\leqslant m_1'$, et $\left|\frac{c}{b}\right|\leqslant m_2$ (cette condition étant remplie, l'inégalité 31 est vraie), le polynome $P(z)+aQ(z)+bS(z)+cT(z)$ possède dans le cercle $|z|\leqslant k_0r$ p zéros au moins car, l'argument du polynome croît au moins jusqu'à $2\pi p$, lorsque z décrit la circonférence $|z|=k_0r$ dans le sens direct.

Deuxième cas: $|a|\geqslant m_1',\ \left|\frac{c}{b}\right|\leqslant m_2.$

Nous posons $m=m_1'=(k_0r+Q)^{p-q}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^p$ dans l'équation (1) et désignons la valeur de $M(m)$ obtenue par M_1'

$$M_1'=(k_0r+Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}}+\frac{qQ+pP}{q-p}\cdot$$

Nous déterminons le nombre R_2 supérieur à M_1' et choisissons le nombre K_2, satisfaisant à la condition (31), de manière que lorsque z décrit la circonférence $|z|=R_2$ $(z=R_2e^{i\vartheta})$ dans le sens direct, arg $f(z)$ décroisse d'une façon monotone, c'est-à-dire que la condition (30) soit vérifiée. Nous supposons de plus que $R_2<K_2$.

Max $\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}$ sera déterminé comme dans le premier cas.

$$\max\frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}=\frac{pR_2}{R_2-r_1}+\frac{(q-p)R_2}{R_2-M_1'}-\frac{sR_2}{R_2+r_2}-\frac{(t-s)R_2}{R_2-K_2}\cdot$$

L'inégalité (30) est satisfaite lorsque

$$(30'') \qquad \frac{pR_2}{R_2 - r_1} + \frac{(q-p)\,R_2}{R_2 - M'_1} - \frac{sR_2}{R_2 + r_2} - \frac{(t-s)\,R_2}{R_2 - K_2} \leqslant 0.$$

Nous remplaçons r_1 et r_2 par $r = \max(r_1, r_2)$ et posons $R_2 = M'_1 \cdot l$, $(l > 1)$ et, après une transformation, nous obtenons

$$\frac{t-s}{K_2 - lM'_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(s-q)\,M'^2_1 l^2 - [(s-p)\,M'^2_1 + (s+p)\,M'_1 r]\,l + [(s+p)\,r\,M'_1 + (q-p)\,r^2]}{(l^2 M'_1 - r^2)\,(l-1)\,M'_1}$$

Le membre gauche de cette inégalité étant positif, il en résulte que

$$(s-q)\,M'^2_1 l^2 - [(s-p)\,M'_1 + (s+p)\,r]\,M'_1\, l + [(s+p)\,rM'_1 + (q-p)\,r^2] > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée pour

$$l = l_0 = \frac{(s-p)\,M'_1 + (s+p)\,r}{(s-q)\,M'_1} < \frac{2s}{s-q}.$$

Nous allons déterminer une autre condition, à laquelle devra satisfaire le nombre K_2 pour que l'inégalité (30″) soit vérifiée pour $R_2 = M' \cdot l_0$.

$$K_2 \geqslant l_0 M'_1 + \frac{(t-s)\,(l_0^2\, M'^2_1 - r^2)\,(l_0 - 1)\,M'_1}{(s+p)\,rM'_1 + (q-p)\,r^2}.$$

Le nombre K_2 doit, en outre, satisfaire à la condition (31), obtenue dans le premier cas. Nous mettons donc

$$(32) \qquad K_2 = \max\left\{ k_0 r \left[1 + 2\,(k_0^2 - 1)\,\frac{t-s}{q-p} \right], l_0 M'_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{(t-s)\,(l_0^2\, M'^2_1 - r^2)\,M'_1\,(l_0 - 1)}{(s+p)\,rM'_1 + (q-p)\,r^2} \right\}.$$

D'après le lemme 2, le polynome $S(z) + \frac{c}{b}\,T(z)$ possède pour $\left|\frac{c}{b}\right| \leqslant m$ (m est un nombre positif suffisamment petit) s zéros dans le cercle $|z| \leqslant r_2$, $r_2 = \max\left\{ T, \frac{sT + tS}{t-s} \right\}$, et les autres zéros au nombre de t—s sont supérieurs ou égaux en module au nombre

$$(33) \qquad N(m) = \sqrt[t-s]{\frac{1}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^s} - T.$$

Nous substituons le nombre K_2, défini par l'équation (32), au lieu de $N(m)$ dans l'équation (33) et désignons par m_2 le nombre m ainsi obtenu

$$m_2 = (K_2 + T)^{s-t} \left(\frac{s}{t}\right)^s \tag{34}$$

Si $|a| \geqslant m_1'$ et $\left|\frac{c}{b}\right| \leqslant m_2$, le cercle $|z| \leqslant R_2 = l_0 M_1'$ contient exactement q zéros du numérateur et exactement s zéros du dénominateur de l'expression

$$f(z) = \frac{P(z) + a\,Q(z)}{S(z) + \frac{c}{b}\,T(z)}\,.$$

Donc, si z décrit dans le sens direct la circonférence $|z| = R_2 = l_0 M_1'$, $f(z)$ contourne le point arbitraire $-b$ au plus $s - q$ fois dans le sens négatif (l'origine — exactement $s - q$ fois dans le sens négatif). En même temps le dénominateur $S(z) + \frac{c}{b} T(z)$ contourne l'origine s fois dans le sens direct. Il en résulte que l'argument de l'expression

$$\left[S(z) + \frac{c}{b}\,T(z)\right] \cdot \left[\frac{P(z) + a\,Q(z)}{S(z) + \frac{c}{b}\,T(z)} + b\right]$$

croit au moins jusqu'à valeur $2\pi\,[s - (s - q)] = 2\,\pi\,q$. Donc, si $|a| \geqslant m_1'$ et $\left|\frac{c}{b}\right| \leqslant m_2$, le polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$ possède dans le cercle $|z| \leqslant R_2 = l_0 M_1'$ p zéros au moins du polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$.

