ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKLODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. III, 2 SECTIO A 1949

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matematyczno Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

Mieczysław Biernacki

Sur les cercles et sur les sphères qui passent par 3 ou 4 points d'un continu[1]).

O kołach i kulach które przechodzą przez 3 lub 4 punkty kontinuum.

1. Nous allons considérer la borne supérieure U et la borne inférieure u de la courbure des cercles (circonférences) qui passent par au moins 3 points d'un continu, de même nous nous occuperons de la borne supérieure W et la borne inférieure w de la courbure des sphères qui passent par au moins 4 points d'un continu. On a évidemment $U \geqslant W$ et $u \geqslant w$. Le but principal de cet article est de contribuer à la résolution du problème suivant: dans quelles conditions les bornes considérées peuvent être atteintes?

Theorème 1. Si la borne U relative à un continu borné est finie ce continu est une courbe de Jordan sans points multiples et rectifiable, ayant pour toute valeur du paramètre une tangente dirigée qui varie continument avec ce paramètre et une courbure partout, sauf au plus pour un ensemble de la mesure nulle des valeurs de la longueur de l'arc[2]).

La borne supérieure U ne peut être atteinte par un cercle qui passe par 3 points distincts de la courbe, à moins que la courbe ne contienne pas un arc de cercle dont la courbure est U, cette borne est donc dans tous les cas atteinte par un cercle tangent à la courbe.

Théorème 2. Si la borne supérieure U est finie et si la courbe dont il est question dans l'énoncé 1 est fermée et ne contient pas un arc de cercle dont la courbure est U la borne U ne peut être

[1]) Les résultats principaux de ce travail ont été publiés (sans démonstrations) dans „Colloqium Mathematicum" (Wrocław) 1, 1, 1947, p. 47—48.

[2]) Je considère la courbure comme la limite du rapport de l'angle d'une tangente voisine et de la longueur de l'arc correspondant. En ce qui concerne la première partie du théorème cf. le travail de A. Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné*, Acta Math. 1930, qui contient des résultats partiellement plus généraux.

atteinte que soit par un cercle C qui passe par un seul point de la courbe, soit par un cercle Γ tangent au point A à la courbe et qui passe par un autre point B, AB étant un diamètre de Γ et la tangente à la courbe en B étant perpendiculaire à ce diamètre. Si la courbe fermée est plane le cercle C est donc limite des cercles qui passent par 3 points de la courbe qui tendent vers un seul, tandis que le cercle Γ est doublement tangent à la courbe aux points diamétralement opposés A et B; les deux cas peuvent se présenter effectivement, dans chacun d'eux aucun point de la courbe ne se trouve pas à l'intérieur du cercle.

Théorème 3. Si la borne inférieure u relative à un continu plan est positive elle ne peut être atteinte par un cercle qui passe par 3 points distincts du continu, à moins qu'il ne contienne pas un arc de cercle dont la courbure est u[3]).

Il y a lieu de remarquer que le théorème 3 est inexact dans le cas de l'espace (cf. le § 4). On en trouve une explication en observant que pour tout continu situé sur une sphère dont la courbure est k on a $u \geqslant k$, tandis qu' un continu plan de l'énoncé 3 se réduit nécessairement à un arc convexe.

Théorème 4. Si le continu est un ovale[4]) *qui possède partout une courbure finie et continue les bornes U et u ne peuvent être atteintes que par des cercles de courbure. U et u sont donc respectivement égales au maximum et au minimum de la courbure*[5]).

Théorème 5. Si la borne supérieure W relative à un continu borné est finie ce continu est une courbe de Jordan sans points multiples et rectifiable ayant pour toute valeur du paramètre une tangente dirigée qui varie continûment avec ce paramètre.

---

[3]) M. S. Gołąb m'a fait remarquer que si $u > 0$ le continu. qui se réduit évidement à un arc convexe est nécessairement contenu dans un cercle dont la courbure est u.

[4]) J'apelle ainsi une courbe plane fermée située à distance finie, dont l'intersection avec toute droite se réduit — si elle n'est pas vide —soit à deux points au plus, soit à un seul segment rectiligne.

