ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. V, 1 SECTIO A 1951

Z Zakładu Matematyki I. Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

M. KRZYŻAŃSKI

Sur le second problème aux limites pour les équations linéaires aux derivées partielles du type elliptique et parabolique dans un domaine non borné.

O drugim zagadnieniu brzegowym dla równań o pochodnych cząstkowych typu eliptycznego i parabolicznego w obszarze nieograniczonym.

О второй граничной задаче для линейных уравнений в частных производных элиптического типа в неограниченной области.

M. L. Amerio a démontré un théorème d'existence d'une solution du problème de Dirichlet pour l'équation linéaire aux dérivées partielles du type elliptique, dans un domaine non borné, en supposant la résolubilité du problème analogue dans une suite de domaines bornés et en effectuant un passage à la limite [1]. D'une manière indépendante, j'ai effectué [2] un passage à la limite analogue, qui permet d'établir l'existence d'une solution de ce problème et son unicité dans les hypothèses différentes de ceux de M. Amerio.

Dans le présent travail je vais exposer l'extension de cette méthode au second problème aux limites relatif à une équation linéaire du type elliptique et ensuite à une équation normale du type parabolique.

---

[1]) L. Amerio. *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, nei domini illimitati.* Rendiconti della Reale Accad. d'Italia. Ser. VII, vol. IV, fasc. 8 (1943) p.p. 1—12.

[2]) M. Krzyżański. *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné.* Atti dell' Acad. Nazionale dei Lincei. Ser. VIII, vol. IV, fasc. 4, (1948), p.p. 408—416. Pour abréger, le travail cité sera appelé dans la suite „P. D.".

Équation du type elliptique.

1. Soit

$$(1) \qquad E[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

une équation linéaire du type elliptique. Les coefficients a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots m)$, b_j $(j = 1, 2, \ldots m)$, c et la fonction f sont supposés continus dans un domaine non borné D, la forme $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ y est supposée définie positive.

Dans la suite, la frontière d'un domaine ouvert quelconque Δ sera désignée par $F\Delta$ et sa fermeture $\Delta + F\Delta$ par $\bar{\Delta}$.

À chaque point P de la frontière FD du domaine D on fait correspondre une demi-droite $l(P)$ pénétrant à l'intérieur de ce domaine (c'est à dire, telle que le point P est l'extrémité d'un segment de $l(P)$, appartenant à la fermeture $\bar{D}$ du domaine D) et d'ailleurs arbitraire. On suppose qu'en chaque point de FD il existe une (au moins) telle demi-droite.

Soient ensuite $\alpha(P)$, $\beta(P)$ et $g(P)$ trois fonctions déterminées sur FD. $u(P)$ étant une fonction birégulière[3]) dans la fermeture $\bar{D}$ du domaine D, on lui fait correspondre l'expression

$$L[u] = \alpha(P) \frac{du}{dl} + \beta(P)\, u .$$

On pose le problème suivant:

On cherche une fonction $u(P)$, birégulière dans $\bar{D}$, satisfaisant à l'équation (1) dans D et à la condition aux limites

$$(2) \qquad L[u] = \alpha(P) \frac{du}{dl} + \beta(P)\, u = g(P)$$

sur FD. Nous allons appeler un tel problème *le second problème aux limites.*

Je démontre d'abord des théorèmes généraux d'existence et d'unicité d'une solution de ce problème et je les applique ensuite à un cas particulier, où le domaine D est une couche illimitée.

2. Je commence par exposer l'idée du théorème général d'existence. Considérons un domaine borné Δ, détaché du domaine D par

---

[3]) Une fonction est dite régulière dans un ensemble E, si elle est continue dans E et de classe $C^{(2)}$ (admettant les dérivées de 2-me ordre continues) aux points intérieurs de E. Elle y est dite birégulière, lorsqu'elle est de classe $C^{(1)}$ dans E et de classe $C^{(2)}$ aux points intérieurs de E.

une hyper-surface Σ. Supposons que la frontière $F\Delta$ de ce domaine contienne une partie σ, située sur Σ, la partie restante étant située sur FD. La multiplicité μ d'intersection de Σ et de FD est supposée comprise dans σ; on désignera par S la somme $(F\Delta - \sigma) + \mu$. Soit ensuite $\Psi(P)$ une fonction continue sur σ. On appelera *le problème* (M) un problème qui consiste en la recherche d'une fonction $u(P)$ régulière dans $\bar{\Delta}$ et de classe $C^{(1)}$ sur S, satisfaisant à l'équation (1) dans Δ, à la condition (2) sur S et à la condition

$$u(P) = \Psi(P) \qquad \text{sur } \sigma.$$

On suppose, s'il y a lieu, que la fonction $\Psi(P)$ satisfait aux conditions de compatibilité aux points de μ toutes les fois que $\alpha(P)$ s'annule ou bien que la direction l soit tangente à Σ. Dans le premier cas cette condition exprime que

$$\beta(P) \cdot \Psi(P) = g(P);$$

dans le second cas $\Psi(P)$ est supposée de classe $C^{(1)}$ aux points correspondants de μ et la condition de compatibilité s'écrit

$$L[\Psi] = g(P).$$

Nous dirons que le domaine D est *régulier* par rapport au problème (M), défini ci — dessus, lorsque ce problème y est résoluble toutes les fois que $\Psi(P)$ est continue sur σ (et de classe $C^{(1)}$ en ceux points de μ, où la direction l est tangente à Σ), $g(P)$ est continue sur S et que ces fonctions satisfont aux conditions de compatibilité en ceux points de μ, où $\alpha = 0$, ou bien l est tangente à Σ.

Supposons qu'on ait construit une suite $\{D_n\}$ de domaines réguliers par rapport au problème (M), détachés du domaine D par une suite de surfaces Σ_n, dont la distance à l'origine tend vers l'infini avec n. On désignera encore par σ_n, S_n et μ_n les multiplicités analogues aux multiplicités σ, S et μ, relatifs au domaine Δ.

Soit $\Phi(P)$ une fonction de classe $C^{(1)}$ dans D, telle que

$$L[\Phi] = g(P) \qquad \text{sur } FD \tag{3}$$

et d'ailleurs arbitraire. À chaque D_n on fait correspondre une solution $u_n(P)$ du problème (M) avec les conditions aux limites

$$L[u_n] = g(P) \qquad \text{sur } S \quad \text{et} \quad u_n(P) = \Phi(P) \qquad \text{sur } \sigma_n. \tag{4}$$

On va démontrer que, certaines hypothèses étant admises, la suite $\{u_n(P)\}$ converge dans D vers une limite $u(P)$ qui y constitue une solution du second problème aux limites pour l'équation (1) avec la condition aux limites (2) sur FD. Cette limite est indépendante du choix de la fonction Φ satisfaisant à la condition (3) sur FD.