Pour obtenir une limite du module de p zéros, indépendante de tous les coefficients du polynome, nous allons étudier les troisième et quatrième cas.

Troisième cas: $|a| \leqslant m_1$, $\frac{c}{b} \geqslant m_2$.

D'après le lemme 1, tous les zéros du polynome $S(z) + \frac{c}{b} T(z)$ sont inférieurs en module, pour $\left|\frac{c}{b}\right| \geqslant m$ (m est un nombre positif arbitraire), au nombre

$$M(m) = \sqrt[t-s]{\frac{1}{m}} + \frac{tT + sS}{t - s}\,. \tag{35}$$

Dans l'équation (35) nous remplaçons m par le nombre m_2, défini par l'équation (34), et désignons le nombre $M(m)$ ainsi obtenu par M_2

$$(36)\qquad M_2 = (K_2 + T)\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{s}{t-s}} + \frac{tT + sS}{t - s}\,.$$

Nous déterminons le nombre R_3 supérieur à M_2 et choisissons $|a|$ de telle manière que $(q-p)$ zéros du polynome $P(z) + aQ(z)$ se trouvent dans la région $|z| \geqslant K_1$, le nombre K_1 étant pris supérieur à R_3 $(M_2 < R_3 < K_1)$. De plus, nous prenons R_3 de telle manière que l'argument de $f(z)$ décroisse d'une façon monotone, c'est-à-dire que la condition (30) soit vérifiée, lorsque z $(z = R_3\, e^{i\vartheta})$ décrit la circonférence $|z| = R_3$ dans le sens direct. Comme dans le premier cas, nous calculons $\max \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\}$:

$$\max \frac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} \leqslant \frac{p\,R_3}{R-r_1} + \frac{(q-p)\,R_3}{R_3+K_1} - \frac{s\,R_3}{R_3+r_2} - \frac{(t-s)\,R_3}{R_3+M_2}$$

L'inégalité (30) est satisfaite lorsque

$$(30''')\qquad \frac{p}{R_3-r_1} + \frac{(q-p)}{R_3+K_1} - \frac{s}{R_3+r_2} - \frac{(t-s)}{R_3+M_2} \leqslant 0\,.$$

Nous remplaçons r_1 et r_2 par $r = \max(r_1, r_2)$ et posons $R_3 = K_1$; il en résulte

$$\frac{p}{K_1-r} + \frac{(q-p)}{2K_1} \leqslant \frac{s}{K_1+r} + \frac{(t-s)}{K_1+M_2}\,.$$

Cette inégalité est satisfaite si

$$\frac{p}{K_1-r} + \frac{q-p}{2K_1} \leqslant \frac{t}{K_1+M_2}\,.$$

Il en résulte

$$(2t-q-p)\,K_1^2 - [(p+q)\,M_2 + (2t-q+p)\,r]\,K_1 + (q-p)\,rM_2 \geqslant 0.$$

Cette inégalité est satisfaite pour

$$(37)\quad K_1 = \frac{(p+q)\,M_2 + (2t-q+p)\,r}{2t-q-p} < 2\cdot\frac{t+p}{2t-q-p}\,M_2\,.$$

Dans l'équation (4) nous remplaçons $N(m)$ par le nombre ainsi obtenu et désignons la valeur calculée de m par m_1

$$(38)\qquad m_1 = (K_1 + Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^{p}$$

Si $|a| \leqslant m_1$ et $\frac{c}{b} \geqslant m_2$, le cercle $|z| < R_3$,

$$R_3 = K_1 = \frac{(p+q)M_2 + (2t - q + p)r}{2t - q - p}$$

contient exactement p zéros du numérateur et exactement t zéros du dénominateur de l'expression

$$f(z) = \frac{P(z) + aQ(z)}{S(z) + \frac{c}{b}T(z)} .$$

Donc, lorsque z décrit dans le sens direct la circonférence $|z| = R_3$, $f(z)$ contourne le point arbitraire $-b$ au plus $t - p$ fois dans le sens négatif (l'origine — exactement $t - p$ fois dans le sens négatif). En même temps l'expression $S(z) + \frac{c}{b} T(z)$ contourne l'origine t fois dans le sens positif. Donc l'argument de l'expression

$$\left[S(z) + \frac{c}{b} T(z) \right] \cdot \left[\frac{P(z) + aQ(z)}{S(z) + \frac{c}{b}T(z)} + b \right]$$

croît au moins jusqu'à la valeur $2\pi[t - (t - p)] = 2\pi p$.

Ainsi, pour $|a| \leqslant m_1$ et $\left|\frac{c}{b}\right| \geqslant m_2$, le polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$ possède dans le cercle $|z| \leqslant R_3$ p zéros au moins.

