ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 6 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

M. BIERNACKI

Sur quelques applications de la formule de Parseval

O kilku zastosowaniach wzoru Parsevala

§ 1. Si $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$
et $g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots b_n z^n + \ldots$

sont des fonctions holomorphes dans le voisinage de l'origine il en est de même avec la fonction

$$H(z) = H(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + \ldots + a_n b_n z^n + \ldots$$

et l'on a la formule de Parseval

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, g\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

où C est une courbe simple et fermée contenant l'origine à son intérieur, située dans la région de holomorphie de $f(z)$, parcourue dans le sens direct et choisie de manière que lorsque le point z décrit C le point $w = t x z^{-1}$ reste dans la région de holomorphie de $g(z)$ et cela quelque soit t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. C'est en utilisant cette formule que M. Hadamard a démontré son célèbre théorème sur la multiplication des singularités[1]).

Nous allons déduire de cette formule quelques applications ayant des rapports non pas à des singularités de $H(z)$ mais au comportement de cette fonction dans la région où elle est holomorphe.

---

[1]) Acta Mathematica 22, 1898. Cf. aussi P. Montel, Leçons sur les séries des polynomes à une variable complexe. Paris, Gauthier-Villars, 1910, p. 34 et suivantes. L. Bieberbach, Encykl. d. math. Wiss. II C 4. Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen p. 465.

§ 2. Si $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans les cercles $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$ respectivement on peut prendre pour C une circonférence de centre origine et de rayon $R_1 - \varepsilon$ où ε est un nombre positif arbitrairement petit, il en résulte que $H(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < R_1 R_2$. De la formule (1) il résulte immédiatement que si $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans les cercles $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$ respectivement et si l'on a $|f(z)| \leqslant M_1$ et $|g(z)| \leqslant M_2$ dans ces cercles on a $|H(z)| \leqslant M_1 M_2$ dans le cercle $|z| < R_1 R_2$. En posant, par exemple, $f = g = a_0 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, $R_1 = R_2 = M_1 = M_2 = 1$ on voit que si k est un entier positif quelconque la fonction $f_k(z) = a_0^k + \ldots + a_n^k z^n + \ldots$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et que l'on a $|f_k(z)| \leqslant 1$ dans ce cercle. On peut généraliser ces résultats. En effet, en posant:

$$I_1(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(r e^{i\Theta})| \, d\Theta$$

on tire de la formule (1) l'inégalité:

$$|H(x)| \leqslant \operatorname*{Max}_{|z|=u} |f(z)| \cdot I_1\left(\left|\frac{x}{u}\right|, g\right) \tag{2}$$

$$\left(|u| < R_1, \left|\frac{x}{u}\right| < R_2\right)$$

d'où l'on déduit immédiatement l'énoncé suivant:

I. *Si $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans les cercles $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$ respectivement et si l'on a $|f(z)| \leqslant M_1$ et $|I_1(r, g)| \leqslant M_2$ dans ces cercles la fonction $H(f, g)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < R_1 R_2$ et l'on a $|H(f, g)| \leqslant M_1 M_2$ dans ce cercle.*

§ 3. Voici une autre application de la formule (2). Supposons que $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ soit holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et que

$$g(z) = e^{i\Theta_0} + e^{i\Theta_1} z + \ldots + e^{i\Theta_n} z^n + \ldots \qquad \text{avec } |a_n| = a_n e^{i\Theta_n}$$

En posant $x = r < 1$ et $|u| = \sqrt{r}$ on tire de la formule (2) l'inégalité:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant \operatorname*{Max}_{|z|=\sqrt{r}} |f(z)| \cdot I_1(\sqrt{r}, g)$$

Or il est bien connu que $I_1(r,g) \leqslant I_2(r,g)$ où l'on a posé;

$$I_2(r,g) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\Theta})|^2 d\Theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

et que $[I_2(r,g)]^2 = 1 + r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n} + \ldots = (1-r^2)^{-1}$, on obtient donc l'énoncé suivant:

II. *Si $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, si l'on a $|f(z)| \leqslant M(r)$ pour $|z| < r$ et si $\mathfrak{M}(r) = |a_0| + |a_1| r + + \ldots + |a_n| r^n + \ldots$ on a l'inégalité:*

$$\mathfrak{M}(r) \leqslant M(\sqrt{r}) \cdot (1-r)^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Si en particulier $M(r) = O(1-r)^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ il en résulte que $\mathfrak{M}(r) = O(1-r)^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ nous retrouvons un résultat de Hardy[2]) qui a d'ailleurs montré que l'exposant $-\alpha - \frac{1}{2}$ ne saurait être amélioré et que si $f(z)$ est bornée on a même $\mathfrak{M}(r) = o(1-r)^{-\frac{1}{2}}$.

Remarque. Il est toutefois possible d'améliorer l'inégalité (3). En écrivant

$$\mathfrak{M}^2(r) = |a_0|^2 + \ldots + (|a_0||a_n| + |a_1||a_{n-1}| + \ldots + |a_n||a_0|) r^n + \ldots$$

et en profitant de l'inégalité:

$$|a_0||a_n| + |a_1||a_{n-1}| + \ldots + |a_n||a_0| \leqslant |a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2$$

et de l'égalité:

$$[I_2(r,f)]^2 = |a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2 r^{2n} + \ldots$$

on obtient de suite l'énoncé suivant;

IIa. *Dans les conditions de l'énoncé II on a l'inégalité:*

$$\mathfrak{M}(r) \leqslant I_2(\sqrt{r}, f)(1-r)^{-\frac{1}{2}} \tag{3'}$$

Lorsque $|a_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ona dans (3') le signe d'égalité.