3. On établira d'abord une condition suffisante d'unicité de la solution du problème (M). À cet effet on démontrera le lemme suivant.

L e m m e I. *Soit Δ un domaine borné, détaché de D par une surface Σ* (voir n-ro 2). *On suppose que $c(P) \leqslant 0$ dans Δ et $\alpha(P) \geqslant 0$, $\beta(P) < 0$ sur S. Soit $u(P)$ une fonction régulière dans Δ et de classe $C^{(1)}$ sur S. Si l'on a $E[u] \geqslant 0$ dans Δ et $L[u] \geqslant 0$ sur S (resp. $E[u] \leqslant 0$ dans Δ et $L[u] \leqslant 0$ sur S), alors $u(P)$ atteint sur σ sa borne supérieure dans Δ, si elle est positive (resp. sa borne inférieure dans Δ, si elle est négative)* [4]).

D é m o n s t r a t i o n. Comme $c(P) \leqslant 0$ dans Δ, $u(P)$ atteint sur $F\Delta$ sa borne supérieure M dans Δ, si elle est positive [5]). Il suffit donc de démontrer que cette borne M ne peut pas être atteinte sur S.

Or soit P_0 un point de S tel que $u(P_0) = M > 0$. Supposons d'abord que $\alpha(P_0) > 0$. Comme $\beta(P_0) < 0$, $u(P_0) > 0$ et $L[u] \geqslant 0$' on a $\left.\dfrac{du}{dl}\right|_{P_0} > 0$. Il en résulte qu'il existe un point $P_1 \in \Delta$ tel que $u(P_1) > u(P_0) = M$; or cette inégalité est contraire à la définition de la borne supérieure M. Soit ensuite $\alpha(P_0) = 0$. Alors

$$L\,[u]\,|_{P_0} = \beta\,(P_0)\; u\,(P_0) < 0,$$

contrairement à l'hypothèse que $L[u] \geqslant 0$ sur S. Il en résulte que la borne supérieure M de $u(P)$ ne peut pas être atteinte sur S.

4. Nous passons maintenant à la démonstration d'un théorème d'existence qui correspond au théorème I du travail P. D.; la démonstration sera analogue.

Théorème I. *On suppose que*

1^0 *il existe une fonction $H(P, k)$ du point P et du paramètre k, déterminée pour $P \in \overline{D}$ et $0 < k < k_0$, birégulière dans D en tant que fonction de P, jouissant, en outre, des propriétés suivantes*

---

[4]) Le sujet de ce lemme est analogue à une propriété des solutions du second problème aux limites, qui résulte d'un théorème de M. P i c o n e. La démonstration est à peu près identique. Voir M. P i c o n e. *Nuove formole di maggiorazioni per gl'integrali delle equazioni a derivate parziali del second'ordine ellittico — paraboliche*. Rendic R. Acc. Lincei XVII (1938).

[5]) Voir p. ex. C. M i r a n d a. *Sulle proprietà di minimo e di massimo...* Atti Accad. naz. Lincei VIII, ser. 10 (1951), 117—120.

a) *$H(P,k) > 0$ dans $\overline{D}$ et pour $0 < k < k_0$;*

b) *à chaque valeur positive de $k < k_0$ correspond un nombre positif $\delta(k)$ tel que*

$$(b_1) \quad E\,[H] \leqslant -\delta\,(k)\,H(P,\,k) \quad \text{dans } D, \text{ et}$$

$$(b_2) \quad L\,[H] \leqslant -\delta\,(k)\,H(P,\,k) \quad \text{sur } FD;$$

c) *k_1 et k_2 étant deux nombres positifs, tels que $k_1 < k_2 < k_0$, on a*

$$\lim_{\overline{OP}\to\infty} \frac{H\,(P,k_1)}{H\,(P,k_2)} = 0\,,$$

$\overline{OP}$ désignant la distance de P à l'origine des coordonnées 0;

2⁰ *$\Phi(P)$ est une fonction de classe $C^{(1)}$ dans $\overline{D}$, satisfaisant à la condition (3) sur FD;*

3⁰ *il existe deux nombres positifs M et $\overline{k} < k_0$ tels que*

a) $|f\,(P)| \leqslant M \cdot H\,(P,\,\overline{k})$ dans D,

b) $|g\,(P)| \leqslant M \cdot H\,(P,\,\overline{k})$ sur FD,

c) $|\Phi(P)| \leqslant M \cdot H\,(P,\,\overline{k})$ dans $\overline{D}$.

Alors $\{D_n\}$ étant une suite de domaines détachés de D par les surfaces Σ_n (voir n-ro 2), *régulières par rapport au problème (M), la suite $\{u_n\}$ de solutions du problème (M) dans les domaines D_n, avec les conditions aux limites (4) sur FD_n, converge dans $\overline{D}$ vers une limite $u(P)$.*

Cette limite $u(P)$ constitue une solution du second problème aux limites pour l'équation (1) dans D avec les conditions aux limites (2) sur FD.

D é m o n s t r a t i o n On commence par démontrer la convergence de la suite $\{u_n\}$. Soit

$$v_n(P) = u_n(P) : H\,(P,\,\overline{k}).$$

Cette fonction satisfait dans D_n à l'équation

$$E^*[v] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + c^*\,v = f^*, \tag{5}$$

$$\text{où } c^* = \frac{1}{H}\,E\,[H] \leqslant -\,\delta(\overline{k}) \text{ (en vertu de } 1^0 b_1)$$

et $f^*(P) = f(P) : H\,(P,\,\overline{k})$. On a $|f^*(P)| \leqslant M$ (en vertu de 3^0 a). La fonction v_n satisfait sur S_n à la condition aux limites

$$L^*\,[v_n] = \alpha\,\frac{dv_n}{dl} + \beta^*\,v_n = g^*(P)\,, \tag{6}$$

avec $\beta^*(P) = \frac{1}{H} L[H] \leqslant -\delta(\bar{k})$ (en vertu de $1^0 b_2$) et $g^*(P) =$
$= g(P) : H(P, \bar{k})$; on a (en vertu de 3^0b) $|g^*(P)| \leqslant M$ sur S_n.