Quatriéme cas: $|a| \geqslant m_1$, $\left|\frac{c}{b}\right| \geqslant m_2$.

Dans l'équation (1) nous remplaçons m par le nombre m_1 défini par l'équation (38) et désignons la valeur calculée $M(m)$ par M_1:

$$M_1 = (K_1 + Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}} + \frac{qQ + pP}{q - p} .$$

Dans ce cas, le cercle $|z| \leqslant M_1$ contient tous les zéros du polynome $P(z) + aQ(z)$, et le cercle $|z| \leqslant M_2$ — tous les zéros du polynome $S(z) + \frac{c}{b} T(z)$. D'après le théorème de M. Biernacki, cité dans l'introduction, le polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z) + T(z)$ possède q zéros au moins dans le cercle.

$$|z| \leqslant R_4 = \frac{tM_1 + qM_2}{t - q}, \quad R_4 > M_1 > M_2 .$$

Il résulte des troisième et quartrième cas que ce polynome a dans le cercle $|z| \leqslant R_1$ p zéros au moins, a étant arbitraire et $\left|\frac{c}{b}\right| \geqslant m_2$.

Ainsi nous avons démontré que le polynome $P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$ possède p zéros, dont le module ne dépasse pas le nombre

$$R = \frac{tM_1 + qM_2}{t - q},$$

indépendant des coefficients a, b et c du polynome.

S t r e s z c z e n i e.

Praca ta dotyczy wyznaczania granicy górnej modułu pewnej liczby pierwiastków wielomianu typu

$$a_1 P_1(z) + \ldots\ldots\ldots + a_k P_k(z),$$

gdy znane są jedynie stopnie wielomianów $P_1(z), \ldots, P_k(z)$ i obszary $R_1, \ldots, R_k$ zawierając odpowiednio wszystkie ich pierwiastki. Problem ten postawił M. B i e r n a c k i i otrzymał dla $k = 2$ następujący wynik:

Jeżeli $P(z)$ jest wielomianem stopnia p, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby P, $Q(z)$ jest wielomianem stopnia q $(q > p)$, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby Q to wielomian $P(z) + aQ(z)$ posiada conajmniej p pierwiastków co do modułu nie większych od liczby

$$r = \max \left\{ Q, \frac{qP + pQ}{q - p} \right\}.$$

W pracy tej rozważam problem postawiony przez M. B i e r n a c k i e g o dla $k = 3$ i $k = 4$.

W celu określenia położenia pierwiastków równania $P(z) + aQ(z)$ w zależności od współczynnika a wprowadzamy dwa lematy.

Lemat 1. Jeżeli $P(z)$ jest wielomianem stopnia p, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby P, $Q(z)$ jest wielomianem stopnia q $(q > p)$, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby Q, ponadto $|a| \geqslant m$ (m jest dowolną liczbą dodatnią), to wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) + aQ(z)$ są co do modułu mniejsze od liczby

$$M(m) = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m}} + \frac{qQ + pP}{q - p} \tag{1}$$

W dowodzie opieramy się na twierdzeniu Rouché. W tym celu wyznaczamy dla $|a| \geqslant m$ koło, na którego obwodzie będzie spełniona nierówność $|P(z)| < |aQ(z)|$. Nierówność tę ze względu na warunek $|a| \geqslant m$ zastępujemy nierównością $|P(z)| < |mQ(z)|$. Oznaczając literą M promień szukanego koła otrzymamy dla $M > P$ i $M > Q$ następujące nierówności

$$|P(z)| \leqslant (M+P)^p\,,\ |m\,Q(z)| \geqslant m(M-Q)^q$$

Wobec tego nierówność $|P(z)| < |mQ(z)|$ możemy zastąpić nierównością

$$(M+P)^p < m(M-Q)^q \tag{2}$$

Podstawiając $M - Q = u$ otrzymujemy

$$u + P + Q < \sqrt[p]{m \cdot u^{\frac{q}{p}}} \tag{3}$$

Jako rozwiązanie tej nierówności przyjmujemy odciętą punktu przecięcia się prostej $v = u + P + Q$ ze styczną do paraboli $v = \sqrt[p]{m}\, u^{\frac{q}{p}}$ w punkcie przecięcia się tej paraboli z prostą $v = u$. Wracając przez podstawienie $u = M - Q$ do nierówności (2) otrzymamy liczbę M określoną równaniem (1).

Zgodnie z twierdzeniem Rouché w kole $|z| \leqslant M$ funkcje $aQ(z)$ i $P(z) + aQ(z)$ posiadają tę samą liczbę pierwiastków. Wyznaczona liczba M jest większa od Q. Zatem dla $|a| \geqslant m$ w kole $|z| \leqslant M$ znajdują się wszystkie pierwiastki wielomianu $aQ(z)$ i tym samym wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) + aQ(z)$.