§ 4. Une autre application de la formule de Parseval, tout aussi immédiate est la suivante:

III. *Si $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans les cercles $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$ respectivement, si l'on a $|\arg f(z)| \leqslant \alpha\pi$ et $|\arg g(z)| \leqslant \beta\pi$ dans ces*

---

[2]) Quart. Journ. of Mat. **44**, 1913, p. 147—160.

cercles et si $\alpha+\beta<\frac{1}{2}$ *on a* $|\arg H(z)|\leqslant(\alpha+\beta)\pi$ *dans le cercle* $|z|<R_1 R_2$.

En effet, la courbe C est une circonférence de centre origine parcourue dans le sens direct, donc l'expression $\frac{dz}{iz}$ est positive et l'assertion de l'énoncé III en résulte de suite.

Supposons que $f(z)=1+a_1 z+\ldots$ soit holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et que l'on ait dans ce cercle $|\arg f(z)|<\frac{\pi}{2k}$ où k est un entier supérieur à 1. En appliquant k fois l'énoncé III et en posant $f_k(z)=1+a_1^k z+\ldots+a_n^k z^n+\ldots$ on obtient l'inégalité $|\arg f_k(z)|<\frac{\pi}{2}$, il en résulte d'après C. Carathéodory[3]) que $|a_n^k|\leqslant 2$. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

IV. *Si* $f(z)=1+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z|<1$ *et si l'on a dans ce cercle* $|\arg f(z)|<\frac{\pi}{2k}$ *où* k *est un entier, on a* $|a_n|\leqslant 2^{\frac{1}{k}}$ $(n=1,2,\ldots)$.

Supposons maintenant que $0<k<1$. Si $|\arg f(z)|<\frac{\pi}{2k}$ on a, d'après un théorème connu de Littlewood[4]) l'inégalité:

$$|a_n|\leqslant\frac{r^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta\leqslant r^{-n} H \text{ où } |z|=r<1 \text{ et } H=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+re^{i\Theta}}{1-re^{i\Theta}}\right|^{\frac{1}{k}}d\Theta$$

Considérons pour le moment l'intégrale $L=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{re^{i\Theta}}{1-re^{i\Theta}}\right|^{\frac{1}{k}}d\Theta.$

Pour évaluer cette intégrale remarquons que l'on a $|z(1-z)^{-1}|\leqslant$ $\leqslant r(1-r)^{-1}$ pour $|z|\leqslant r$ et que $z(1-z)^{-1}$ est univalente dans le cercle

[3]) cf. p. ex P. Montel Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris, Gautiers-Villars, 1933, p. 63—64.

[4]) Cf. p. ex. G. Julia. Principes géométriques d'analyse, 2e partie. Paris, Gautier-Villars, 1932, p. 103—112.

$|z|<1$. En appliquant une proposition de A. Prawitz et S. Mandelbrojt[5]) on aura donc:

$$L \leqslant \frac{1}{k}\int_0^r r^{\frac{1}{k}-1}(1-r)^{-\frac{1}{k}}\,dr < \frac{1}{k}\int_0^r (1-r)^{-\frac{1}{k}} < \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(1-r)^{\frac{1}{k}-1}}$$

On voit d'autre part de suite que si $r \geqslant \frac{1}{2}$ le rapport $H:L$ ne dépasse pas $3^{\frac{1}{k}}$ on a donc

$$|a_n| \leqslant 3^{\frac{1}{k}}(1-k)^{-1} r^{-n}(1-r)^{1-\frac{1}{k}}$$

En posant $r=1-\frac{1}{n}$ on trouve que $r^{-n} \leqslant 4$, donc le résultat.

IVa. *Si* $f(z)=1+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z|<1$ *et si l'on a dans ce cercle* $|\arg f(z)|<\frac{\pi}{2k}$ *où* $k<1$ *on a:*

$$|a_n| \leqslant \frac{4\cdot 3^{\frac{1}{k}}}{1-k}\, n^{\frac{1}{k}-1} \quad ^{6)} \tag{4}$$

Supposons de nouveau que $k>1$ (k n'est pas nécessairement un entier). On a:

$$\frac{f(z)}{1-z}=1+(1+a_1)z+\ldots+(1+a_1+\ldots+a_n)z^n+\ldots \quad \text{et}$$

$$\left|\arg\frac{f(z)}{1-z}\right|<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}=\frac{\pi}{2k'}$$

Comme $k'<1$ nous pouvons appliquer à la fonction $f(z)\cdot(1-z)^{-1}$ l'inégalité (4) dans laquelle k est remplacé par k' et nous obtenons l'énoncé suivant qui complète le théorème IV:

V. *Si* $f(z)=1+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z|<1$ *et si l'on a dans ce cercle* $|\arg f(z)|<\frac{\pi}{2k}$ *où* $k>1$ *on a:*

---

[5]) Ark. Mat. Astr. Fys. **20** A No. 6, 1927 et Bull. des Sciences math. (2), 58, 1934, p. 185—200, respectivement cf aussi M. Biernacki, „Fonctions multivalentes" Actualités scientifiques et industrielles No 657, Paris, Hermann et Cie, 1938 et D. C. Spencer, Journal London Mat. Soc. **15**, 1940.

[6]) J. E. Littlewood a établi (Proc. Lond. Mat. Soc. 23, 1925) que dans le cas on $k=\frac{1}{2}$ l'on a $|a_n| \leqslant 4n$; il a établi, de plus, que sous la seule hypothèse $f(z) \neq -n^2$ $(n=0,1,2\ldots)$ l'on a $|a_n|<An$ où A en une constante numérique.

$$|1+a_1+\ldots+a_n| \leqslant 4(k+1)3^{1+\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}}$$

L'exemple de la fonction $(1+z)^{\frac{1}{k}}(1-z)^{-\frac{1}{k}}$ montre que l'exposant $\frac{1}{k}$ ne peut être remplacé par un nombre moindre.