Posons

$$z_n^{(1)} = v_n - M\left[1 + \frac{1}{\delta(\bar{k})}\right], \quad z_n^{(2)} = v_n + M\left[1 + \frac{1}{\delta(\bar{k})}\right] \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

la fonction $\delta(k)$ étant la même qui figure dans l'hypothèse 1^0b. Les fonctions $z_n^{(r)}$ $(r = 1,2)$ satisfont dans D_n aux équations suivantes

$$E^*[z_n^{(r)}] = f^* + (-1)^r M\left[1 + \frac{1}{\delta(\bar{k})}\right] c^*$$

et à la condition aux limites

$$L^*[z_n^{(r)}] = g^* + (-1)^r M\left[1 + \frac{1}{\delta(\bar{k})}\right] \beta^*$$

sur S_n. Comme $c^* \leqslant -\delta(\bar{k})$ dans D_n et $\beta^* \leqslant -\delta(\bar{k})$ sur S_n $(n = 1, 2 \ldots)$, on a

$$E^*[z_n^{(1)}] \geqslant M\delta(\bar{k}), \quad E^*[z_n^{(2)}] \leqslant -M\delta(\bar{k}) \quad \text{dans } D_n,$$
$$L^*[z_n^{(1)}] \geqslant M\delta(\bar{k}), \quad L^*[z_n^{(2)}] \leqslant -M\delta(\bar{k}) \quad \text{sur } S_n.$$

Or $|v_n(P)| \leqslant M$ sur σ_n (en vertu de 3^0c), en suite de quoi

$$z_n^{(1)} \leqslant -M\delta^{-1}(\bar{k}) < 0 \text{ et } z_n^{(2)} \geqslant M\delta^{-1}(\bar{k}) > 0$$

sur σ_n. Il résulte du lemme I que l'on a $z_n^{(1)} \leqslant 0$ et $z_n^{(2)} \geqslant 0$ dans D_n et que par suite

$$|v_n| \leqslant M[1 + \delta^{-1}(\bar{k})] \quad \text{dans } D_n. \tag{7}$$

Soit $p < q$; on a $|v_q| \leqslant M[1 + \delta^{-1}(\bar{k})]$ dans D_q et en particulier sur σ_p. La différence $v_p - v_q$ satisfait dans D_p à l'équation homogène

$$E^*[v] = 0 \tag{5'}$$

et sur S_p à la condition aux limites homogène

$$L^*[v] = 0. \tag{6'}$$

On a en outre

$$|v_p - v_q| \leqslant 2M[1 + \delta^{-1}(\bar{k})] \qquad \text{sur } \sigma_p.$$

Posons

$$w_{pq} = (u_p - u_q) : H(P, \bar{k} + k') = (v_p - v_q) \cdot \frac{H(P, \bar{k})}{H(P, \bar{k} + k')},$$

k' étant un nombre positif tel que $\bar{k} + k' < k_0$. D'après 1^0c et (7) on peut choisir p de sorte que l'on ait $|w_{pq}| < \varepsilon$ sur σ_p. La fonction w_{pq} satisfait dans D_p à une équation homogène analogue à (5'); elle satisfait sur S_p à une condition aux limites homogène, analogue à (6'). Il résulte du lemme I que w_{pq} atteint sur σ_p sa borne supérieure dans D_p, si elle est positive et sa borne inférieure dans D_p, si elle est négative. Comme $|w_{pq}| < \varepsilon$ sur σ_p, on a

$$w_{pq} < \varepsilon \qquad \text{partout dans } D_p.$$

Soit D_0 un domaine borné, contenu dans D. Pour p assez grand la fermeture $\bar{D}_0$ de D_0 est contenue dans $\bar{D}_p$. Désignons par $\Omega(k)$ la borne supérieure de $H(P, k)$ dans D_0. On a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon\, \Omega\, (\bar{k} + k') \qquad \text{pour } P \in D_0.$$

Il en résulte que la suite $\{u_n\}$ est uniformément convergente dans D_0. Or D_0 étant un domaine borné, contenu dans D et d'ailleurs arbitraire, cette suite converge partout dans $\bar{D}$ vers une fonction continue $u(P)$. Il est évident que cette limite $u(P)$ satisfait à la condition (2) sur FD. Il reste à démontrer qu'elle satisfait à l'équation (1) dans D.

Considérons un point $P_0 \in D$ et choisissons le nombre n_0 de sorte que D_{n_0} contienne P_0 à l'intérieur. Le domaine D_{n_0} est, par hypothèse, régulier par rapport au problème (M). Soit $U(P)$ une solution de (1) dans D_{n_0}, birégulière dans $\bar{D}_{n_0}$, satisfaisant à la condition (2) sur S_{n_0} et identique à $u(P)$ sur σ_{n_0}. Nous allons démontrer que $U(P)$ est identique à $u(P)$ dans D_{n_0}. En effet, pour $n > n_0$ assez élevé on a

(9) $$|U(P) - u_n(P)| < \eta \qquad \text{sur } \sigma_{n_0}$$

et

(10) $$|u(P) - u_n(P)| < \eta \qquad \text{dans } D_{n_0},$$

$\eta > 0$ étant petit à volonté. Posons $V(P) = U(P) : H(P, \bar{k})$; désignons par Ω_0 et ω_0 les bornes, supérieure et inférieure, de $H(P, \bar{k})$ dans D_{n_0}. En vertu de (9) on a

(11) $$|V(P) - v_n(P)| < \frac{\eta}{\omega_0} \qquad \text{sur } \sigma_{n_0}.$$

La différence $V - v_n$ satisfait dans D_{n_0} à l'équation homogène (5') et à la condition aux limites (6') sur S_{n_0}; en vertu du lemme I l'inégalité (9) subsiste partout dans D_{n_0}, par suite

$$|U(P) - u_n(P)| < \eta \frac{\Omega_0}{\omega_0} \qquad \text{pour } P \in D_{n_0}$$

d'où, en tenant compte de (10), on obtient l'inégalité

$$|U(P) - u(P)| < \eta \left(1 + \frac{\Omega_0}{\omega_0}\right) \qquad \text{pour } P \in D_{n_0}.$$

Or, η étant choisi arbitrairement, on a finalement $U(P) = u(P)$

dans D_{n_0} et en particulier au voisinage du point P_0. Il en résulte que $u(P)$ satisfait à l'équation (1) au point P_0. Or P_0 est un point arbitraire de D. Par suite $u(P)$ satisfait à l'équation (1) partous dans D.

Ainsi $u(P)$ est une solution du second problème aux limites pour l'équation (1) dans D avec la condition aux limites (2) sur FD.