Lemat 2. Jeżeli $P(z)$ jest wielomianem stopnia p, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają modułu liczby P, $Q(z)$ jest wielomianem stopnia q $(q > p)$, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby Q, ponadto $|a| \leqslant m$ (m jest liczbą dodatnią dość małą), to wielomian $P(z) + aQ(z)$ posiada $q - p$ pierwiastków większych lub równych co do modułu liczbie

$$N(m) = \sqrt[q-p]{\frac{1}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^p} - Q\,, \tag{4}$$

$$\text{dla } 0 < m < min\left\{(2Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^p\left(\frac{q-p}{Q+P}\right)^{q-p}\frac{p^p}{q^q}\right\}$$

W dowodzie opieramy się na twierdzeniu R o u c h é. W tym celu wyznaczamy koło, na którego obwodzie będzie spełniona nierówność $|P(z)| > |aQ(z)|$. Jeżeli $|a| \leqslant m$ i $P < N$, $Q < N$, to otrzymujemy następujące nierówności

$$|P(z)| \geqslant (N-P)^p\,, \qquad |a\,Q(z)| \leqslant m(N+Q)^q$$

Wobec tego nierówność $|P(z)| > |mQ(z)|$ można zastąpić nierównością

$$(N-P)^p > m(N+Q)^q \tag{5}$$

Stąd po podstawieniu $N + Q = u$ otrzymujemy

$$u - (P + Q) > \sqrt[p]{m}\, u^{\frac{q}{p}} \tag{6}$$

Jako rozwiązanie tej nierówności przyjmujemy odciętą punktu paraboli $v = \sqrt[p]{m}\ u^{\frac{q}{p}}$, w którym współczynnik kątowy stycznej $= 1$. Rozwiązanie to istnieje, jeżeli

$$m < \min\left\{ (2Q)^{p-q} \left(\frac{p}{q}\right)^p, \left(\frac{q-p}{Q+P}\right)^{q-p} \frac{p^p}{q^q} \right\} \tag{7}$$

Wracając przez podstawienie $u = N + Q$ do nierówności (5) otrzymujemy liczbę N określoną równaniem (4).

Zgodnie z twierdzeniem Rouché w kole $|z| \leqslant N$ wielomiany $P(z)$ i $P(z) + aQ(z)$ posiadają tę samą liczbę pierwiastków. W ten sposób wykazaliśmy, że wielomian $P(z) + aQ(z)$ posiada w kole $|z| \leqslant N$ p pierwiastków. Pozostałe pierwiastki tego wielomianu są większe lub równe co do modułu liczbie N.

Twierdzenie I. *Jeżeli $P(z)$ jest wielomianem stopnia p, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby P, $Q(z)$ jest wielomianem stopnia q, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby Q, $S(z)$ jest wielomianem stopnia s $(p < q < s)$, którego wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu liczby S, to wielomian $P(z) + aQ(z) + bS(z)$ posiada co najmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby*

$$R = \frac{sM + qS}{s - q}, \tag{8}$$

gdzie: $M = \left\{ \max\left[S, \frac{(2s - q - p)\, r + (q - p)\, S}{2s - q - p} \right] + Q \right\} \sqrt[q-p]{\left(\frac{q}{p}\right)^p} + \frac{qQ + pP}{q - p}$, $\qquad r = \max\left\{ Q, \frac{qP + pQ}{q - p} \right\}$.

Dowód opieramy na zasadzie zmienności argumentu. Wielomian $P(z) + aQ(z) + bS(z)$ piszemy w postaci

$$S(z) \left\{ \frac{P(z) + aQ(z)}{S(z)} + b \right\} \tag{9}$$

i badamy zmienność argumentu tego wyrażenia, gdy z opisuje w kierunku dodatnim okrąg o środku w początku układu. Promień okręgu wyznaczamy tak, ażeby argument wyrażenia $\frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}$ monotonicznie malał.

Rozróżniamy dwa przypadki w zależności od modułu liczby a:

I. $|a| \leqslant m$, gdzie $m = \min\left\{(S+Q)^{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^{p},\right.$

II. $|a| \geqslant m$, $\left.\left[\frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}+Q\right]^{p-q}\left(\frac{q}{p}\right)^{-p}\right\}.$

Przypadek I. W tym przypadku wielomian $P(z)+aQ(z)$ posiada p pierwiastków w kole $|z| \leqslant r$, $r = \max\left\{Q, \frac{qP+pQ}{q-p}\right\}$ pozostałe pierwiastki są co do modułu większe od liczby N wyznaczonej równaniem (4). Oznaczamy $z = R_1 e^{i\vartheta}$ $(R_1 > S,\ r < R_1 \leqslant N)$ i wyznaczamy liczbę R_1 tak, ażeby był spełniony warunek

$$\max \frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg \frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}\right\} \leqslant 0. \tag{10}$$

$$\max \frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg \frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}\right\} \leqslant \frac{pR_1}{R_1-r}+\frac{(q-p)R_1}{R_1+N}-\frac{SR_1}{R_1+S}$$

Nierówność (10) jest wobec tego spełniona, gdy

$$\frac{pR_1}{R_1-r}+\frac{(q-p)R_1}{R_1+N}-\frac{sR_1}{R_1+S} \leqslant 0 \tag{11}$$

Pamiętając o warunku $R_1 \leqslant N$ podstawiamy $R_1 = \lambda N$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ i po przekształceniu otrzymujemy

$$\alpha(\lambda)N^2 - \beta(\lambda)N + \gamma \geqslant 0,$$

gdzie: $\alpha(\lambda) = (s-q)\lambda^2 + (s-p)\lambda$

$\beta(\lambda) = [(s-q+p)r + qS]\lambda + sr + pS,$

$\gamma = (q-p)rS.$

Współczynniki $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, γ są dodatnie dla $0 < \lambda \leqslant 1$. Wobec tego możemy przyjąć

$$N = \frac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \frac{[(s-q+p)r+qS]\lambda+rs+pS}{(s-q)\lambda^2+(s-p)\lambda}$$