On peut remarquer qu'une inégalité analogue à (4) est inexacte dans le cas où $k>1$, le coefficient a_n peut plutôt tendre vers 0 arbitrairement lentement lorsque $n\to\infty$. Il suffit p. ex. de considérer une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<1$, telle que $|\varphi(z)|<1$ dans ce cercle et que $\varphi(0)=0$; on sait que les coefficients d'une telle fonction peuvent tendre vers 0 arbitrairement lentement[7]), il est clair que la fonction $f(z)=1+a\varphi(z)$ où $|a|$ est assez petit satisfait aux conditions de l'énoncé.

§ 5. Nous supposerons dans ce § que $R_1=R_2=1$. Posons dans la formule (1) $x=re^{i\varphi}$ et $z=\sqrt{r}e^{i\Theta}$ (la courbe C est donc la circonférence $|z|=\sqrt{r}$). En intégrant les deux membres de l'égalité (1) par rapport à φ, entre des limites 0 et 2π et en changeant dans le second membre l'ordre des intégrations par rapport aux variables Θ et φ on obtient l'inégalité:

$$I_1(r,H) \leqslant I_1(\sqrt{r},f)\cdot I_1(\sqrt{r},g) \tag{5}$$

dont je vais donner quelques applications. Auparavant je vais remarquer que l'on peut dans bien de cas améliorer (5) en y remplaçant dans le second membre $I_1(\sqrt{r},f)$ *ou* $I_1(\sqrt{r},g)$ *par* $AI_1(r,f)$ ou $AI_1(r,g)$ respectivement (A est une constante). Il en est ainsi, par exemple, lorsqu'il existe une constante C telle que:

$$(*) \qquad \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{C}{1-|z|}$$

car alors $I_1(\sqrt{r},f)<e^C I_1(r,f)$[8]). La condition (*) est vérifiée, en particulier, par des fonctions dont l'argument est borné ou (pour r assez grand) par des fonctions multivalentes d'ordre p. (loc. cit.) Considérons la fonction $f(z)=a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$ holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et sa dérivée généralisée de Riemann-Liouville:

---

[7]) Si u_n est une suite arbitraire des nombres positifs qui tend vers zéro on peut trouver une suite des entiers n_l de manière que $u_{n1}+\ldots+u_{nl}+\ldots<1$, il est clair que la fonction $\varphi(z)=u_{n1}z^{n1}+\ldots+u_{nl}z^{n^l}+\ldots$ répond à la question.

[8]) cf. mon article „Sur les fonctions lentement croissantes", Bulletin scientifique de Timisoara, 12, 1946 § 9.

$$D^{\alpha}[f(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} a_n z^{n-\alpha}$$

et posons

$$g(z) = D^{\alpha}\left(\frac{z}{1-z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} z^{n-\alpha}$$

Supposons, en premier lieu, que $\alpha > 0$. On voit aisément que les coef ficients tayloriens de la fonction $z^{-\alpha} h(z)$ où

$$h(z) = z^{2\alpha+1} g(z) - \frac{z^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(1-z)^{\alpha+1}} + z^{\alpha+1}\Gamma(1+\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)}\right] z^{n+1+\alpha}$$

sont de l'ordre de $n^{\alpha-1}$ lorsque $n \to \infty$ [9]).

Il en résulte que $I_1(r, h) < I_2(r, h) < A_1(\alpha) r^{2+\alpha}(1 + 2^{2\alpha-2} r^2 + \ldots + n^{2\alpha-2} r^{2n-2} + \ldots)^{\frac{1}{2}} < A_2(\alpha) r^{2+\alpha}(1-r)^{-\alpha+\frac{1}{2}}$ où $A_1(\alpha)$ et $A_2(\alpha)$ (de même que plus tard $A_3(\alpha)$, $A_4(\alpha)\ldots$) ne dépendent que de α. Si $\alpha = \frac{1}{2}$ il faut remplacer $(1-r)^{-\alpha+\frac{1}{2}}$ par $[\log(1-r)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$, si $\alpha < \frac{1}{2}$ il faut remplacer $(1-r)^{-\alpha+\frac{1}{2}}$ par 1.

On voit, d'autre part, d'après les calculs analogues à ceux faits au § 4 (suite de l'énoncé IV), que l'on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{(1-re^{i\Theta})^{\alpha+1}} - 1\right| d\Theta < \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)^2 r}{2\alpha(1-r)^{\alpha}} \quad {}^{10})$$

D'après l'expression de $h(z)$ on aura donc:

---

[9]) Il suffit d'appliquer le théorème de L a g r a n g e, car $\Gamma(n+1)[\Gamma(n+1-\alpha)]^{-1}$ et $\Gamma(\alpha+n+1)[\Gamma(n+1)]^{-1}$ sont de l'ordre de n^{α} tandis que la différence des logarithmes de ces quantités est de l'ordre de n^{-1}.

[10]) En effet, $(1-z)^{-\alpha-1} - 1$ est au plus $[(\alpha+3)2^{-1}]$ — valente dans le cercle $|z| < 1$ et le module de cette fonction dans le cercle $|z| \leqslant r$ ne dépasse pas $(1-r)^{-\alpha-1} - 1 < (\alpha+1) r (1-r)^{-\alpha-1}$, donc (cf. B i e r n a c k i, loc. cit. sous [6]) p. 26) le premier membre de inégalité ne dépasse pas $(\alpha+3)2^{-1}(\alpha+1)\int_0^r (1-r)^{-\alpha-1} dr$.

$$I_1(\sqrt{r}\; g) < r^{\frac{1-a}{2}} [(a+3)(a+1)^2(2a)^{-1} \cdot 2^a \cdot \Gamma(a+1)(1-r)^{-a} + + A_3(a)(1-r)^{-a+\frac{1}{2}}]$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité (5) en y remplaçant g par $z^a g$ et nous obtenons le résultat suivant:

VI. *Si* $f(z) = a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z| < 1$ *et si* $D^a [f(z)]$ *est la dérivée généralisée de Riemann-Liouville:*

$$D^a [f(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-a)} a_n z^{n-a}$$

on a pour $r < 1$ *et* $a > 0$:

$$I_1(r, D^a f) < r^{\frac{1}{2}-a} I_1(\sqrt{r}, f) \cdot [2^{a-1} a^{-1} (a+3)(a+1)^2 \Gamma(a+1)(1-r)^{-a} + + A_3(a)(1-r)^{-a+\frac{1}{2}}]$$

où $A_3(a)$ *ne dépend que de* a. *Si* $a = \frac{1}{2}$ *il faut remplacer* $(1-r)^{-a+\frac{1}{2}}$ *par* $[\log(1-r^{-1}]^{\frac{1}{2}}$, *si* $a < \frac{1}{2}$ *il faut remplacer* $(1-r)^{-a+\frac{1}{2}}$ *par* 1.

Remarque. D'après J. E. Littlewood, (Proc. Lond. Mat. Soc. (2), 23, 1925) *si* $f(z)$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$ et si l'on a:

$$I_1(r, f) < K(1-r)^{-s} \qquad (s > 0) \tag{6}$$

pour une valeur déterminée de r $(0 < r < 1)$ on a aussi:

$$I_1(r, f') < A(s)\, K(1-r)^{-s-1} \tag{7}$$

Il résulte de l'énoncé VI et de la remarque du début de ce § que ce résultat se généralise aux classes de fonctions $f(z)$ qui satisfont à une inégalité de la forme: $|f'(z) : f(z)| < C(1-r)^{-1}$ où C ne dépend pas de la fonction particulière choisie (par exemple à la classe de fonctions multivalentes et qui ne s'annulent pas ou bien à la classe de fonctions dont l'argument reste borné). M. Littlewood a cependant montré que dans le cas général l'inégalité (6) n'entraine pas (7), il n'est donc pas possible de remplacer en général dans l'énoncé VI $I_1(\sqrt{r}, f)$ *par* $I_1(r, f)$ multipliée par une constante. Supposons maintenant que $-1 < a < 0$. Puisque $\frac{d}{dz}\left[D^a f(z)\right] = D^{a+1} f(z)$ et que

$I_1(r, D^{\alpha+1} f)$ est une fonction croissante de r on a, en tenant compte de l'énoncé VI dans lequel α est remplacé par $(\alpha+1)$:

$$I_1(r, D^\alpha f) \leqslant \int_0^r I_1(r, D^{\alpha+1} f)\, dr \leqslant$$

$$\leqslant I_1(\sqrt{r}, f) \int_0^r r^{\frac{1}{2}-\alpha} \left[A_4(\alpha)\, 1-r)^{-\alpha-1} + A_5(\alpha)(1-r)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \right] dr$$

$$\leqslant A_6(\alpha)\, I_1(\sqrt{r}, f)$$

Cependant, un théorème du à Hardy, Littlewood et Landau[11]) conduit à un résultat meilleur. D'après une inégalité de l'article cité on a, en effet, en particulier, lorsque $-1 < \alpha < 0$:

$$I_1(r, D^\alpha f) \leqslant K[I_1(r, D^{-1} f)]^\alpha [I_1(r, f)]^{1-\alpha}$$

où K est une constante numérique. Or I_1 étant une fonction croissante de r on a évidemment:

$$I_1(r, D^{-1} f) \leqslant I_1(r, f),$$

on obtient donc l'énoncé suivant:

VII. *Si dans les conditions du théorème* VI α *est négatif, on a pour* $r < 1$:

$$I_1(r, D^\alpha f) \leqslant K\, I_1(r, f)$$

où K est une constante numérique.

Lorsque α est un entier négatif on a $K = 1$ et il est probable qu'il en est de même dans le cas général,

§ 6. Supposons maintenant que $g(z) = e^{i\Theta_0} + e^{i\Theta_1} z + \ldots + e^{i\Theta_n} z^n + \ldots$ où les Θ_n sont tous réels, on aura: $I_1(r, g) < I_2(r, g) = = [1 + r^2 + r^2 + \ldots + r^{2n} + \ldots]^{\frac{1}{2}} = (1-r^2)^{-\frac{1}{2}}$, donc l'inégalité (5) fournit l'énoncé suivant:

VIII. *Si* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z| < 1$ *et si* $H(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$ *où* $|b_n| = |a_n|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *on a pour* $0 < r < 1$:

$$I_1(r, H) < I_1(\sqrt{r}, f)(1-r)^{-\frac{1}{2}}$$

[11]) Math. Zeitschrift, 39, 1935, p. 677—95.

Dans cette inégalité analogue à l'inégalité (3) de l'énoncé II l'exposant $\frac{1}{2}$ ne peut etre remplacé par un nombre plus petit. En effet, d'après un théorème de Hardy, complété par Sidon[12]) $f(z)=a_0+$ $+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots$ étant holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et la série $|a_0|^2+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2+\ldots$ étant divergente on peut trouver des nombres réels Θ_n de manière que l'on ait $(b_n=a_n e^{i\Theta_n})$: $\mathrm{I}_1(r, H)>$ $>\mathrm{I}_2(r, f)\,[m(r)]^{-1}$ où $m(r)$ est une fonction qui augmente indéfiniment lorsque $r\to 1$ mais arbitraiment lentement. En posant $a_n=1$ $(n=0,1,2,\ldots)$ on trouve que $\mathrm{I}_1(\sqrt{r}, f)$ ne dépasse pas $A \log (1-r)^{-1}$ où A est une constante (cf. p. ex. les calculs qui suivent l'énoncé IV), on a d'autre part $\mathrm{I}_2(r, f)=(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}$. Supposons que dans (8) l'exposant $\frac{1}{2}$ soit remplacé par $\frac{1}{2}-\varepsilon$ où $\varepsilon>0$, d'après le théorème de Hardy-Sidon on aura donc: $(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,[m(r)]^{-1}<A\,(1-r)^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \log (1-r)^{-1}$ et par suite $m(r)>(1-r)^{-\frac{\varepsilon}{2}}$, si r est assez voisin de 1. Il suffit de choisir pour $m(r)$ un fonction qui croit assez lentement pour aboutir à une contradiction.

