

Z Zakładu Statystyki Matematycznej Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S.
Kierownik: z. prof. dr M. Olekiewicz

M. OLEKIEWICZ

**Tables of significance limits for the largest critical
ratio out of k ratios**

Tablice wartości granicznych dla największego z pośród k ilorazów sprawdzeniowych

In testing significance it happens that there are available several (say k) critical ratios derived from independent samples (of equal d. f. for Student's ratios, or of indifferent sizes for normal deviates). When it is desired to base a test of significance on the largest of these k ratios at P' significance level, the $100 P' \%$ point taken from the standard table will not be the proper criterion, for standard tables give significance limits for single occurrences. If we wish the probability of k values falling within a certain range be ϵ' , and the probability of at least one value falling outside this range be $P' = 1 - \epsilon'$, then the probability of a single value falling within the same range should be $\epsilon = \sqrt[k]{\epsilon'}$, while the probability of a single value falling outside this range should be $P = 1 - \epsilon = 1 - \sqrt[k]{\epsilon'}$.

Thus, if the experimentalist chooses the significance level at $P' = 0.05$, he can admit significance when his largest ratio exceeds the $100 P' \%$ point in the standard table, i. e., the point corresponding to $P = 1 - \sqrt[k]{0.95}$, or, in other words, to $\epsilon = \sqrt[k]{0.95}$.

With a view to aiding the experimentalist in finding such points two tables have been prepared with k varying from 1 to 30:

- (1) for the tests of significance based on normal deviates (u);
- (2) for the tests of significance based on Student's ratios (t).

The first of these has been obtained by direct calculation. It covers two major significance levels, one of which is given in two variants: for $P' = 0.05$ and for $P' = 0.0455$, while the other is at $P' = 0.01$.

Most of the entries of the second table have been obtained by geometrical interpolation, care being taken to avoid inconsistencies of horizontal and vertical entries. The entries for $\nu=1$ (ν stands for d. f.) were calculated by expanding $t = ctg \frac{\pi}{2}(1-\epsilon)$ with the approximation to two decimal places. It is believed that the table is sufficiently accurate for most of the ordinary uses. The table has been prepared but for one significance level, vis., for the 5% point.

To illustrate the using of the tables, the following example will suffice: Suppose that out of 10 calculated $|t|$'s, each based on $\nu=24$, the largest turns out to be 2.6. Then t_ϵ for $\epsilon' = 0.95$ is given at $k=10$, $\nu=24$, i. e., $t_\epsilon = 3.11$, which shows that the largest $|t|$ is not significant.

The use of the tables is not limited to the cases when all k ratios refer to the same trait. In fact, they may refer separately to quite different problems, provided that they should be assembled without regard to their values, and that, for Student's ratios, the numbers of degrees of freedom should be equal.

Streszczenie

Przy stosowaniu sprawdzianów nieprzypadkowości zdarza się, że mamy kilka (powiedzmy k) ilorazów sprawdzieniowych otrzymanych z prób niezależnych (o równych liczbach stopni swobody dla ilorazów t „Student” a i obojętnych wielkościach prób dla ilorazów opartych na założeniu zmiennej normalnej). Gdy jest pożądane oprócz sprawdzian na największym z tych ilorazów z ryzykiem błędu P' , 100 P' %-owa wartość graniczna wzięta z odnośnej tablicy nie będzie właściwym kryterjum, gdyż tablice wartości granicznych są ułożone dla pojedynczych zdarzeń. Niech żądane prawdopodobieństwo aby k wartości padło w przedział wahań dopuszczalnych, będzie ϵ' , zaś prawdopodobieństwo, że chociaż jedna z nich padnie poza ten przedział, będzie $P' = 1 - \epsilon'$. Wtedy prawdopodobieństwo, że pojedyncza wartość padnie w ten sam przedział, wyniesie $\epsilon = \sqrt[k]{\epsilon'}$, zaś prawdopodobieństwo, że pojedyncza wartość padnie poza ten przedział będzie $P = 1 - \epsilon = 1 - \sqrt[k]{\epsilon'}$.