5. Nous dirons que la fonction $u(P)$ continue dans le domaine D appartient à la classe (K), s'il existe deux nombres positifs M et $k < k_0$ tels que

$$|u(P)| \leqslant M \cdot H(P, k), \tag{12}$$

où $H(P, k)$ satisfait à l'hypothèse 1^0 du théorème I.

Théorème II. *Dans la classe (K) le second problème aux limites pour l'équation* (1) *dans le domaine D avec la condition aux limites* (2) *sur FD admet une solution au plus.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $u_1(P)$ et $u_2(P)$ deux solutions de ce problème, appartenant à la classe (K). Il est évident que la fonction $u(P) = u_1(P) - u_2(P)$ satisfait à l'équation homogène

$$E[u] = 0 \tag{1'}$$

dans D et à la condition aux limites homogène

$$L[u] = 0 \tag{2'}$$

sur FD. Les fonctions u_1 et u_2 appartenant à la classe (K), la fonction u y appartient aussi. On peut donc déterminer deux nombres M et k tels que u satisfasse à l'inégalité (12) dans D. Posons

$$v(P) = u(P) : H(P, k'),$$

où $k < k' < k_0$. On a, d'après l'hypothèse 1^0c du théorème I

$$|v(P)| < \varepsilon \qquad \text{sur } \sigma_n,$$

pour n assez grand, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. Or la fonction $v(P)$ satisfait dans D à une équation linéaire homogène du type elliptique, analoque à (5′) et aux conditions aux limites homogènes, analogues à (6′) sur FD. Il résulte du lemme I, appliqué au domaine D_n que $|v(P)| < \varepsilon$ dans D_n, Or, ε étant petit à volonté, il en résulte que $v(P) \equiv 0$ et par suite $u(P) \equiv 0$ dans D; donc $u_1(P) = u_2(P)$.

Corollaire. *La limite* $u(P) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(P)$ (voir le théorème I) *est indépendante du choix de la fonction $\Phi(P)$, pourvue que $\Phi(P)$ satisfasse aux hypothèses 2^0 et 3^0c du théorème I.*

6. Passons maintenant à un cas particulier, en admettant que le domaine D est une couche illimitée $\Gamma: -h < x_m < h$, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, \dots m-1)$.

On dit que la fonction $F(P)$, continue dans un domaine non borné D appartient à la classe $E_\alpha(k_0)$, lorsqu'il existe un nombre positif M tel que

$$|F(P)| < M\, e^{k_0\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

En admettant que les coefficients de (1) et la fonction β satisfont à certaines hypothèses supplémentaires, nous allons déterminer effectivement une fonction $H(P, k)$, de la classe $E_1(k_0)$ dans Γ (le nombre k_0 dépend des coefficients de l'équation (1)), satisfaisant aux hypothèses 1^0 du théorème I et ensuite une fonction $\Phi(P)$, satisfaisant aux hypothèses 2^0 et 3^{0}c.

Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) satisfont aux mêmes hypothèses qu'au n-ro 3 du travail P. D., dans le cas 2^0, à savoir qu'ils sont continus et *bornés dans* Γ *et que* $c \leqslant 0$, $b_m \geqslant 0$, $a_{mm} > A > 0$, A étant un nombre constant. On suppose, en outre, que la direction l est normale à $F\Gamma$ et que $\alpha(P) = 1$ sur $F\Gamma$.

On a alors

$$\frac{du}{dl} = \frac{du}{dn} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_m} & \text{pour } x_m = -h \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_m} & \text{pour } x_m = h \end{cases}$$

de sorte que, lorsqu' on pose

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} \beta(P) &= \begin{cases} -\beta_1(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = -h \\ -\beta_2(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = h, \end{cases} \\ g(P) &= \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = -h \\ -g_2(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = h, \end{cases} \end{aligned}$$

la condition aux limites (2) prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} - \beta_1 u = g_1 \qquad \text{pour } x_m = -h$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} + \beta_2 u = g_2 \qquad \text{pour } x_m = h.$$

Quant aux coefficients β_1 et β_2, on suppose l'existence d'un nombre positif β_0 tel que l'on ait $\beta_1 > \beta_0$, $\beta_2 > \beta_0$ pour $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots m-1)$.

On pose, comme au n-ro 3 du travail P. D.,

$$H(P, k) = \cos\frac{\pi x_m}{2L} \prod_{j=1}^{m-1} \operatorname{ch} k x_j,$$

où L est un nombre positif, supérieur à h, qui sera assujetti dans la suite à satisfaire à une condition supplémentaire. On a $H(P, k) > 0$ dans Γ et par suite H satisfait à l'hypothèse 1°a. du th. I. Il est évident qu'elle satisfait aussi à l'hypothèse 1°c. On choisit, de la même manière que dans le travail P. D. (n-ro 3, le cas 2°) le nombre k_0 et une fonction positive de k, désignée actuellement par $\bar{\delta}(k)$, de façon que l'on ait

$$\frac{1}{H} E[H] \leqslant -\bar{\delta}(k) < 0 \quad \text{pour } 0 < k < k_0. \tag{14}$$

En outre, la fonction H doit satisfaire à l'hypothèse 1°b$_2$, qui s'écrit actuellement sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x_m} - \beta_1 H \leqslant -\delta(k) \cdot H && \text{pour } x_m = -h \\ &\frac{\partial H}{\partial x_m} + \beta_2 H \geqslant \quad \delta(k) \cdot H && \text{pour } x_m = \quad h. \end{aligned} \tag{15}$$

La fonction $\delta(k)$ est, en général, différente de $\bar{\delta}(k)$; nous posons, notamment, $\delta(k) = \min \left[\bar{\delta}(k), \frac{\beta_0}{2}\right]$. Or, on a

$$\frac{\partial H}{\partial x_m} = -\frac{\pi}{2L} \operatorname{tg} \frac{\pi x_m}{2L} \cdot H,$$

donc, pour que H satisfasse aux inégalités (15), il suffit que l'on ait

$$\frac{\pi}{2L} \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2L} - \beta_0 < -\delta(k),$$

c'est à dire

$$\frac{\pi}{2L} \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2L} < \beta_0 - \delta(k). \tag{16}$$

D'après la définition de $\delta(k)$, le second membre de (16) est positif, par suite l'inégalité (16) peut être réealisée par un choix convenable de L. Or le nombre k_0 diminue lorsque L augmente (voir P. D.), il en résulte que le choix de L conforme à l'inégalité (16) entraine en général une diminution convenable du nombre k_0.