Il résulte d'une comparaison des énoncés II et VII que l'on pourra probablement remplacer dans l'inégalité (8) les moyennes I_1 par les moyennes I_p où $p\geqslant 1$ et

$$\mathrm{I}_p(r, f)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

Supposons maintenant que $f(z)=a_0+\ldots+a_n z^n+\ldots$ et $g(z)=$ $=\bar{a}_0+\ldots+\bar{a}_n z^n+\ldots$ où $\bar{a}_n$ désigne le nombre complexe conjugué de a_n. L'inégalité (5) fournit l'énoncé suivant:

VIII. *Si* $f(z)=a_0+\ldots+a_n z^n+\ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z|<1$ *et si* $F(z)=|a_0|^2+\ldots+|a_n|^2 z^n+\ldots$ *on a pour* $r<1$:

$$\mathrm{I}_1(r, F)\leqslant \mathrm{I}_1^2(\sqrt{r}, f)$$

L'interêt de cet énoncé consiste en ce qu'il fournit une limite inférieure de $\mathrm{I}_1(r, f)$, limite exprimée par la moyenne d'une fonction

[12]) Sidon, Acta Szeged. 7 (1935) p. 173—4.

à coefficients tayloriens positifs, souvent plus aisément calculable. En voici deux exemples. Supposons d'abord que $|a_n|=1$ $(n=0, 1,\dots)$, donc que $F(z)=(1-z)^{-1}$. On a d'abord $I_1(r,f)\leqslant I_2(r,f)=(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}$ D'autre part on a $I_1(r,F)=[I_2(r,(1-z)^{-\frac{1}{2}})]^2=1+c_1^2r+\dots+c_n^2r^{2n}+\dots$ où $c_n=(1.3.5\dots 2n-1):(2^n n!)$. On trouve sans peine que $c_n>2^{-1}n^{-\frac{1}{2}}$, il en résulte que $I_1(r,F)>1+4^{-1}\log(1-r^2)^{-1}$ et en tenant compte de l'énoncé VIII on trouve le résultat suivant:

IX. *Si* $f(z)=a_0+\dots+a_nz^n+\dots$ *et si* $|a_n|=1$ $(n=0,1,\dots)$ *on a pour* $0<r<1$:

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\log(1-r^4)^{-1}}<I_1(r,f)\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

La limite inférieure ne peut être beaucoup améliorée, car il résulte des calculs du § 5 (dans lesquels on pose $k=1$) que l'on a $I_1[r,(1-z)^{-1}]<1+\log(1-r)^{-1}$. D'autre part le théorème de Hardy-Sidon cité au renvoi[12]) montre que la limite supérieure de $I_1(r,f)$ ne peut être améliorée, sauf peut être en ce qui concerne un facteur constant. Supposons maintenant que $|a_n|=n^{\alpha}$, où $\alpha>0$ $(n=0,1,\dots)$, posons $F(z)=z+2^{2\alpha}z^2+\dots+n^{2\alpha}z^n+\dots$ et $\Phi(z)=F(z)+z(1-z)^{(-2\alpha+1)}=b_1z+\dots+b_nz^n+\dots$ On trouve sans peine que les coefficients b sont d'ordre de $n^{2\alpha-1}$ d'où il résulte que $I_1(r,\Phi)<I_2(r,\Phi)=[|b_1|^2r^2+\dots+|b_n|^2r^{2n}+\dots]^{\frac{1}{2}}<A_7(\alpha)(1-r)^{-2\alpha+\frac{1}{2}}$ (Si $\alpha=\frac{1}{4}$ il faut remplacer $(1-r)^{-2\alpha+\frac{1}{2}}$ par $[\log(1-r)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$, si $\alpha<\frac{1}{4}$ il faut remplacer $(1-r)^{-2\alpha+\frac{1}{2}}$ par 1). D'autre part un calcul analogue à celui qui a été fait dans la démonstration du théorème IX montre que l'on a $I_1(r,z(1-z)^{-2\alpha-1})>A_8(\alpha)(1-r)^{-2\alpha}$, on a donc aussi $I_1(r,F)>A_9(\alpha)(1-r)^{-2\alpha}$. En appliquant l'énoncé VIII et en tenant compte d'autre part, de l'inégalité $I_1(r,f)<I_2(r,f)=(F(r^2))^{\frac{1}{2}}=(r^2+\dots+n^{2\alpha}r^{2n}+\dots)^{\frac{1}{2}}$ on obtient l'énoncé suivant:

X. *Si* $f(z)=a_0+\dots+a_nz^n+\dots$ *et* $|a_n|=n^{\alpha}$ $(\alpha>0, n=0,1,\dots)$ *on a pour* $0<r<1$:

[12]) Sidon, Acta Szeged. 7 (1935) p. 173—4.

$$\frac{A_{10}(\alpha)}{(1-r)^\alpha} < \mathrm{I}_1(r, f) < \frac{A_{11}(\alpha)}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

où $A_{10}(\alpha)$ et $A_{11}(\alpha)$ ne dépendent que de α.

L'exemple de la fonction $f(z) = z + 2^\alpha z^2 + \ldots + n^\alpha z^n + \ldots$ montre que dans cet énoncé l'exposant α ne saurait être remplacé par un nombre plus grand et le théorème cité de Hardy-Sidon montre que l'exposant $\alpha + \frac{1}{2}$ ne peut être abaissé.