Tak więc, jeżeli badacz wybiera ryzyko błędu $P' = 0,05$, będzie on mógł stwierdzić nieprzypadkowość tylko wtedy gdy największy

z jego ilorazów przewyższy $100 P^0_0$ -ową wartość graniczną w tablicy wartości granicznych dla zdarzeń pojedynczych, t. j. punkt odpowiadający $P = 1 - \sqrt[k]{0,95}$, albo innymi słowy, odpowiadający $\epsilon = \sqrt[k]{0,95}$.

W celu ułatwienia badaczom znajdowania takich punktów, dwie tablice zostały przygotowane przy k przybierającym wartości od 1 do 30:

- 1) dla sprawdzianów opartych na założeniu zmiennej normalnej (u),
- 2) dla sprawdzianów opartych na założeniu zmiennej „Student”a (t).

Pierwsza z tych tablic została sporządzona przez zwykłe obliczenie. Uwzględnia ona 2 główne poziomy ryzyka, z których jeden podany jest w dwóch warjantach: dla $P' = 0,05$ i dla $P' = 0,0455$, drugi zaś jest $P' = 0,01$.

Większą część pozycji tablicy drugiej otrzymano drogą interpolacji geometrycznej, przyczym wyrównywano pozycje w kierunku poziomym i pionowym łącznie. Pozycje dla $\nu = 1$ (ν , jest to liczba stopni swobody) otrzymano przez rozwinięcie $t = ctg \frac{\pi}{2} (1 - \epsilon)$ z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych. Tablica została ograniczona tylko dla jednego poziomu ryzyka, mianowicie dla 5^0_0 -owego.

Dla zilustrowania użycia tablicy wystarczy przykład następujący: Niech z 10 obliczonych $|t|$, opartych każde na $\nu = 24$, największe wynosi 2,6. Wtedy t_ϵ przy $\epsilon' = 0,95$ znajdujemy w wierszu $k = 10$ na przecięciu z kolumną $\nu = 24$, czyli $t_\epsilon = 3,11$, skąd wynika, że $|t|$ nie można uznać za nieprzypadkowe.

Używanie tablic nie ogranicza się do wypadku, gdy wszystkie k ilorazów sprawdzieniowych odnoszą się do tej samej cechy. Mogą one odnosić się nawet do zupełnie różnych zagadnień, byleby były dobrane bez względu na ich wartości i byleby liczby stopni swobody dla ilorazów opartych na założeniu zmiennej t „Student”a były równe sobie.

Table of 5% and 1% points for the largest normal deviate out of k deviates ($P' = 0.05, 0.0455, 0.01$).

Tablica 5% i 1% owych wartości granicznych dla największego z k ilorazów sprawdzonych, opartych na założeniu zmiennej normalnej.

k	$\epsilon' = 0.95$		$\epsilon' = 0.9545$		$\epsilon' = 0.99$	
	ϵ	u_{ϵ}	ϵ	u_{ϵ}	ϵ	u_{ϵ}
1	0.95	1.96	0.9545	2.00	0.99	2.58
2	0.9746	2.24	0.9770	2.27	0.9950	2.81
3	0.9830	2.39	0.9846	2.42	0.99665	2.93
4	0.9873	2.49	0.9884	2.52	0.997488	3.02
5	0.9898	2.57	0.9907	2.60	0.997995	3.09
6	0.9915	2.63	0.9922	2.66	0.998325	3.14
7	0.9927	2.68	0.9933	2.71	0.998561	3.19
8	0.9936	2.73	0.9941	2.76	0.998736	3.22
9	0.9943	2.76	0.9948	2.80	0.998875	3.25
10	0.9949	2.80	0.9953	2.83	0.998986	3.28
11	0.9953	2.83	0.9957	2.86	0.999076	3.31
12	0.9957	2.86	0.9961	2.89	0.999153	3.33
13	0.9961	2.89	0.9964	2.91	0.999218	3.35
14	0.9963	2.91	0.9966	2.93	0.999274	3.37
15	0.9966	2.93	0.9968	2.96	0.999323	3.40
16	0.9968	2.95	0.9970	2.98	0.999365	3.41
17	0.9970	2.97	0.9972	2.99	0.999402	3.43
18	0.9971	2.98	0.9974	3.01	0.909434	3.45
19	0.9973	3.00	0.9975	3.03	0.999465	3.46
20	0.9974	3.01	0.9976	3.04	0.999493	3.47
21	0.9976	3.03	0.9977	3.06	0.999516	3.48
22	0.9977	3.05	0.9978	3.07	0.999537	3.49
23	0.9978	3.06	0.9979	3.09	0.999558	3.50
24	0.9979	3.07	0.9980	3.10	0.999576	3.51
25	0.9980	3.08	0.9981	3.11	0.999594	3.53
26	0.9980	3.09	0.9982	3.12	0.999610	3.54
27	0.9981	3.11	0.9982	3.13	0.999624	3.55
28	0.9982	3.12	0.9983	3.14	0.999637	3.56
29	0.9982	3.13	0.9983	3.15	0.999650	3.57
30	0.9983	3.13	0.9984	3.16	0.999661	3.58