D'après (14) on a à fortiori

$$\frac{1}{H} E(H) < -\delta(k) \qquad \text{pour } 0 < k < k^0 \tag{14'}$$

et les inégalités (15) sont équivalentes à l'inégalité

(15′) $$\frac{1}{H} L[H] < -\delta(k) \qquad \text{pour } 0 < k < k_0,$$

de sorte que H satisfait à l'hypothèse 1⁰b.

Passons mantenant à la détermination de la fonction $\Phi(P)$, satisfaisant aux hypothèses 2^0 et 3^0c. Supposons que la fonction $f(P)$ et la fonction $g(P)$, définie d'après la formule (13), satisfassent aux hypothèses 3^0a et 3^0b du théorème I et que $\beta(P)$ soit bornée.

Posons

$$B(P) = \frac{1}{2h}[\beta_1(x_1, x_2, \dots x_{m-1})(x_m - h) + \\ + \beta_2(x_1, x_2, \dots x_{m-1})(x_m + h)]$$

et

$$G(P) = \frac{1}{2h}[G_1(x_1, x_2, \dots x_{m-1})(h - x_m) + \\ + G_2(x_1, x_2, \dots x_{m-1})(h + x_m)],$$

On a

$$B(P) = \begin{cases} -\beta_1(x_1, x_2, \dots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = -h \\ \beta_2(x_1, x_2, \dots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = h, \end{cases}$$

$$G(P) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = -h \\ g_2(x_1, x_2, \dots x_{m-1}) & \text{pour } x_m = h. \end{cases}$$

On peut choisir pour $\Phi(P)$ une fonction de classe $C^{(1)}$ dans $\bar{\Gamma}$, satisfaisant à l'équation différentielle ordinaire

(17) $$\frac{d\Phi}{dx_m} + B(P)\,\Phi = G(P)$$

en tant que la fonction de x_m, pour $-h \leqslant x_m \leqslant h$ (les variables $x_1 \dots x_{m-1}$ étant traitées comme paramètres). En effet, pour $x_m = -h$ et $x_m = h$, l'équation (17) se réduit aux égalités suivantes:

$$\frac{d\Phi}{dx_m} - \beta_1\,\Phi = g_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi}{dx_m} + \beta_2\,\Phi = g_2$$

respectivement.

D'autre part, l'intégrale générale de (17) s'écrit sous la forme

$$\Phi(x_1, \dots x_m) = \Big\{ \vartheta(x_1, \dots x_{m-1}) + \int_0^{x_m} G(x_1, \dots x_{m-1}, \xi)$$

$$\exp\Big[\int_0^{\xi} \beta(x_1, \dots x_{m-1}, s)\,ds\Big]\,d\xi \Big\}\, \exp\Big[-\int_0^{x_m} B(x_1, \dots x_{m-1}, \xi)\,d\xi\Big],$$

ϑ étant une fonction arbitraire des $x_1, x_2, \dots x_{m-1}$.

On peut choisir $\vartheta = 0$; alors la fonction B étant bornée dans $\overline{\Gamma}$ et la fonction G satisfaisant à l'hypothèse 3^0b du théorème I, la fonction $\Phi(P)$ satisfait à l'hypothèse 3^0c

Équation du type parabolique.

7. On peut traiter de la même façon le problème analogue relatif à l'équation normale du type parabolique, que nous écrirons sous la forme

$$(18) \qquad F[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c u = f,$$

les coefficients de cette équation et la fonction f étant des fonctions continues du point $P(x_1, x_2, \ldots x_m, y)$ d'un domaine D non borné de l'espace — temps à $m+1$ dimensions; $x_1, x_2, \ldots x_m$ sont des variables d'espace, y — celle du temps. Nous désignerons par $Q(x_1, x_2, \ldots x_m)$ le point de l'espace à m dimensions, aux coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_m$, de sorte que l'on peut écrire $P = (Q, y)$. La forme $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ est supposée définie positive.

Nous supposons cette fois que la frontière FD du domaine D est constituée par un domaine non borné B_0 à m dimensions de l'hyperplan $y = 0$, par un domaine analogue de l' hyperplan $y = h$ et par une hyper — surface S non tangente nulle part aux hyperplans $y = C^{te}$. A chaque point $P \epsilon S$ on fait correspondre une demi-droite $l(P)$, pénétrant à l'intérieur de D et parallèle a l'hyperplan $y = 0$ (on suppose qu'à chaque point de S correspond une, au moins, telle demi — droite). Soient $\alpha(P)$, $\beta(P)$ et $g(P)$ les fonctions définies sur S et $\varphi(Q)$ une fonction continue du point Q tel que le point $(Q, 0) \epsilon B_0$. Posons

$$L[u] = \alpha(P) \frac{du}{dl} + \beta(P) u.$$

On pose le *second problème aux limites* qui consiste en la recherche d'une fonction $u(P) = u(Q, y)$ régulière dans la fermeture $\overline{D}$ du domaine D, birégulière dans l'ensemble $D + S$, satisfaisant à l'équation (18) dans D, à la condition initiale

$$(19) \qquad u(Q, 0) = \varphi(Q) \qquad \text{pour } (Q, 0) \epsilon \overline{B}_0$$

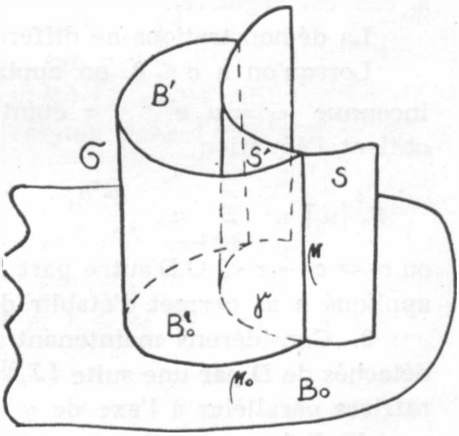
et à la condition aux limites

$$(20) \qquad L[u] \equiv \alpha \frac{du}{dl} + \beta u = g(P)$$

pour $P \epsilon S$, sauf, peut être, aux points de la multiplicité γ d'intersection de S et de l'hyperplan $y = 0$[6]. Si l'on veut que l'inégalité (20) subsiste aussi sur γ, il faut supposer que la fonction $\varphi(P)$ satisfait à une condition de compatibilité. On suppose notamment que $\varphi(P)$ est de classe $C^{(1)}$ le long de γ et que