§ 7. Une dérnière application que nous ferons de la formule de Parseval consiste en un critère de multivalence dans un domaine. Une fonction méromorphe dans un domaine est dite *multivalente d'ordre p ou p-valente* dans ce domaine si elle y prend toute valeur p fois au plus et une valeur exactement p fois[13]. Si toutes les fonctions $f(z) - P(z)$ où $P(z)$ est un polynome arbitraire de dégré $(p-1)$ au plus sont multivalentes d'ordre p dans un domaine $f(z)$ est dite *complètement p-valente* dans ce domaine. Nous allons utiliser dans les démonstrations les théorèmes suivants:

Théorème d'Ozaki[14]):

A. *Pour qu'une fonction holomorphe dans un domaine D et qui ne se réduit pas à un polynome de degré $< (p-1)$ soit complètement p-valente dans D il faut et il suffit que l'expression*

$$Q_f(z_0, \ldots, z_p) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \ldots z_0^{p-1} & f(z_0) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 1 & z_p \ldots z_p^{p-1} & f(z_p) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & z_0 \ldots z_0^p \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1 & z_p \ldots z_p^p \end{vmatrix}$$

dite „différence divisée d'ordre p" soit différente de zéro pour tous les systèmes de valeurs $z_0, z_1, \ldots, z_p$ appartenant à D[15]).

[13]) cf; P. Montel, Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, Paris, Gautiers-Villars, 1933.

[14]) Science Reports of Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, 3, № 40, 1935.

[15]) Lorsque k de variables deviennent égales à z_i on doit remplacer dans Q_f $(k-1)$ des k lignes correspondantes des deux déterminants par celles que l'on obtient en substituant aux valeurs des fonctions $1, z, \ldots, z^{p-1}, f(z)$ celles des dérivées d'ordre $1, 2, \ldots (k-1)$ prises pour la valeur z_i; il suffit d'ailleurs de considérer les valeurs $z_0, \ldots, z_p$ toutes distinctes entre elles.

Théorème de Montel[16]):

B. *Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine D, on a*

$$Q_f(z_0, \dots, z_p) = \frac{Z_p}{p!}$$

Z_p étant l'affixe d'un point du domaine de convexité de l'ensemble F_p des valeurs prises par $f^{(p)}(z)$ lorsque z décrit le polygone de convexité des points $z_0, z_1, \dots, z_p$[17]).

Remarque. De l'expression de $Q_f(z_0, \dots, z_p)$ il résulte immédiatement l'identité:

$$Q_{f(kz)}(z_0, \dots, z_p) = k^p Q_{f(z)}(kz_0, kz_1, \dots, kz_p)$$

Nous allons établir d'abord l'énoncé suivant:

X. *Supposons que les fonctions $f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n + \dots$ et $g(z) = b_0 + \dots + b_n z^n + \dots$ soient holomorphes dans les cercles $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$ respectivement et qu'elles satisfassent dans ces cercles à des inégalités $|\arg e^{i\lambda} f(z)| < \alpha\pi$ et $|\arg e^{i\mu} g^{(p)}(z)| < \beta\pi$ où λ et μ sont réels et $\alpha + \beta \leqslant \frac{1}{2}$. Dans ces conditions la fonction:*

$$H(z) = H(z^p f, g) = a_0 b_p z^p + a_1 b_{p+1} z^{p+1} + \dots + a_n b_{p+n} z^{p+n} + \dots$$

est holomorphe et complètement p-valente dans le cercle $|z| < R_1 R_2$.

Or peut évidement supposer que $\lambda = \mu = 0$.

D'après la formule de Parseval on a:

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u^p f(u)\, g\left(\frac{x}{u}\right) \frac{du}{u}$$

où C est la circonférence $|u| = R_1 - \varepsilon$, donc en tenant compte de l'expression de Q_f on obtient l'égalité:

$$Q_H(z_0 \dots z_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u^p f(u)\, Q\, g\left(\tfrac{z}{u}\right)(z_0 \dots z_p) \frac{du}{u}$$

[16]) Ann. di Pisa, (2), 1, 1932. Journ. de Math. pures et appl, 16. 1937,

[17]) Le domaine (le polygone) de convexité d'un ensemble E est le plus petit domaine fermé (polygone) convexe qui contient tous les points de E. On suppose que polygone de convexité des points $z_0, \dots, z_p$ est intérieur à D.

et d'après la remarque qui suit l'énoncé B de M. Montel:

$$Q_H(z_0 \dots z_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(u)\, Q\, g\left(\frac{z_0}{u} \dots \frac{z_p}{u}\right) \frac{du}{u}$$

donc en tenant compte de l'énoncé B:

$$Q_H(z_0 \dots z_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(u) \frac{Z_p(u)}{p!} \frac{du}{u}$$

où $Z_p(u)$ appartient au domaine de convexité de l'ensemble des valeurs prises par $g^{(p)}(z)$ lorsque z décrit le polygone de convexité des points $z_0 u^{-1}, \dots, z_p u^{-1}$.

Or si $|z_i| < R_1 R_2$ pour $i = 0, 1, \dots, p$ et si ε est assez petit on a $|z_i u^{-1}| < R_2$ donc $|\arg Z_p(u)| < \pi\beta$. D'autre part on a $|\arg f(u)| < \pi\alpha$ et du: $(2\pi iu) > 0$, donc $\arg Q_H(z_0, \dots, z_p) < \pi(\alpha+\beta) \leqslant \frac{\pi}{2}$ et par suite $Q_H(z_0, \dots, z_p) \neq 0$, ce qui achève la démonstration, en vertu de l'énoncé A de Ozaki.