Table of 5% points for the largest ratio out of k Student's ratios.
 Tablica 5%-owych wartości granicznych dla największego z k ilorazów
 sprawdzeniowych opartych na założeniu zmiennej t „Student”'a.

$$\epsilon' = 0,95$$

k	ϵ	t_{ϵ}									
		$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=6$	$\nu=7$	$\nu=8$	$\nu=9$	$\nu=10$
1	0.95	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228
2	0.974680	25.13	6.60	4.10	3.40	3.10	2.96	2.87	2.80	2.73	2.67
3	0.983048	37.54	9.20	4.90	3.95	3.46	3.25	3.10	3.01	2.93	2.87
4	0.987259	49.96	12.00	5.45	4.30	3.78	3.46	3.28	3.18	3.08	3.01
5	0.989794	62.37	14.90	6.00	4.60	4.05	3.69	3.46	3.34	3.23	3.15
6	0.991521	75.08	17.10	6.50	4.90	4.36	3.91	3.65	3.51	3.39	3.29
7	0.992700	87.20	19.00	7.00	5.20	4.61	4.11	3.81	3.64	3.51	3.42
8	0.993609	99.61	20.30	7.40	5.45	4.80	4.30	3.93	3.75	3.61	3.51
9	0.994317	112.02	21.55	7.80	5.70	4.96	4.49	4.04	3.84	3.69	3.59
10	0.994884	124.43	22.50	8.15	5.90	5.10	4.64	4.14	3.94	3.77	3.66
11	0.995348	136.84	23.50	8.50	6.05	5.22	4.74	4.21	4.00	3.84	3.72
12	0.995735	149.25	24.30	8.80	6.20	5.34	4.84	4.28	4.07	3.89	3.78
13	0.996063	161.66	25.00	9.10	6.40	5.45	4.93	4.35	4.14	3.95	3.84
14	0.996343	174.08	25.75	9.35	6.50	5.54	5.03	4.41	4.19	3.99	3.88
15	0.996587	186.49	26.40	9.60	6.60	5.61	5.10	4.47	4.24	4.04	3.91
16	0.996800	198.90	26.80	9.80	6.70	5.67	5.18	4.52	4.28	4.08	3.95
17	0.996988	211.31	27.25	10.0	6.85	5.73	5.24	4.57	4.32	4.12	3.98
18	0.997155	223.72	27.70	10.25	7.00	5.78	5.30	4.61	4.36	4.15	4.01
19	0.997304	236.13	28.00	10.45	7.10	5.84	5.35	4.65	4.40	4.19	4.05
20	0.997439	248.55	28.30	10.60	7.20	5.90	5.40	4.69	4.43	4.22	4.08
21	0.997561	260.96	28.60	10.75	7.30	5.96	5.45	4.73	4.46	4.25	4.11
22	0.997672	273.37	28.80	10.90	7.40	6.02	5.49	4.77	4.49	4.28	4.13
23	0.997773	285.78	29.10	11.10	7.50	6.07	5.52	4.80	4.52	4.30	4.15
24	0.997866	298.19	29.30	11.20	7.60	6.12	5.55	4.83	4.55	4.32	4.17
25	0.997951	310.06	29.50	11.30	7.70	6.16	5.58	4.86	4.58	4.34	4.19
26	0.998030	323.01	29.60	11.35	7.80	6.19	5.61	4.88	4.60	4.36	4.21
27	0.998102	335.42	29.70	11.40	7.90	6.22	5.64	4.90	4.62	4.38	4.23
28	0.998170	347.84	29.80	11.48	7.95	6.26	5.66	4.93	4.64	4.40	4.24
29	0.998233	360.25	29.90	11.50	8.00	6.29	5.68	4.95	4.66	4.42	4.25
30	0.998292	372.66	30.00	11.55	8.05	6.32	5.70	4.96	4.67	4.43	4.26