$$L[\varphi] = g(P) \qquad \text{sur } \gamma$$

8. On peut faire correspondre au second problème aux limites ainsi posé, relatif à l'équation (18), un problème analogue au problème (M) du n-ro 2; nous l'appelerons dans la suite: *le problème* (M'). Considérons une hypersurface Σ qui détache du domaine D un domaine borné Δ, dont la frontière $F\,\Delta$ se compose d'une partie σ de Σ, d'une partie S' de S et des parties (bornées) B'_0 et B' des domaines B_0 et B. Soit $\Psi(P)$ une fonction définie sur σ, de classe $C^{(1)}$ sur la multiplicité μ d'intersection de S et de Σ et y satisfaisant aux conditions de compatibilité convenables. On suppose, en outre, que $\Psi(Q, 0) = \varphi(Q)$ sur la multiplicité μ_0 d'intersection de σ et de B_0. Le problème (M') consiste en la recherche d'une fonction $u(P) = u(Q, y)$, birégulière dans l'ensemble $\Delta + S$, régulière dans $\overline{\Delta}$, constituant une solution de l'équation (18) dans Δ et satisfaisant a la condition initiale



$$u(Q, 0) = \varphi(Q) \qquad \text{pour } (Q, 0) \,\epsilon\, B_0$$

et aux conditions aux limites

$$u(P) = \Psi(P) \qquad \text{pour } P \,\epsilon\, \sigma$$
$$L[u] = g(P) \qquad \text{pour } P \,\epsilon\, S'.$$

Le domaine Δ est dit régulier par rapport au problème (M') ainsi posé, lorsque ce problème est dans $\triangle$ toujours résoluble pourvu que la fonction $g(P)$ soit continue sur S, $\varphi(P)$ sur B'_0, $\Psi(P)$ sur σ et qu'elles satisfassent aux conditions de compatibilité convenables.

---

[6]) À vrai dire, ce problème doit s'appeler *le second problème mixte*, à cause de la présence de la condition initiale (19) et de celle aux limites (20).

Rappelons[7]) que si $c < 0$ et $f \geqslant 0$ ou $f \leqslant 0$ respectivement, alors une solution $u(P)$ de (18), régulière dans $\bar{\Delta}$ ne peut atteindre, ni dans Δ, ni sur B', sa borne supérieure dans Δ, si elle est positive, resp. sa borne inférieure si elle est négative. On peut démontrer un lemme suivant.

L e m m e II. Supposons que $c(P) < 0$ dans Δ et $\alpha(P) \geqslant 0$, $\beta(P) < 0$ sur S'. Soit $u(P)$ une fonction régulière dans Δ, de classe $C^{(1)}$ sur S'. Si l'on a $F[u] \geqslant 0$ dans Δ et $L[u] \geqslant 0$ sur S' (resp. $F[u] \leqslant 0$ dans Δ et $L[u] \leqslant 0$ sur S'), alors $u(P)$ atteint sur $\sigma + B'_0$ sa borne supérieure dans Δ, si elle est positive (resp. sa borne inférieure dans Δ, si elle est négative).

La démonstrations ne diffère point de celle du lemme I.

Lorsqu'on a $c \leqslant 0$, on applique le changement de la fonction inconnue $u_1 = u\ e^{-\tau y}$, τ étant un nombre positif arbitraire. On obtient l'équation

$$F_1\,[u_1] = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial u_1}{\partial y} + \sum_{j=l}^{m} b_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + c_1 u_1 = f_1$$

ou $c_1 = c - \tau < 0$. D'autre part $L[u_1] = L[u] \cdot e^{-\tau y}$. Le lemme II, appliqué a u_1 permet d'établir des limitations convenables pour u.

9. Considérons maintenant une suite $\{D_n\}$ de domaines bornés, détachés de D par une suite $\{\Sigma_n\}$ de surfaces cylindriques aux génératrices parallèles à l'axe de y et dont la distance à l'origine tend vers l'infini avec n. Supposons que la frontière de chaque domaine D_n se compose d'une partie σ_n de Σ_n, d'une partie S_n de S' et des parties (bornées) $B_0^{(n)}$ et $B^{(n)}$ de B_0 et de B respectivement. Supposons, en outre, que les domaines D_n sont réguliers par rapport au problème (M') relatif à l'équation (18).

Soit $\Phi(P)$ une fonction birégulière dans D, satisfaisant à la condition $L[\Phi] = g(P)$ sur S et $\{u_n\}$ — une suite de fonctions régulières dans les fermetures $\bar{D}_n$ des D_n correspondants, satisfaisant à l'équation (18) dans D_n et aux conditions (19) et (20) sur S_n et $B_0^{(n)}$ respectivement et se réduisant à $\Phi(P)$ sur σ_n.

Nous énonçons ici deux théorèmes correspondants aux théorèmes I et II et qu'on démontre aussi d'une manière analogue.

---

[7]) Voir M. Picone. Sul probleme di propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera. Math. Ann. t. 10. (1929) p. 701—712.

On peut démontrer que si $c \leqslant O$ et $f \geqslant o$ (resp $\leqslant o$) dans Δ, alors $u\,(P)$ atteint sur $FD - B'$ sa borne supérieure dans Δ lorqu'elle est positive (resp. sa borne inférieure dans Δ si elle est négative).

Théorème III. *On suppose que*

1^0 *il existe une fonction* $H_1(P,k) = H_1(Q,y;k)$ *du point* $P \in D$ *et du paramètre* k, *pour* $0 < k < k_0$, *birégulière dans* $\bar{D}$ *en tant que la fonction de* P, *jouissant, en outre, des propriétés suivantes:*

a) $H_1(P,k) > 0$ *dans* $\bar{D}$, *pour* $0 < k < k_0$;

b) *à chaque* $k < k_0$ *positif correspond un nombre positif* $\delta(k)$ *tel que*

(b$_1$) $\qquad F[H_1] \leqslant -\delta(k)\, H_1(P,k) \qquad$ *dans* D

(b$_2$) $\qquad L[H_1] \leqslant -\delta(k)\, H_1(P,k) \qquad$ *sur* S;

c) k_1 *et* k_2 *étant deux nombres positifs, tels que* $k_1 < k_2 < k_0$, *on a*

$$\overline{\lim_{\overline{OQ} \to \infty}} \frac{H_1(Q,y;k_1)}{H_1(Q,y;k_2)} = 0,$$

$\overline{OQ}$ *désignant la distance de* Q *à l'origine dans l'espace à* m *dimensions;*

2^0 *il existe une fonction* $\Phi(P) = \Phi(Q,y)$, *continue dans* D, *de classe* $C^{(1)}$ *dans* $D+S$, *satisfaisant aux conditions suivantes*

$$\Phi(Q,O) = \varphi(Q) \quad \text{sur } B_0, \quad L[\Phi] = g(P) \quad \text{sur } S;$$

3^0 *il existe deux nombres positifs* M *et* $\bar{k} < k_0$ *tels que l'on a*

a) $|f(P)| \leqslant M\, H_1(P,\bar{k})$ *dans* D,

b) $|g(P)| \leqslant M\, H_1(P,\bar{k})$ *sur* S

c) $|\Phi(P)| \leqslant M\, H_1(P,\bar{k})$ *dans* $\bar{D}$.