W celu uzyskania możliwie najlepszego wyniku końcowego obieramy λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ tak, ażeby N było możliwie najmniejsze. Wtym celu przyjmujemy $\lambda = 1$. Przy tak obranej liczbie λ

$$N = R_1 = \frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p} \tag{12}$$

Podstawiamy otrzymaną liczbę N do równania (4) i wyznaczamy

$$(13) \qquad \frac{1}{m} = \left[\frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}+Q\right]^{q-p}\left(\frac{q}{p}\right)^{p}$$

Z powyższego wynika, że skoro z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_1$, to argument wyrażenia $\frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}$ monotonicznie maleje. Stąd punkt odpowiadający temu wyrażeniu opisuje początek układu $s-p$ razy w kierunku ujemnym. Przy tych samych warunkach wyrażenie to opisuje dowolny punkt $-b$ conajwyżej $s-p$ razy w kierunku ujemnym.

Przechodząc do wielomianu postaci (9) stwierdzamy, że skoro z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_1$,

$$R_1 = \max\left\{S, \frac{(2s-q+p)r+(q+p)S}{2s-q-p}\right\},$$

to $\arg S(z)$ rośnie do wartości $2\pi s$, równocześnie $\arg\left\{\frac{P(z)+aQ(z)}{S(z)}+b\right\}$ maleje conajwyżej do wartości $2\pi(s-p)$. Zatem iloczyn tych wyrażeń rośnie conajmniej do wartości $2\pi p$. W ten sposób wykazaliśmy, że w kole $|z| \leqslant R_1$ znajduje się conajmniej p pierwiastków wielomianu $P(z)+aQ(z)+bS(z)$ dla $|a| \leqslant m$.

Przypadek II. W tym przypadku wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z)+aQ(z)$ są co do modułu mniejsze od liczby M, otrzymanej przez podstawienie wyznaczonej równaniem (13) liczby $\frac{1}{m}$ do równania (1).

Zakładamy, że z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_2$ ($R_2 > S$, $R_2 > M$). Liczbę R_2 wyznaczamy podobnie jak w przypadku I i otrzymujemy $R_2 = \max\left\{S, \frac{sM+qS}{s-q}\right\}$.

W kole $|z| \leqslant R_2$ znajduje się dla $|a| \geqslant m$ conajmniej q pierwiastków wielomianu $P(z)+aQ(z)+bS(z)$.

Łącząc wyniki otrzymane w przypadkach I i II otrzymujemy, że w kole $|z| \leqslant R$, $R = \max\left\{S, \frac{sM+qS}{s-q}\right\}$ znajduje się conajmniej p pierwiastków wielomianu $P(z)+aQ(z)+bS(z)$ przy dowolnych współczynnikach a i b.

Rozpatrzymy przypadek szczególny wielomianu $P(z) + aQ(z) + bS(z)$.

Twierdzenie II. *Jeżeli P i $\frac{a}{b}$ są liczbami rzeczywistymi oraz p liczbą naturalną, to wielomian*

$$(z + P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2} \tag{14}$$

posiada co najmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby

$$R = \frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2} |P|,$$

przy czym liczba ta jest granicą dokładną.

Dowód. Jeżeli wielomian $(z+1)^p + az^q + bz^s$ $(p < q < s)$ posiada co najmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby R_1, niezależnej od współczynników a i b, to okazuje się, że wielomian $(z+P)^p + az^q + bz^s$ posiada co najmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby $R = R_1|P|$.

Wystarczy wobec tego wyznaczyć liczbę R_1, która jest granicą modułu p pierwiastków wielomianu $(z+1)^p + az^q + bz^s$.

Rozróżniamy trzy przypadki w zależności od modułu M liczby $\frac{a}{b}$ $\left(\left|\frac{a}{b}\right| = M\right)$:

I. $\left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q} \leqslant M$,

gdzie: $R_1 = \frac{-s\lambda^{s-q} + q}{-(s-p)\lambda^{s-q} + (q-p)}$,

$$\lambda^{s-q} = \frac{p(s-q)(s-q-1) + 2q(s-p) - (s-q)\sqrt{p^2(s-q-1)^2 + 4pq(s-p)}}{2s(s-p)}$$

q i s są liczbami naturalnymi $(p < q < s)$, $\frac{a}{b}$ może być liczbą zespoloną.

II. $R_1^{s-q} < M < \left(\frac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$, gdzie $q = p+1$, $s = p+2$, $\frac{a}{b}$ jest liczbą rzeczywistą.

III. $M \leqslant R_1^{s-q}$, gdzie q i s są liczbami naturalnymi $(p < q < s)$, $\frac{a}{b}$ może być liczbą zespoloną.