$$\epsilon' = 0,95$$

k	ϵ	t_{ϵ}									
		$\nu=11$	$\nu=12$	$\nu=13$	$\nu=14$	$\nu=15$	$\nu=16$	$\nu=17$	$\nu=18$	$\nu=19$	$\nu=20$
1	0.95	2.201	2.179	2.16	2.145	2.131	2.12	2.11	2.101	2.093	2.086
2	0.974680	2.63	2.59	2.55	2.52	2.50	2.47	2.45	2.44	2.42	2.41
3	0.983048	2.81	3.77	2.73	2.70	2.68	2.65	2.63	2.62	2.61	2.59
4	0.987259	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.78	2.76	2.74	2.73	2.72
5	0.989794	3.08	3.03	2.99	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.84	2.82
6	0.991521	3.21	3.15	3.11	3.08	3.05	3.01	2.98	2.95	2.93	2.91
7	0.992700	3.33	3.27	3.23	3.18	3.14	3.11	3.07	3.05	3.02	2.99
8	0.993609	3.42	3.36	3.32	3.28	3.23	3.20	3.16	3.13	3.10	3.08
9	0.994317	3.49	3.44	3.39	3.35	3.31	3.27	3.23	3.20	3.17	3.14
10	0.994884	3.56	3.51	3.46	3.42	3.37	3.33	3.29	3.25	3.23	3.20
11	0.995348	3.62	3.56	3.52	3.47	3.42	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24
12	0.995735	3.67	3.61	3.57	3.52	3.47	3.42	3.38	3.35	3.31	3.28
13	0.996063	3.73	3.66	3.62	3.57	3.52	3.47	3.42	3.39	3.35	3.32
14	0.996343	3.77	3.70	3.66	3.60	3.55	3.50	3.46	3.42	3.38	3.35
15	0.996587	3.81	3.75	3.69	3.64	3.59	3.54	3.50	3.45	3.41	3.38
16	0.996800	3.85	3.78	3.72	3.68	3.63	3.57	3.53	3.48	3.44	3.41
17	0.996988	3.88	3.81	3.75	3.70	3.66	3.60	3.56	3.52	3.47	3.44
18	0.997155	3.91	3.83	3.77	3.72	3.68	3.62	3.59	3.54	3.50	3.47
19	0.997304	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.65	3.61	3.56	3.52	3.49
20	0.997439	3.97	3.89	3.83	3.78	3.72	3.67	3.63	3.58	3.54	3.51
21	0.997561	4.00	3.92	3.85	3.80	3.74	3.69	3.66	3.61	3.57	3.53
22	0.997672	4.02	3.94	3.87	3.82	3.76	3.71	3.68	3.63	3.59	3.55
23	0.997773	4.04	3.96	3.89	3.84	3.78	3.73	3.69	3.65	3.61	3.57
24	0.997866	4.06	3.98	3.91	3.86	3.80	3.75	3.71	3.67	3.63	3.59
25	0.997951	4.08	4.00	3.93	3.88	3.82	3.77	3.73	3.69	3.64	3.60
26	0.998030	4.10	4.02	3.95	3.89	3.83	3.78	3.74	3.70	3.65	3.61
27	0.998102	4.12	4.04	3.96	3.90	3.84	3.79	3.75	3.71	3.66	3.62
28	0.998170	4.13	4.05	3.97	3.91	3.85	3.80	3.76	3.72	3.67	3.63
29	0.998233	4.14	4.06	3.98	3.92	3.86	3.81	3.77	3.73	3.68	3.64
30	0.998292	4.15	4.07	3.99	3.93	3.87	3.82	3.78	3.74	3.69	3.65

