ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. IV, 3 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego II Wydz. Mat.-Przyr. U.M.C.S.
Kierownik: prof. dr Jan Mikusiński.

Czesław RYLL-NARDZEWSKI

Sur la dérivée logarithmique des fonctions monotones.

O pochodnej logarytmicznej funkcji monotonicznych.

M. Biernacki a démontré le théorème suivant [1]):

Si la fonction $y(x)$ non identiquement nulle et satisfaisant au point x_0 aux conditions initiales non négatives $y^{(i)}(x_0) \geqslant 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$) satisfait pour tous $x \geqslant x_0$ à l'équation différentielle:

$$y^{(n)}(x) = B(x)\, y(x), \text{ où } 0 < B(x) \leqslant A(x),$$

les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ étant continues et $A(x)$ étant non décroissante, alors les fonctions $u_i(x)$, définies par la formule

$$u_i(x) = \frac{y^{(i)}(x)}{y^{(i-1)}(x)} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

satisfont aux inégalités:

$$[u_1(x)\, u_2(x) \ldots u_k(x)]^{1/k} \leqslant n(n-1) \ldots (k+1)\,[A(x)]^{1/n} \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Nous allons démontrer que, dans le cas où $A(x) = B(x)$, le coefficient $n(n-1) \ldots (k+1)$ peut être remplacé par une constante C qui ne dépend ni de n, ni de k. On peut poser $C = 7{,}6$.

Théorème. Considérons l'équation différentielle

$$y^{(n)}(x) = A(x)\, y(x) \qquad (x \geqslant x_0), \tag{2}$$

où $A(x)$ est positive, continue et non décroissante pour $x \geqslant x_0$. Si $y(x)$ est une intégrale de cette équation (non identiquement nulle) qui satisfait aux

---

[1]) Présenté au V Congrés Polonais de Mathématique à Cracovie (juin 1947) mais ne pas encore publié. M. Biernacki supposait que son théorème pourrait être amélioré.

conditions initiales non négatives et si les fonctions $u_i(x)$ sont définies par les formules (1), on a les inégalités:

$$(3) \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{u_i(x)}{u_{i-1}(x)} \leqslant \frac{n-i}{n-i-1} \qquad (i=1,\ldots, n-2), \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \leqslant 2,$$

$$(4) \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{[u_1(x)\ldots u_k(x)]^{1/k}}{[A(x)]^{1/n}} \leqslant \frac{2^{1/n}(n-1)^2}{[(n-1)!]^{1/n}[(n-1)\ldots(n-k)]^{1/k}} < 7{,}6,$$
$$(k=1,\ldots, n-1).$$

Démonstration. Nous pouvons évidemment supposer que $x_0=0$. $\sum_{1}^{n-1} |y^{(i)}(0)| > 0$ et que par conséquent la fonction $y(x)$ ainsi que ses dérivées jusqu'au n-ième ordre sont positives et croissantes pour tous les $x>0$. Remarquons d'abord que, $A(x)$ étant non décroissante, on a

$$(5) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{y^{(i)}(x)} = 0 \qquad (i=0,\ 1,\ldots,\ n)$$

quel que soit le polynôme $Q(x)$. Cette formule interviendra dans la démonstration de l'inégalité (3).

En intégrant $n-i$ fois l'équation (2), nous obtenons

$$(6) \qquad y^{(i)}(x) = Q(x) + \frac{1}{(n-i-1)!}\int_0^x A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i-1}\,ds$$
$$(i=0,1,\ldots,n-1).$$

où $Q(x)$ est un polynôme. La formule précédente et la formule (5) donnent les expressions asymptotiques suivantes pour les fonctions $y^{(i)}(x)$:

$$(7) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{y^{(i)}(x)}\int_0^x A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i-1}\,ds = (n-i-1)! \qquad (i=0,\ldots,n-1).$$