Przypadek I. Wielomian $(z+1)^p + az^q + bz^s$ piszemy w postaci

$$(15) \qquad z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)\left[\frac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}+b\right].$$

Oznaczamy $f(z) \equiv \dfrac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}$, $\dfrac{a}{b} = Me^{i\alpha}$, $z = R_1 e^{i\vartheta}$. Liczbę R_1

$(1 < R_1 < \sqrt[s-q]{M})$ wyznaczamy tak, że skoro z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_1$, to $\arg f(z)$ monotonicznie maleje, tzn. $\max \dfrac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} \leqslant 0$

Otrzymujemy wobec tego nierówność

$$\frac{pR_1}{R_1-1} - q + \frac{(s-q)\,R_1^{s-q}}{M - R_1^{s-q}} \leqslant 0$$

Pamiętając o warunku $R_1^{s-q} < M$ podstawiamy $R_1 = \lambda \sqrt[s-q]{M}$ $(0 < \lambda < 1)$ i otrzymujemy

$$\sqrt[s-q]{M} \geqslant \frac{-s\lambda^{s-q}+q}{-(s-p)\,\lambda^{s-q+1}+(q-p)\,\lambda}, \text{ dla } 0 < \lambda^{s-q} < \frac{q-p}{s-p}.$$

W nierówności tej zastępujemy znak $\geqslant$ przez $=$ i wyznaczamy λ tak, aby $\sqrt[s-q]{M}$ było możliwie najmniejsze. Minimum wielkości $\sqrt[s-q]{M}$ otrzymamy dla

$$(16) \qquad \lambda^{s-q} = \frac{p\,(s-q)\,(s-q-1) + 2q\,(s-p) - (s-q)\sqrt{p^2(s-q-1)^2 + 4pq\,(s-p)}}{2s\,(s-p)}$$

Wracając przez podstawienie $R_1 = \lambda \sqrt[s-q]{M}$ do wielkości R_1 otrzymujemy po uwzględnieniu równania (19)

$$(17) \qquad R_1 = \frac{\sqrt{p^2(s-q-1)^2 + 4pq\,(s-p)} - p\,(s-q-1)}{\sqrt{p^2(s-q-1)^2 + 4pq\,(s-p)} - p\,(s-q+1)} \cdot \frac{s}{s-p}$$

Zatem, jeżeli $M \geqslant \left(\dfrac{R_1}{\lambda}\right)^{s-q}$ i z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_1$, to $\dfrac{d}{d\vartheta}\{\arg f(z)\} \leqslant 0$ i wyrażenie $f(z)$ opisuje dowolny punkt $-b$ co najmniej $q-p$ razy w kierunku ujemnym. Równocześnie $z^q\left(z^{s-q}+\dfrac{a}{b}\right)$ opisuje początek układu q razy w kierunku dodatnim.

Stąd wyrażenie (15) opisuje początek układu conajmniej p razy w kierunku dodatnim. Wielomian $(z+1)^p + az^q + bz^s$ posiada dla $\left|\frac{a}{b}\right| \geqslant \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{s-q}$ conajmniej p pierwiastków w kole $|z| \leqslant R_1$.

Przypadek II. Podstawiamy $q = p+1$, $s = p+2$ w równaniach (16) i (17) i otrzymujemy wielkości λ i R_1 dla rozpatrywanego przypadku

$$\lambda = \frac{2(p+1) - \sqrt{2p(p+1)}}{2(p+2)} \tag{16'}$$

$$R_1 = \frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2}, \text{ stąd} \tag{17'}$$

$$\frac{R_1}{\lambda} = 3p + 2 + 2\sqrt{2p(p+1)} \tag{18}$$

W tym przypadku $\arg f(z)$ nie maleje monotonicznie, skoro z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_1$.

Dowód opieramy na dokładnym badaniu krzywej zakreślonej przez $f(z) = \dfrac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q} + \dfrac{a}{b}\right)}$, które przeprowadzamy w czterech następujących przypadkach:

1. $p = 1, \quad \frac{a}{b} = M$
2. $p = 1, \quad \frac{a}{b} = -M$
3. $p \geqslant 2, \quad \frac{a}{b} = M$
4. $p \geqslant 2, \quad \frac{a}{b} = -M$

W tym celu wyznaczamy extrema modułu $f(z)$, które otrzymujemy z rozwiązań równania $I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = 0$. Następnie określamy rodzaj extremum, badając znak $\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}$.

Jeżeli $|f(z)|$ osiąga maximum, to $I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = 0$ i zmienia znak — na $+$, czyli $\frac{d}{d\vartheta} I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$.

Jeżeli $|f(z)|$ osiąga minimum, to $I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=0$ i zmienia znak $+$ na $-$ czyli $\frac{d}{d\vartheta}I\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}<0$

Ponadto określamy zmienność argumentu wyrażenia $f(z)$ korzystając z zależności $\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\}=R\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}$

Wykazujemy, że skoro z opisuje okrąg $|z|=R_1$ w kierunku dodatnim, to $f(z)$ opisuje początek układu dokładnie jeden raz w kierunku ujemnym. Równocześnie wyrażenie $f(z)$ opisuje dowolny punkt $-b$ conajwyżej jeden raz w kierunku ujemnym, a wyrażenie $z^{p+1}\left(z+\frac{a}{b}\right)\left[\frac{(z+1)^p}{z^{p+1}+\frac{a}{b}}+b\right]$ opisuje początek układu conajmniej p razy w kierunku dodatnim. Tymsamym wielomian $(z+1)^p+az^{p+1}+bz^{p+2}$ posiada conajmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby $R_1=\frac{2(p+1)+\sqrt{2p(p+1)}}{2}$, gdy $R_1<\left|\frac{a}{b}\right|<\frac{R_1}{\lambda}$

Przypadek III. $\left|\frac{a}{b}\right|\leqslant R_1^{s-q}$, $f(z)\equiv\frac{(z+1)^p}{z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)}$