$$\epsilon' = 0,95$$

k	ϵ	t_c									
		$\nu = 21$	$\nu = 22$	$\nu = 23$	$\nu = 24$	$\nu = 25$	$\nu = 26$	$\nu = 27$	$\nu = 28$	$\nu = 29$	$\nu = 30$
1	0.95	2.080	2.074	2.069	2.064	2.060	2.056	2.052	2.048	2.045	2.042
2	0.974680	2.40	2.39	2.38	2.37	2.36	2.36	2.36	2.35	2.35	2.34
3	0.983048	2.58	2.57	2.56	2.55	2.55	2.54	2.54	2.54	2.53	2.53
4	0.987259	2.71	2.70	2.69	2.68	2.68	2.67	2.67	2.66	2.66	2.66
5	0.989794	2.81	2.79	2.78	2.77	2.76	2.76	2.76	2.75	2.75	2.75
6	0.991521	2.90	2.88	2.87	2.86	2.85	2.84	2.83	2.82	2.82	2.82
7	0.992700	2.97	2.95	2.94	2.93	2.92	2.91	2.90	2.89	2.88	2.87
8	0.993609	3.06	3.03	3.01	3.00	2.99	2.98	2.97	2.96	2.95	2.94
9	0.994317	3.12	3.09	3.07	3.05	3.04	3.03	3.02	3.01	3.00	2.99
10	0.994884	3.17	3.15	3.13	3.11	3.09	3.08	3.07	3.06	3.05	3.04
11	0.995348	3.22	3.19	3.17	3.15	3.13	3.12	3.11	3.10	3.09	3.08
12	0.995735	3.26	3.23	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12
13	0.996063	3.30	3.28	3.25	3.23	3.21	3.19	3.18	3.17	3.16	3.15
14	0.996343	3.33	3.31	3.29	3.26	3.24	3.22	3.21	3.19	3.18	3.17
15	0.996587	3.36	3.34	3.32	3.30	3.28	3.26	3.24	3.22	3.21	3.20
16	0.996800	3.38	3.36	3.34	3.32	3.30	3.28	3.26	3.24	3.23	3.22
17	0.996988	3.41	3.39	3.37	3.35	3.33	3.31	3.29	3.27	3.26	3.25
18	0.997155	3.43	3.41	3.39	3.37	3.35	3.33	3.31	3.29	3.28	3.27
19	0.997304	3.46	3.44	3.42	3.40	3.38	3.36	3.34	3.32	3.30	3.29
20	0.997439	3.48	3.46	3.44	3.42	3.40	3.38	3.36	3.34	3.32	3.31
21	0.997561	3.50	3.48	3.46	3.44	3.42	3.40	3.38	3.36	3.34	3.33
22	0.997672	3.52	3.50	3.48	3.46	3.44	3.42	3.40	3.38	3.36	3.35
23	0.997773	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46	3.44	3.42	3.40	3.38	3.37
24	0.997866	3.56	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46	3.44	3.42	3.40	3.39
25	0.997951	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.47	3.45	3.43	3.41	3.40
26	0.998030	3.58	3.56	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46	3.44	3.42	3.41
27	0.998102	3.59	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.47	3.45	3.43	3.42
28	0.998170	3.60	3.58	3.56	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46	3.44	3.43
29	0.998233	3.61	3.59	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.47	3.45	3.44
30	0.998292	3.62	3.60	3.58	3.56	3.54	3.52	3.50	3.48	3.46	3.45