[5]) Si l'ovale ne contient pas des arcs de cercles dont les courbures sont U et u les circonférences pour lesquelles les bornes U et u sont atteintes ne passent que par un seul point de l'ovale, tous leurs autres points étant situés respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ovale. En particulier, la courbure de tout cercle qui coupe l'ovale en 3 points est comprise entre le minimum et le maximum de la courbure de l'ovale. Cette assertion a été aussi établie par M. T. Kubota; *Ein Satz über die Eilinien*, Tohoku Mat. Journal 47, (1940), p. 96—98; cf. aussi L. A. Santalo, ibidem 48, (1941) p. 64—67.

Si cette courbe est fermée et ne contient pas un arc situé sur une sphère dont la courbure est W la borne W ne peut être atteinte par une sphère qui passe par 3 points distincts de la courbe; cette borne ne peut être atteinte que soit par une sphère qui passe par un seul point de la courbe, soit par une sphère doublement tangente à la courbe, aux points diamétralement opposés de la sphère; dans les deux cas aucun point de la courbe ne se trouve pas à l'intérieur de la sphère.

Si la courbe n'est pas fermée la deuxième partie de l'énoncé cesse d'être exacte, peut-être qu'il existe cependant toujours une sphère de courbure W tangente à la courbe.

Si le continu est plan W est aussi la borne supérieure de la courbure des cercles qui passent par au moins 4 points du continu. Dans ce cas particulier on peut remplacer partout dans l'énoncé 5 le mot „sphère" par celui du „cercle". La ressemblance de la seconde partie de l'énoncé 5 ainsi modifié avec le théorème 2 s'explique facilement: tout d'abord on voit aisément que lorsque un continu est borné U et W sont finis en même temps. Il résulte alors du théorème 2 que dans le cas d'une courbe plane fermée on a $W = U$. Si la courbe plane n'est pas fermée il est possible que $W < U$ (exemple: la courbe se compose du segment $y = 0$, $0 < x < 1$ et de l'arc contenant $^3/_4$ de la circonférence du rayon 1 tangente aux points (1,0) et (0,1) aux axes et oy respectivement).

Théorème 6. Si la borne inférieure w est positive elle ne peut être atteinte par une sphère qui passe par 4 points distincts du continu, à moins que ce continu ne contienne pas une portion située sur une sphère dont la courbure est w [6]).

2. Dans la démonstration du théorème 1 nous utiliserons quelques lemmes, le premier d'entre eux, bien qu'évident est fondamental:

---

[6]) La portion dont il est question dans l'énoncé est elle même un continu qui contient plus d'un point. Le continu de l'énoncé 6 est nécessairement contenu dans une sphère dont la courbure est w. Une droite arbitraire ne coupe la projection sur un plan quelconque du continu dont il est question dans l'énoncé 6 qu'aux 3 points au plus. Il en résulte que cette projection est la somme de huit arcs convexes au plus placés bout à bout. (cf. A. Marchaud, loc. cit., O. Haupt. *Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung*, Mat. Ann. 1933; Courtand: *Sur les courbes gauches du 3 et 4 ordre en Géométrie finie*, Hermann. Paris 1940).

Lemme 1. Considérons deux cercles Γ et Γ', ayant les mêmes rayons, situés dans le même plan et qui se coupent aux points A et B. Désignons par X le domaine de révolution engendré par la rotation de la partie commune des cercles Γ et Γ' autour de AB et de même par Y le domaine engendré par la rotation de Y la partie de Γ qui n'appartient au Γ' autour de AB. Soit P un point quelconque de l'espace. Si P est situé à l'intérieur de Y la courbure du cercle qui passe par A, B et P est plus grande que celle des cercles Γ et Γ', si P est situé à l'intérieur de X ou bien à l'extérieur à la fois du X et du Y la courbure du cercle qui passe par A, B et P est plus petite que celle des cercles Γ et Γ'.

Lemme 2. Considérons les cercles Γ et Γ' et les domaines X et Y dont il est question dans le lemme 1 et traçons la sphère S dont Γ est un grand cercle. A l'exception d'un arc AMB de Γ qui appartient à la frontière de S et aussi à celle du X tous les points du domaine fermé X sont contenus à l'intérieur de la sphère S. A l'exception de l'arc ANB, de Γ, complémentaire de l'arc AMB, qui appartient à la frontière de S et aussi à celle du Y tous la points de la sphère fermée S sont contenus à l'intérieur du domaine $X+Y$ (domaine engendré par la rotation du segment ANB du cercle Γ autour du AB).