W kole $|z|\leqslant R_1$ znajduje się dokładnie p pierwiastków licznika i dokładnie s pierwiastków mianownika wyrażenia $f(z)$. Zatem, skoro z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z|=R_1$, to $f(z)$ opisuje początek układu $s-p$ razy (dla $M=R_1^{s-q}$ opisuje $q-p$ razy) w kierunku ujemnym. Wykażemy, że w tym przypadku $\arg f(z)$ monotonicznie maleje.

$$\max\frac{d}{d\vartheta}\left\{\arg f(z)\right\}=\frac{pR_1}{R_1-1}-q-\frac{(s-q)R_1^{s-q}}{R_1^{s-q}+M}=$$
$$=-\frac{1}{(R_1-1)(R_1^{s-q}+M)}\left[(s-p)R_1^{s-q}\left(R_1-\frac{s}{s-p}\right)+\right.$$
$$\left.+(q-p)M\left(R_1-\frac{q}{q-p}\right)\right]$$

Wyrażenie to jest ujemne, ponieważ $R_1>\frac{s}{s-p}$ i $R_1>\frac{q}{q-p}$.

Zatem $f(z)$ opisuje początek układu $s-p$ (lub $q-p$) razy w kierunku ujemnym. Równocześnie wyrażenie $z^q\left(z^{s-q}+\frac{a}{b}\right)$ opisuje początek układu s(lub q dla $M = R_1^{s-q}$) razy w kierunku dodatnim. Stąd wyrażenie(15) opisuje początek układu conajmniej p razy w kierunku dodatnim. Zatem wielomian $(z+1)^p + az^q + bz^s$ posiada dla $\left|\frac{a}{b}\right| \leqslant R_1^{s-q}$ co najmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby R_1 określonej równaniem (17).

Wykazujemy następnie, że liczba

$$R = \frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2} |P|$$

jest granicą dokładną modułu p pierwiastków równania $(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2} = 0$. W tym celu ułożymy równanie, dla którego pierwiastek o module największym spośród p pierwiastków równania jest pierwiastkiem potrójnym.

Różniczkujemy powyższe równanie dwukrotnie względem z i eliminujemy a i b. Rozwiązując następnie otrzymane równanie otrzymujemy liczbę $z_1 = -\frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2} P$, która jest identyczna co do modułu z liczbą R.

Rozwiązując równanie $(z+P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2} = 0$ i jego pochodną względem a i b oraz podstawiając $z = z_1$ otrzymamy współczynniki a i b, przy których liczba R jest granicą dokładną.

Twierdzenie III. *Jeżeli $P(z)$, $Q(z)$, $S(z)$ i $T(z)$ są wielomianami stopnia p, q, s i t, których wszystkie pierwiastki nie przekraczają co do modułu odpowiednio liczb P, Q, S i T, przy czym $p < q < s < t$, to wielomian*

(19) $$P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$$

posiada co najmniej p pierwiastków nie przekraczających co do modułu liczby

$$R = \frac{qM_2 + tM_1}{t-q},$$

$$\text{gdzie: } M_1 = \frac{N_1 + Q}{\sqrt[q-p]{\left(\frac{p}{q}\right)^p}} + \frac{qQ + pP}{q-p},$$

$$N_1 = \frac{(p+q)M_2 + (2t-p+p)r}{2t-q-p} < \frac{2(t+p)M_2}{2t-q-p}$$

$$M_2 = \sqrt[t-s]{\frac{1}{n} + \frac{tT+sS}{t-s}}$$

$$\sqrt[t-s]{\frac{1}{n}} = \frac{N_2 + T}{\sqrt[t-s]{\left(\frac{s}{t}\right)^s}}$$

$$r = \max \left\{ Q,\ T,\ \frac{pQ+qP}{q-p},\ \frac{sT+tS}{t-s} \right\},$$

$$N_2 = \max \left\{ k_0 r \left| 1 + 2(k_0^2 - 1) \frac{t-s}{q-p} \right|,\ l_0 M_1' + \right.$$

$$\left. + \frac{(t-s)(l_0^2 M_1'^2 - r^2)(l_0 - 1) M_1'}{(s+p) r M_1' + (q-p) r^2} \right\}$$

$$l_0 = \frac{(s-p) M_1' + (s+p) r}{(s-q) M_1'} < \frac{2s}{s-q}$$

$$k_0 = 2 \frac{s+p}{2s-q-p}$$

$$M_1' = \frac{k_0 r + Q}{\sqrt[q-p]{\left(\frac{p}{q}\right)^p}} + \frac{qQ + pP}{q-p}$$

Dowód. Wielomian (19) napiszemy w postaci

$$\left| S(z) + \frac{c}{b} T(z) \right| \cdot \left| \frac{P(z) + aQ(z)}{S(z) + \frac{c}{b} T(z)} + b \right| \tag{19'}$$

Rozróżniamy cztery przypadki w zależności od modułu liczb a i $\frac{c}{b}$:

I. $|a| \leqslant m_1$, $\left|\frac{c}{b}\right| \leqslant n$ gdzie: $\sqrt[q-p]{\frac{1}{m_1}} = \frac{k_0 r + Q}{\sqrt[q-p]{\left(\frac{p}{q}\right)^p}}$,

II. $|a| \geqslant m_1$, $\left|\frac{c}{b}\right| \leqslant n$ $\sqrt[q-p]{\frac{1}{m}} = \frac{N_1 + Q}{\sqrt[q-p]{\left(\frac{p}{q}\right)^p}}$

III. $|a| \leqslant m$, $\left|\frac{c}{b}\right| \geqslant n$

IV. $|a| \geqslant m$, $\left|\frac{c}{b}\right| \geqslant n$

Przypadek I. Wielomian $P(z) + aQ(z)$ posiada p pierwiastków w kole $|z| \leqslant r_1$, $r_1 = \max \left\{ Q, \frac{pQ + qP}{q - p} \right\}$, pozostałe pierwiastki znajdują się poza kołem $|z| \leqslant N_1'$, dla m_1 dostatecznie małego. Liczbę N_1' (m_1) określa lemat 2.