Alors, $\{D_n\}$ *étant une suite de domaines détachés de* D *par les surfaces cylindriques* Σ_n, *régulières par rapport au probléme* (M') *(pour l'équation* (18)*), la suite* $\{u_n\}$ *de solutions du problème* (M') *pour l'équation* (18) *dans les domaines* D_n *avec les conditions initiales*

$$u_n(P) = \varphi(P) \qquad \text{pour } y = 0,$$

et les conditions aux limites

$$L[u_n] = g(P) \qquad \text{sur } S_n$$

et

$$u_n(P) = \Phi(P) \qquad \text{sur } \sigma_n,$$

converge dans D *vers une limite* $u(P)$. *Cette limite constitue une solution du second problème aux limites pour l'équation* (18) *dans* D *avec les conditions initiales* (19) *et avec les conditions aux limites* (20).

On définit la classe (K') analogue à la classe (K) en remplaçant l'inégalité (12) par

(21) $$|u(P)| \leqslant M_1\, H(P,\bar{k}).$$

Théorème IV. *Dans la classe* (K') *il existe une solution, au plus, du second problème aux limites pour l'équation* (18) *avec la condition initiale* (19) *et la condition aux limites* (20).

Corollaire. *La limite* $u(P)$ *de la suite* $\{u_n(P)\}$ *définie au theorème III est indépendante du choix de la fonction* $\Phi(P)$, *à condition qu'elle satisfasse aux hypothèses* 2^0 *et* 3^0c *du théorème III.*

9. La détermination de la fonction $H_1(P,k)$ appartenant à la classe E_1 en tant que fonction du point Q peut être effectuée sans préciser la forme du domaine D à la seule condition qu'il satisfasse aux hypothèses, exposées au n-ro 7. Nous faisons cependant des hypothèses plus restrictives, concernant les coefficients de l'équation (18) que nous supposerons bornés et continus dans D et l'opérateur $L[u]$ en admettant que l'on a $\alpha(P) = 1$ et qu'il existe un nombre positif β_0 tel que $\beta(P) < -\beta_0 < 0$ sur S'.

Nous allons choisir la fonction $H_1(P,k)$ de façon que le nombre δ, qui intervient dans l'hypothèse 1^0b du théorème III, soit constant, c'est à dire indépendan de k. Nous ne ferons qu'une seule restriction: $\delta < \beta_0$. Au contraire, le nombre constant k_0 dépendra du choix du nombre constant δ.

Posons

$$H_1(P,k) = H_1(Q, y; k) = e^{kr + \nu y},$$

avec $r = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 + 1\right)^{1/2}$, ν étant une constante qui sera déterminée dans la suite. On a alors

$$\frac{1}{H_1} F[H_1] = \frac{k}{r} \sum_{j=1}^{m} a_{jj} + \frac{k}{r^2}\left(k - \frac{1}{r}\right) \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j + \tag{22}$$
$$+ \frac{k}{r} \sum_{j=1}^{m} b_j x_j + c - \nu.$$

Tous les composants du second membre de (22) sont bornés dans D. Soit δ un nombre constant, positif, inférieur à β_0. On peut déterminer le nombre ν de sorte que l'on ait

$$F[H_1] < -\delta H_1.$$

Le nombre ν, étant ainsi choisi, la fonction H_1 satisfait à l'hypothèse 1^0b_1 du théorème III quel que soit $k > 0$. Il reste à choisir le nombre k_0 de sorte que H_1 satisfasse à l'hypothèse 1^0b_2 pour $0 < k < k_0$. On a

$$\frac{dH_1}{dl} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \cos(l, x_j) = k \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial r}{\partial x_j} \cos(l, x_j)\right] H_1;$$

or

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r} = \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{x_j}{\varrho},$$

où $\varrho = \left(\sum_{j=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, par suite

$$\frac{dH_1}{dl} = \frac{k\varrho}{r} \cdot H_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{x_j}{\varrho} \cos(l, x_j) = \frac{k\varrho}{r} H_1 \cos(\varrho, l).$$

Comme $\varrho < r$, on a

(23) $$\left|\frac{dH_1}{dl}\right| < kH_1.$$

Or

$$L[H_1] = \frac{dH_1}{dl} + \beta H_1,$$

où $\beta(P) < -\beta_0 < 0$, en tenant compte de (23), on a $L[H_1] < (k - -\beta_0)H_1$.

Si l'on pose $k_0 = \beta_0 - \delta$, l'inégalité

(24) $$L[H_1] < -\delta H_1$$

subsiste pour $0 < k < k_0$. Donc H_1 satisfait à l'hypothèse 1⁰b du théorème III pour $0 < k < k_0 = \beta_0 - \delta$.

Il est évident d'autre part que H_1 vérifie les hypothèses 1⁰a et 1⁰c de ce théorème.

10. Supposons, par exemple, que le domaine D soit défini par les inégalités:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 < R^2, \quad y > 0$$

et que la direction l, pénétrante a l'intérieur de D, soit normale à la surface cylindrique S dont l'équation s'écrit

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = R^2.$$

La condition aux limites (20) devient

(25) $$L[u] = \frac{du}{d\varrho} + \beta u = g(P) \qquad \text{pour } \varrho = R, \quad y > 0.$$

Introduisons les coordonnées cylindriques $\varrho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m-1}, y$. On peut satisfaire à l'hypothèse 2⁰ du théorème III (l'opérateur $L[u]$

étant défini par (25)), en choisissant pour Φ une intégrale de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\Phi}{d\varrho} + \beta\Phi = g,$$

où $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{m-1}$ et y sont traités comme des paramètres.

Streszczenie

Autor przenosi na drugie zagadnienie brzegowe metody, stosowane przez niego uprzednio (w pracy cytowanej w nocie [2])) dla uzyskania pewnych twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Dirichlet'a dla równana liniowego o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, typu eliptycznego

$$(1) \qquad E[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f$$

w obszarze nieograniczonym D.