Remarques. En appliquant l'énoncé de M. Montel à la fonction $H(z)$ et en faisant tendre tous les points $z_0 \dots z_p$ vers un même point z on voit, d'après ce qui précède, que dans le cercle $|z| < R_1 R_2$ on a $|\arg H^{(p)}(z)| \leqslant \pi(\alpha+\beta)$. Il en résulte, d'après un théorème de W. Rogosinski[18]) que $H(z)$ et ses dérivées d'ordre $\leqslant (p-1)$ sont bornées dans le même cercle (de même, $g(z)$ est bornée dans le cercle $|z| < R_2$). Comme on a:

$$z^{-p} H(z) = \int_0^z \frac{du_1}{z} \int_0^{u_1} \frac{du_2}{z} \dots \int_0^{u_{p-1}} H^{(p)}(u_p)\, du_p$$

où les intégrales sont prises suivant le segment joignant l'origine au point z on a aussi $|\arg[H(z) z^{-p}]| < \pi(\alpha+\beta)$[19])

Voici une application du théorème IX:

[18]) Math. Zeitschrift, 17, 1923.

[19]) Cette inégalité peut aussi s'établir directement, car en posant $g_1(z) = g(z) - b_0 - \dots - b_{p-1} z^{p-1}$ on trouve que l'inégalité $|\arg g^{(p)}(z)| < \beta\pi$ entraîne la suivante: $|\arg g_1(z) z^{-p}| < \beta\pi$. Or on a $H(z^{-p} f, g) = z^{-p} H(f, z^{-p} g_1)$, il suffit donc d'appliquer l'énoncé III.

Xa. *Si* $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ *est holomorphe dans le cercle* $|z| < R$ *et si l'on a:*

$$\left| \arg \frac{d^p [z^p f(z)]}{dz^p} \right| < \frac{\pi}{4}$$

dans ce cercle, alors la fonction:

$$H(z) = H(z^p f, z^p f) = a_0^2 z^p + \ldots + a_{n-p}^2 z^n + \ldots$$

est complètement p-valente dans le cercle $|z| < R^2$.

En effet, il résulte de l'inégalité de l'énoncé que l'on a aussi $|\arg f(z)| < \frac{\pi}{4}$ (cf. les remarques qui précedent), il suffit donc d'appliquer l'énoncé X en y posant $g(z) = z^p f(z)$.

L'énoncé *Xa* est à rapprocher de l'énoncé suivant du à S. Ozaki (loc. cit. sous [13])) et qui résulte immédiatement des théorèmes A et B: „Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine convexe D et si l'on a

$$\left| \arg \frac{d^p [z^p f(z)]}{dz^p} \right| < \frac{\pi}{2}$$

dans ce domaine, alors la fonction $z^p f(z)$ est complètement p-valente dans D". [20])

§ 8. On peut étendre les résultats précedants en partant de la remarque que la somme des deux quantités complexes qui se trouvent dans un même angle de centre origine et d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{2}$ appartient aussi à cet angle et en utilisant l'égalité évidente:

$$Q_{f_1+f_2+\ldots+f_n}(z_0 \ldots z_p) = Q_{f_1}(z_0 \ldots z_p) + Q_{f_2}(z_0 \ldots z_p) + \ldots + Q_{f_n}(z_0 \ldots z_p),$$

on obtient ainsi la généralisation suivante de l'énoncé X:

Xb. *Supposons que les fonctions* $f_1(z), \ldots f_n(z)$ *soient holomorphes dans le cercle* $|z| < R_1$, *que les fonctions* $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ *soient holomorphes dans le cercle* $|z| < R_2$ *at que ces fonctions satisfassent dans ces cercles à des inégalités* $|\arg e^{i\lambda} f_i(z)| < \alpha_i \pi$ *et* $|\arg e^{i\mu} g_i^{(p)}(z)| <$

---

[20]) L'énoncé ci-dessus ne constitute qu'un cas particulier du théorème de M. Ozaki, pour obtenir ce dernier il faut remplacer dans l'énoncé du texte $z^p f(z)$ par $f(z)$.

$<\beta_i\pi$ *où* λ *et* μ *sont réels et* $\alpha_i+\beta_i \leqslant \frac{1}{2}$ $(i=1,2\dots n)$. *Dans ces conditions la fonction:*

$$H(z^p f_1, g_1)+\ldots+H(z^p f_n, g_n)$$

est holomorphe et complètement p-valente dans le cercle $|z|<R_1R_2$.

Voici un exemple d'application de l'énoncé Xb:

Supposons que $f(z)=a_0+\ldots+a_n z^n+\ldots$ soit holomorphe dans le cercle $|z|<R$, posons $f_1(z)=[f(z)-a_0]\,z^{-1}=a_1+a_2z+\ldots$ et $f_2(z)=$ $=[f_1(z)-a_1]\cdot z^{-1}=a_2+a_3z+\ldots$ et supposons que l'on ait dans le cercle $|z|<R$ $|\arg f(z)|<\alpha_0\pi$, $|\arg f_1(z)|<\alpha_1\pi$, $|\arg f_1^{(p)}(z)|<\beta_1\pi$ *et* $\arg|f_2^{(p)}(z)-\pi|<\beta_2\pi$ *où* $\alpha_0+\beta_2\leqslant\frac{1}{2}$ *et* $\alpha_1+\beta_1\leqslant\frac{1}{2}$. Dans ces conditions la fonction:

$$D(z)=\sum_{n=p}^{\infty}(a_{n-p}a_{n+2}-a_{n+1}a_{n-p+1})\,z^n=\frac{1}{2\pi i}\int_C u^p \begin{vmatrix} f(u) & f_1(u) \\ f_1\left(\frac{x}{u}\right) & f_2\left(\frac{x}{u}\right)\end{vmatrix}\frac{du}{u}$$

où C est la circonférence $|u|=R-\varepsilon$ est holomorphe et complètement p-valente dans le cercle $|z|<R$ [21]).

