ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. IV, 1 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego I Wydz. Mat.-Przyr. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

M. BIERNACKI, H. PIDEK et C. RYLL-NARDZEWSKI

Sur une inégalité entre des intégrales définies

O pewnej nierówności spełnionej przez całki określone

Dans l'article „Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,g\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f\,dx\cdot\int_a^b g\,dx$“ (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. 39, 1935, pp. 215—226) G. Grüss a établi le théorème suivant: Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables (au sens de Riemann) dans l'intervalle (a, b) et si l'on a $\varphi \leqslant f(x) \leqslant \Phi$ et $\gamma \leqslant g(x) \leqslant \Gamma$ $(\varphi, \Phi, f, \gamma$ sont des constantes) dans cet intervalle alors l'on a en posant:

$$D(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,g\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f\,dx\cdot\int_a^b g\,dx$$

l'inégalité

$$|D(f,g)| \leqslant {}^1/_4\,(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma),$$

dans laquelle la constante $^1/_4$ ne peut être diminuée.

Le démonstration de G. Grüss (qui s'appuie sur l'inégalité de Schwarz) et assez compliquée. Nous allons exposer une démonstration nouvelle de cette proposition; cette démonstration semble très naturelle, elle conduit en outre immédiatement à la généralisation suivante:

Théorème. *Soient $f(x_1, \dots x_n)$ et $g(x_1, \dots x_n)$ des fonctions intégrables (au sens de Riemann) dans un domaine fermé D qui possède un „volume“ V. Supposons que l'on ait: $a \leqslant f(x_1, \dots x_n) \leqslant A$ et $b \leqslant g(x_1, \dots x_n) \leqslant B$ dans D. Dans ces conditions on a l'inégalité:*

$$\left|\frac{1}{V}\int\limits_D f g\, dx_1 \ldots dx_n - \frac{1}{V}\int\limits_D f\, dx_1 \ldots dx_n \frac{1}{V}\int\limits_D g\, dx_1 \ldots dx_n\right| \leqslant {}^1/_4 (A-a)(B-b).$$

L' égalité est atteinte lorsque D étant partagé en deux domaines D_1 et D_2 chacun de „volume" $^1/_2\, V$, on a $f=a$ dans D_1 et $f=A$ dans D_2, tandis que g est égale soit à b dans D_1 et à B dans D_2, soit à B dans D_1 et à b dans D_2.

Ce théorème résulte immédiatement du lemme suivant:

Lemme. *Si $a_1 \ldots a_n$ et $b_1 \ldots b_n$ sont des nombres réels qui satisfont aux inégalités:*

$$a \leqslant a_i \leqslant A \quad , \quad b \leqslant b_i \leqslant B \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

alors l'on a

$$-(A-a)(B-b)\,E\left(\frac{n}{2}\right)\left[1-\frac{E\left(\frac{n}{2}\right)}{n}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant$$

$$\leqslant (A-a)(B-b)\,E\left(\frac{n}{2}\right)\left[1-\frac{E\left(\frac{n}{2}\right)}{n}\right].$$

Les signe d'égalité ont lieu lorsque $E\left(\frac{n}{2}\right)$ ou $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ des nombres a_i sont égaux à A et les a_i restants égaux à a. Dans ces conditions, si $b_i=b$ lorsque $a_i=A$ et $b_i=B$ lorsque $a_i=a$ le signe d'égalité a lieu dans l'inégalité de gauche, tandis que si $b_i=b$ lorsque $a_i=a$ et $b_i=B$ lorsque $a_i=A$ le signe d'égalité a lieu dans l'inégalité de droite.

Il suffit évidemment de démontrer l'inégalité de droite, car l'inégalité de gauche s'obtient alors en remplaçant a_i par $-a_i$. On voit aussi aisément que la fonction

$$f(a_1,\ldots,a_1, b_1,\ldots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$$

ne change pas lorsque on ajoute à tous les a_i ou à tous b_i une même quantité, on peut donc supposer que $a=b=0 \cdot f$ étant une fonction linéaire de chaque variable séparément, elle ne peut atteindre son maximum que lorsque $a_i=0$ ou A et $b_i=0$ ou B. Cela posé, on peut achever la démonstration des deux manières suivantes:

I (H. Pidek). On voit aisément que l'on a:

$$\begin{aligned} nf = {} & (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) + \ldots + (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) + \\ & + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + \ldots + (a_2 - a_n)(b_2 - b_n) + \\ & + \ldots \\ & + (a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} - b_n) \,. \end{aligned} \tag{1}$$

En effet, le coefficient de a_k dans le membre gauche de l'égalité est égal à

$$nb_k - \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

tandis que le coefficient de a_k dans la i—ème ligne ($i < k$) du membre droit de l'égalité est égal à $-(b_i - b_k)$ et celui dans la k-ième ligne est égal à $\sum_{i=k+1}^{n} (b_k - b_i)$ et l'on a bien

$$\sum_{i=k+1}^{n} (b_k - b_i) - \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - b_k) = nb_k - \sum_{i=1}^{n} b_i \,.$$

Il est clair que lorsque le maximum de f est atteint tous les termes du membre droit du (1) doivent être égaux à 0 ou à AB. Supposons que $a_i = A\,(i = 1, 2, \ldots, p)$ et $a_i = 0\,(i = p+1, \ldots, n)$. On voit que lorsque $p = 1$, $(n-1)$ termes du membre droit de (1) sont égaux AB, tandis que les autres termes s'annulent; lorsque $p = 2$, $2(n-2)$ termes sont égaux à AB; dans le cas général $p(n-p)$ termes sont égaux à AB. Or, la fonction $x(n-x)$ atteint son maximum dans l'intervalle $0 < x < n$ pour $x = \frac{n}{2}$, donc si n est pair il faut poser $p = \frac{n}{2}$ et si n est impair il faut poser $p = \frac{n-1}{2}$; l'énoncé du lemme en résulte de suite.

II (C. Ryll-Nardzewski)

En supposant toujours que $a_i = A\,(i = 1, 2, \ldots, p)$, $a_i = 0\,(i = p+1, \ldots, n)$ posons $b_i = B\delta_i$ où $\delta_i = 1$ ou $0\,(i = 1, \ldots, n)$. On a alors:

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n) = AB\left[(\delta_1 + \ldots + \delta_p)\left(1 - \frac{p}{n}\right) - \frac{p}{n}(\delta_{p+1} + \ldots + \delta_n)\right].$$

Il est clair que si p est fixe la dernière expression devient la plus grande lorsque $\delta_1 = \ldots = \delta_p = 1$ et $\delta_{p+1} = \ldots = \delta_n = 0$, elle devient alors égale à

$$AB\left(1 - \frac{p}{n}\right).$$

Supposons maintenant que p varie; l'expression $p\left(1-\frac{p}{n}\right)$ atteint son maximum lorsque $p=E\left(\frac{n}{2}\right)$ ou $p=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ nous avons donc bien:

$$f(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)\leqslant AB\cdot E\left(\frac{n}{2}\right)\left(1-\frac{E\left(\frac{n}{2}\right)}{n}\right).$$

ce qui établit le lemme.

Si l'on fait tendre dans le lemme n vers l'infini on obtient immédiatement, par un passage à la limite, l'énoncé du théorème.[1])

Streszczenie.

G. Grüss udowódnił (Math. Zeitschrift, 39, 1935, str. 215—226), że jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne (w sensie Riemanna) w przedziale (a, b) i spełniaja tamże nierówności $\varphi\leqslant f(x)\leqslant\Phi$, $\gamma\leqslant g(x)\leqslant\Gamma$ to zachodzi nierówność:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b fg\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f\,dx\cdot\int_a^b g\,dx\right|\leqslant{}^1/_4(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma),$$

przy czym stała $^1/_4$ nie może być zmniejszona.

Autorzy otrzymali nowy dowod tego twierdzenia prostszy od dowodu G. Grüssa; dowód ten pozwolił uogólnić twierdzenie na przypadek funkcyj n zmiennych.

[1]) Cet article a été rédigé en 1945. En 1948 J. Karamata a publié un article („*Inégalités relatives aux quotients et à la différence de* $\int fg$ et $\int f\int g$" Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 2, 131—145) dans lequel il généralise l'inégalité de G. Grüss. cf. Math. Rew. 10, 1949, 435. Une autre démonstration simple du théorème de Grüss a été publiée par E. Landau (Mat. Zeit. 39, 742—44) et une généralisation par Knopp dans le même volume.