Drugie zagadnienie brzegowe dla równania (1) polega na poszukiwaniu rozwiązania tego równania, klasy $C^{(2)}$ w obszarze D, klasy $C^{(1)}$ w jego domknięciu $\bar{D} = D + FD$, spełniającego na FD warunek brzegowy

$$(2) \qquad L[u] \equiv a\frac{du}{dl} + \beta u = g.$$

Niech Δ będzie obszarem ograniczonym, wyciętym z obszaru D przez powierzchnię Σ. Oznaczmy przez S część brzegu $F\Delta$ obszaru Δ, położoną na FD, przez σ część $F\Delta$, położoną na Σ. Niech $\psi(P)$ będzie funkcją ciągłą na σ.

Zagadnienie, które w dalszym ciągu pracy nosi nazwę *zagadnienia* (M), polega na poszukiwaniu rozwiązania równania (1), spełniającego na S warunek (2), zaś na σ warunek $u(P) = \psi(P)$. Gdy zagadnienie (M) jest w obszarze Δ rozwiązalne przy dowolnych ciągłych $g(P)$ i $\psi(P)$ — obszar nazywamy *regularnym* ze względu na zagadnienie (M).

Przypuśćmy, że obszar D jest sumą obszarów ograniczonych D_n, regularnych względem zagadnienia (M), wyciętych z tego obszaru przez powierzchnie Σ_n, których odległość na początku układu zmierza do nieskończoności wraz z n. Przez S_n i σ_n będziemy oznaczali części

brzegu FD_n obszaru D_n, położone odpowiednio na FD i Σ_n. Niech $\Phi(P)$ będzie funkcją klasy $C^{(1)}$ w D, spełniającą warunek

$$L[\Phi] = g(P) \qquad \text{na } FD,$$

zresztą dowolną. Oznaczymy przez $\{u_n\}$ ciąg rozwiązań zagadnienia (M) w obszarach D_n, z warunkami brzegowymi $u_n(P) = \Phi(P)$ na σ_n i z warunkiem brzegowym (2) na S_n.

W twierdzeniu I podany jest warunek wystarczający na to, by ciąg $\{u_n\}$ zmierzał w D do rozwiązania zagadnienia brzegowego dla równania (1) z warunkiem (2) na FD. Twierdzenie II dotyczy jednoznaczności rozwiązania tego zagadnienia.

W obu tych twierdzeniach zakłada się istnienie funkcji $H(P,k)$, (gdzie k jest parametrem), biregularnej w D, spełniającej warunki

$$E[u] \leqslant -\delta(k) < 0, \quad L[u] \leqslant -\delta(k) < 0$$

(gdzie $\delta(k)$ jest funkcją tego samego parametru k), oraz

$$\lim_{OP \to \infty} \frac{H(P, k_1)}{H(P, k_2)} = 0, \text{ dla } k_1 < k_2.$$

Funkcję tę autor buduje efektywnie w wypadku, gdy obszarem D jest warstwa $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2 \ldots, m-1)$, $-h \leqslant x_m \leqslant h$, zaś współczynniki równania (1) spełniają warunki:

$$a_{mm} > A > 0 \quad (A \text{ — stała}),\ b_m \geqslant 0,\ c \leqslant 0.$$

W drugiej części pracy dowodzi się analogicznych twierdzeń o rozwiązaniach równania normalnego typu parabolicznego

$$F[u] = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f.$$

Państwowy Instytut Matematyczny.

Резюме

Автор переносит на вторую граничную задачу методы, применяемые им раньше (в работе цитированной в ноте [2])) для получения некоторых теорем о существовании и однозначности решения задачи Дирихле для линейного уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа

$$(1) \qquad E[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f$$

в неограниченной области D.

Вторая граничная задача для уравнения 1) состоит в искании решения этого уравнения, класса $C^{(2)}$ в области D, класса $C^{(1)}$ в его замыкании $\overline{D} = D + FD$, удовлетворяющего на FD граничному условию

$$L[u] = \alpha \frac{du}{dl} + \beta u = g \tag{2}$$

Пусть Δ будет ограниченной областью, вырезанной из области D поверхностю Σ. Обозначим через S часть границы $F\Delta$ области Δ, расположенной на FD, через σ часть $F\Delta$, расположенной на Σ. Пусть $\Psi(P)$ будет функцией непрорывной на σ.

Задача, которая в этой работе носит название задачи (M), состоит в искании решения уравнения (1), удовлетворяющего на S условию (2), а на σ условию $u(P)=\Psi(P)$. Когда задача (M) является в области Δ разрешимая при любых непрерывных $g(P)$ и $\Psi(P)$ — область называем регулярной в отношении к задаче (M).

Предположим, что облась D есть сумма областей ограниченных D_n, регулярных в отношении к задаче (M), вырезанных из этой области поверхностю Σ_n, которых расстояние от начала координат стремится к безконечности вместе с n. Через S_n и σ_n будем обозначать части границы FD_n области D_n, расположенные соответственно на FD и Σ_n. Пусть $\Phi(P)$ будет функцией класса $C^{(1)}$ в D, удовлетворяющей условию

$$L[\Phi] = g(P) \quad \text{на } FD,$$

впрочем произвольных. Обозначим через $\{u_n\}$ последовательность решений задачи (M) в областях D_n, с граничными условиями $u_n(P) = \Phi(P)$ на σ_n и с граничным условием (2) на S_n.

Теорема I содержит достаточное условие для того, чтобы последовательность $\{u_n\}$ стремилась в D к решению II граничной задачи для уравнения (1) с условием (2) на FD. Теорема II касается однозначности этой задачи.

В обеих теоремах предполагается существование функции $H(P,k)$, (где k параметр), бирегулярной в D, удовлетворяющей условиям

$$E[u] \leqslant -\delta(k) < 0, \quad L[u] \leqslant -\delta(k) < 0$$

(где $\sigma(k)$ функция этого самого параметра k)

и
$$\lim_{OP \to \infty} \frac{H(P, k_2)}{H(P, k_2)} = 0 \quad \text{для} \quad k_2 < k_2.$$

Функцию эту автор конструирует эффективно в случае, когда областью служит слой $-\infty < x_i < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots, m-1)$, $-h \leqslant x_m \leqslant h$, а коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$a_{mm} > A > 0 \quad (\text{A — постоянное}), \; b_m \geqslant 0, \; C \leqslant 0.$$

Во второй части работы доказываются аналогичные теоремы о решениях уравнения нормального параболического типа

$$F[u] = \sum_{j,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f.$$