§ 9. On peut obtenir d'autre extensions en répétant plusieurs fois les raisonnements employés. En voici quelques exemples.

XI. *Considérons les fonctions* $f(z)=a_0+\ldots a_n z^n+\ldots$, $g(z)=$ $=b_0+\ldots+b_n z^n+\ldots$ *et* $k(z)=c_0+\ldots+c_n z^n+\ldots$ *holomorphes dans les cercles* $|z|<R_1$, $|z|<R_2$ *et* $|z|<R_3$ *respectivement. Supposons que l'on ait dans ces cercles* $|\arg e^{i\lambda} f(z)|<\alpha\pi$, $|\arg e^{i\mu} g^{(p)}(z)|<\beta\pi$, $|\arg e^{i\nu} k(z)|<\gamma\pi$ *où* λ, μ *et* ν *sont réels et* $\alpha+\beta+\gamma\leqslant\frac{1}{2}$. *Dans ces conditions la fonction:*

$$H_1(z)=H(z^p f, g, z^p k)=a_0 b_p c_0 z^p+\ldots+a_{n-p} b_n c_{n-p} z^n+\ldots$$

est holomorphe et complètement p-valente dans le cercle $|z|<R_1R_2R_3$ [22])

On peut supposer que $\lambda=\mu=\nu=0$. En posant $H(z)=H(z^p f, g)$ nous avons vu (cf. l'énoncé X et les remarques du § 7) que $H(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<R_1R_2$ et que l'on a dans ce

---

[21]) On a considéré des formules analogues à la formule de Parseval dans lesquelles figurent sous signe d'une intégrale multiple des déterminants analogues à celui qui vient d'être écrit, cf. Encyklopädie IIC4 Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen von L. Bieberbach, p. 473.

cercle $|\arg H^{(p)}(z)| < (\alpha+\beta)\pi$. Or on a $H_1(z) = H[H(z), z^p k]$ en appliquant donc encore une fois l'énoncé X on obtient le théorème XI.

XII. *Considérons les fonctions* $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, $g(z) = b_0 + \ldots + b_n z^n + \ldots$ *et* $k(z) = c_0 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ *holomorphes dans les cercles* $|z| < R_1$, $|z| < R_2$ *et* $|z| < R_3$ *respectivement. Supposons que l'on ait dans ces cercles* $|\arg e^{i\lambda} f(z)| < \alpha\pi$, $|\arg e^{i\mu} g^{(p)}(z)| < \beta\pi$, $|\arg e^{i\nu} k^{(p)}(z)| < \gamma\pi$ *où* λ, μ *et* ν *sont réels et* $\alpha+\beta+\gamma \leqslant \frac{1}{2}$. *Dans ces conditions la fonction:*

$$H_2(z) = H(z^p f, g, k) = a_0 b_p c_p z^p + \ldots + a_{n-p} b_n c_n z^n + \ldots$$

est holomorphe et complètement p-valente dans le cercle $|z| < R_1 R_2 R_3$[23]).

Supposons que $\lambda = \mu = \nu = 0$. En posant toujours $H(z) = H(z^p f, g)$ on trouve (cf. les remarques du § 7) que $H(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < R_1 R_2 R_3$ et que l'on a dans ce cercle $|\arg[H(z) z^{-p}]| < (\alpha+\beta)\pi$. Or on a $H_2(z) = H[H(z), k] = H\{z^p [H(z) z^{-p}], k\}$, donc en appliquant l'énoncé X on obtient le théorème XII.

Il est clair comment on pourra généraliser en introduisant un nombre quelconque des fonctions $f(z)$, $g(z)$, $k(z)$, $l(z)$, $m(z)$... et en formant, comme au § 8, la somme d'un nombre quelconque des fonctions analogues aux fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ du § 9.

Streszczenie.

Podaję kilka zastosowań klasycznego wzoru Parsevala do badania funkcji:

$$H(f, g) = a_0 b_0 + \ldots + a_n b_n z^n + \ldots$$

gdy dane są funkcje:

$$f(z) = a_0 + \ldots + a z^n + \ldots \text{ oraz } g(z) = b_0 + \ldots + b_n z^n +, \ldots$$

odpowiednio holomorficzne w kołach $|z| < R_1$ i $|z| < R_2$.

---

[22]) Il résulte de la démonstration (cf. les remarques du § 7) que l'on a dans le cercle $|z| < R_1 R_2 R_3$, $|\arg H_1^{(p)}(z)| < (\alpha+\beta+\gamma)\pi$ et aussi $|\arg[z^{-p} H_1(z)]| < (\alpha+\beta+\gamma)\pi$.

[23]) Il résulte de la démonstration (cf. les remarques du § 7) que l'on a dans le cercle $|z| < R_1 R_2 R_3$, $|\arg H_2^{(p)}(z)| < (\alpha+\beta+\gamma)\pi$ et aussi $|\arg[z^{-p} H_2(z)]| < (\alpha+\beta+\gamma)\pi$.

I tak np. jeśli $|\arg f| \leqslant \alpha\pi$, $|\arg g| \leqslant \beta\pi$, $\alpha+\beta < \frac{1}{2}$ to $|\arg H| \leqslant (\alpha+\beta)\pi$. Jeśli $R_1 = R_2 = 1$ to średnia modułu H wzdłuż koła $|z| = r < 1$ nie przekracza iloczynu średnich modułów f i g wzdłuż koła $|z| = \sqrt{r}$. Korzystając z tej uwagi badam wpływ różniczkowania rzędu ułamkowego albo też zmiany wyłącznie argumentów współczynników Taylora na zmianę wartości średniej modułu. W ostatniej części pracy podaję kryterium dostateczne na to by funkcja H $(z^p f, g)$ była p-listną w kole $|z| < R_1 R_2$.