Wielomian $S(z) + \frac{c}{b} T(z)$ posiada s pierwiastków w kole $|z| \leqslant r_2$

$r_2 = \max \left\{ S, \frac{sT + tS}{T - s} \right\}$, pozostałe pierwiastki znajdują się poza kołem $|z| \leqslant N_2$, dla n dostatecznie małego. Liczbę $N_2(n)$ określa wzór (4), w którym m zastąpiono przez n.

Oznaczamy $z = R_1 e^{i\vartheta}$ i zakładamy, że z opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_1$, przy czym $\max \{r_1, r_2\} < R_1 \leqslant N_1' < N_2$. Liczbę R_1 wyznaczymy tak, ażeby $\arg f(z)$ monotonicznie malał.

$$f(z) = \frac{P(z) + aQ(z)}{S(z) + \frac{c}{b} T(z)}$$

W tym przypadku wyznaczamy R_1, N'_1 i warunek dla N_2 tak, ażeby $\arg f(z)$ monotonicznie malał. Poza tym rozumujemy podobnie jak w poprzednich twierdzeniach.

Przypadek II. Korzystając z lematu 2. obliczamy m_1 dla otrzymanej wartości N'_1, a następnie na podstawie lematu 1, obliczamy M_1'.

Zakładamy, że $z = R_2 e^{i\vartheta}$ opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_2$, przy czym $r < N'_1 < M'_1 < R_2 < N_2$. Liczbę R_2 wyznaczamy tak, ażeby $\arg f(z)$ monotonicznie malał. Stąd otrzymujemy dodatkowy warunek na N_2, który razem z poprzednim określa liczbę N_2.

Przypadek III. Korzystając z lematu 2. obliczamy n dla otrzymanej wartości N_2. Dla otrzymanego n obliczamy M_2 na podstawie lematu 1.

Zakładamy, że $z = R_3 e^{i\vartheta}$ opisuje w kierunku dodatnim okrąg $|z| = R_3$, przy czym $r < N_2 < M_2 < R_3 \leqslant N_1$. Liczbę R_3 wyznaczamy tak, ażeby $f(z)$ monotonicznie malał. Stąd otrzymamy liczbę N_1.

Przypadek IV. Dla otrzymanej liczby N_1 obliczamy m na podstawie lematu 2. Dla otrzymanej liczby m obliczamy na podstawie lematu 1. liczbę M_1.

W kole $|z| \leqslant M_1$ znajdują się wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) + aQ(z)$, a w kole $|z| \leqslant M_2$ znajdują się wszystkie pierwiastki wielomianu $S(z) + \frac{c}{b}T(z)$. Na podstawie twierdzenia *M.* Biernackiego w kole $|z| = \frac{tM_1 + qM_2}{t - q}$ znajduje się w rozważanym przypadku co najmniej q pierwiastków wielomianu $P(z) + aQ(z) + bS(z) + cT(z)$.

Okazuje się również, że otrzymana liczba jest granicą górną modułu *p* pierwiastków powyższego wielomianu przy dowolnych współczynnikach *a*, *b* i *c*.

Резюме

Работа содержит некоторые решения проблемы нахождения предела модуля некоторого чисда корней полинома типа

$$a_1 P_1(z) + \ldots\ldots + a_k P_k(z),$$

когда известными являются только степени полиномов $P_1(z)\ldots P_k(z)$ и области $R_1 \ldots\ldots R_k$ содержащие соответственно все их корни. Вопрос этот поставил М. Бернацкий и получил для полинома с двумя членами следующую теорему: „Если все корни полинома $P(z)$ степени p содержатся в круге $|z| \leqslant P$ и все корни полинома $Q(z)$ степени $q\,(q > p)$ содержатся в круге $|z| \leqslant Q$, то по меньшей мере p корней полинома $P(z) + aQ(z)$ содержатся в круге

$$|z| \leqslant \max \left\{ Q, \frac{pQ + qP}{q - p} \right\}".$$

Опираясь на применяемый М. Бернацким принцип изменчивости аргумента, были изучены полиномы $P(z) + aQ(z) + bS(z)$ и $P(z) + aP(z) + bS(z) + cT(z)$, где $P(z), Q(z), S(z)$ и $T(z)$ являются полиномами степени p, q, s и $t\,(p < q < s < t)$, которых все корни содержатся соответственно в кругах $|z| \leqslant P, |z| \leqslant Q, |z| \leqslant S$ и $|z| \leqslant T$.

Для этих полиномов была доказана ограниченность модуля p корней независимо от коэффициентов a, b и c. Как честный случай полинома содержащего три члены был рассмотрен полином

$$(z + P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2}$$

в котором P и $\frac{a}{b}$ являются вещественными числами. Доказано, что полином этот имеет по меньшей мере p корней, модуль которых не больше числа $\frac{2(p+1) + \sqrt{2p(p+1)}}{2}$, причём этого числа нельзя заменить числом меньшим.