En posant

$$f(s) = [A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i-2}]^{1/2} \quad \text{et} \quad g(s) = [A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i}]^{1/2},$$

on trouve d'après l'inégalité de Schwarz

$$\Big[\int_0^x f(s)\,g(s)\,ds\Big]^2 \leqslant \int_0^x f^2(s)\,ds \cdot \int_0^x g^2(s)\,ds$$

la formule suivante:

$$\frac{\Big[\int_0^x A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i-1}ds\Big]^2}{\Big[\int_0^x A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i-2}ds\Big]\Big[\int_0^x A(s)\,y(s)\,(x-s)^{n-i}ds\Big]} \leqslant 1 \quad (i=1,\ldots,n-2).$$

Cette formule entraîne, en vertu des formules (7) et (1), les inégalités (3):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u_i(x)}{u_{i-1}(x)} \leqslant \frac{n-i}{n-i-1} \qquad (i=1,\ldots,n-2)\,.$$

Nous démontrerons maintenant que la dernière des inégalités (3) est aussi vraie. On voit, en tenant compte des formules (1), (2) et (7), qu'il suffit de vérifier l'inégalité suivante:

$$\Big[\int_0^x A(s)\,y(s)\,ds\Big]^2 \leqslant 2\,A(x)\,y(x)\int_0^x A(s)\,y(s)(x-s)\,ds.$$

La fonction $A(x)\,y(x)$ étant croissante, on a

$$\Big[\int_0^x A(s)\,y(s)\,ds\Big]^2 = 2\int_0^x A(s)\,y(s)\,ds\int_0^s A(t)\,y(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\,A(x)\,y(x)\int_0^x ds\int_0^s A(t)\,y(t)\,dt =$$

$$= 2\,A(x)\,y(x)\int_0^x A(s)\,y(s)\,(x-s)\,ds\,,$$

ce qui achève la démonstration des inégalités (3).

Les fonctions $u_i(x)$ satisfont, en vertu des formules (1) et (2), à l'égalité

$$u_1(x)\ldots u_n(x) = A(x).$$

Cette égalité, ainsi que les inégalités (3), fournissent, après quelques simples transformations algébriques, l'inégalité suivante:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{[u_1(x)\dots u_k(x)]^{1/k}}{[A(x)]^{1/n}} \leqslant \frac{2^{1/n}(n-1)^2}{[(n-1)!]^{1/n}[(n-1)\dots(n-k)]^{1/k}} = C_{n,k}$$

$$(k=1,\dots,n-1).$$

On trouve facilement que

$$C_{n,k} \leqslant 2^{1/n}\left\{\frac{n-1}{[(n-1)!]^{1/n}}\right\}^2 \qquad (k=1,\dots,n-1). \tag{8}$$

Le membre droit de l'inégalité précedente tend vers e^2 pour $n\to\infty$. Le coefficient $C_{n,k}$ est donc borné par une constante C qui ne dépend ni de n, ni de k.

En utilisant la formule de Stirling et l'inégalité (8) on peut établir que

$$C < 7,6 .$$

Streszczenie.

Jeśli $y(x)$ jest całką równania różniczkowego

$$y^n(x) = A(x)\,y(x) ,$$

w którym $A(x)$ jest funkcją ciągłą, dodatnią i niemalejącą dla $x \geqslant x_0$ i jeśli z wyłączeniem znaku równości we wszystkich nierównościach

$$y(x_0) \geqslant 0, \qquad y'(x_0) \geqslant 0, \qquad \dots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) \geqslant 0,$$

to kładąc

$$u_i(x) = \frac{y^{(i)}(x)}{y^{(i-1)}(x)} \qquad (i=1, 2,\dots, n),$$

otrzymujemy nierówności:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{u_i(x)}{u_{i-1}(x)} \leqslant \frac{n-i}{n-i-1} \quad (i=1,\dots, n-2), \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \leqslant 2,$$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{[u_1(x)\dots u_k(x)]^{1/k}}{[A(x)]^{1/n}} \leqslant \frac{2^{1/n}(n-1)^2}{[(n-1)!]^{1/n}[(n-1)\dots(n-k)]^{1/k}} \leqslant 7,6$$

$$(k=1,\dots, n-1).$$

Lublin, 1948.