Soit O le centre de la sphère S. Considérons un point P de la frontière du X, point dont la projection sur le plan de Γ est Q et qui provient de la rotation autour du AB d'un point T de l'arc AMB de Γ; désignons enfin par L l'intersection de la droite TQ avec AB et par K le pied de la perpendiculair eabaissée du O sur la droite TL. On a $OP^2 = OQ^2 + LT^2 - LQ^2 = OL^2 + LT^2 + 2\overline{LQ} \cdot KL$ ($\overline{LQ} > 0$ si Q est situé entre L et T et $\overline{LQ} < 0$ dans le cas contraire). Si T est fixe et que Q varie la dernière expression atteint son maximum lorsque $LQ = LT$ c. à. d. lorsque le point Q se confond avec T, alors P se confond aussi avec T, le maximum de OP est donc égal au rayon de la sphère S, la première partie du lemme 2 se trouve ainsi démontrée. La deuxième partie se démontre tout pareillement: considérons un point P de la frontière du $X+Y$, dont la projection sur le plan de Γ est Q et qui provient de la rotation autour du AB d'un point T de l'arc ANB de Γ: L et K ayant la même signification que tout-à-l'heure on trouve que $OP^2 = OL^2 + LT^2 - 2\overline{LQ} \cdot KL$, cette expression atteint son minimum lorsque $\overline{LQ} = LT$ c. à. d. lorsque Q et P se confondent avec T, le minimum de OP est donc égal au rayon de la sphère S.

Passons à la démonstration du théorème 1. Comme $U > W$ la première partie du théorème est, à l'exception de l'assertion relative à la courbure, une conséquence du théorème 5. Pour démontrer cette assertion considérons deux points M_1 et M_2 de la courbe et des tangentes M_1T_1 et M_2T_2. Désignons par $\Delta\varphi_1$ et par $\Delta\varphi_2$ respectivement des angles des tangentes M_1T_1 et M_2T_2 avec M_1M_2 et soit $\Delta\psi$ l'angle qui font ces tangentes entre elles[7]. Traçons le cercle tangent au point M_1 à la droite M_1T_1 et qui passe par le point M_2, soit R son rayon. Nous avons:

$$\frac{\Delta\varphi_1}{M_1M_2} = \frac{\Delta\varphi_1}{2R\sin\Delta\varphi_1} < \frac{\pi}{4R} < \frac{\pi}{4}U$$

et de même

$$\frac{\Delta\varphi_2}{M_1M_2} < \frac{\pi}{4}U\,;$$

or on a $\Delta\psi < \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$, donc il vient $\dfrac{\Delta\psi}{M_1M_2} < \dfrac{\pi}{2}U$ et a fortiori $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s} < \dfrac{\pi}{2}U$ où s désigne la longueur de l'arc de la courbe. α, β et γ étant des cosinus directeurs de la tangente on en conclut aussitôt que les rapports $\Delta\alpha:\Delta s$, $\Delta\beta:\Delta s$ et $\Delta\gamma:\Delta s$ sont bornés. Il en résulte, d'après un théorème connu de H. Lebesgue que les 3 dérivées $\dfrac{d\alpha}{ds}, \dfrac{d\beta}{ds}, \dfrac{d\gamma}{ds}$ existent simultanément, sauf au plus pour un ensemble de mesure nulle des valeurs de s. Soit M_0 un point de la courbe où les 3 dérivées existent et M un point voisin, désignons maintenant par Δs la longueur de l'arc M_0M, par $\Delta\psi$ l'angle que font entre elles des tangentes en M_0 et en M et par $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ des acroissement des cosinus directeurs de la tangente lorsqu'on passe de M_0 à M.

Comme le rapport:

$$\frac{\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\beta}{\Delta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\gamma}{\Delta s}\right)^2}}$$

tend vers 1 et que le dénominateur de ce rapport tend vers une limite lorsque M se rapproche indéfiniment de M_0 on voit bien que

[7]) On suppose tous ces angles aigus.

la courbure existe en M_0. Lorsque M_1 tend vers M_2 le rapport $\Delta\varphi$: sin $\Delta\varphi$, par exemple tend vers 1, on voit donc en reprenant des calculs qui précèdent que la courbure ne surpasse pas U.

Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème. Supposons que la limite U soit atteinte par un cercle Γ qui passe par 3 points A, B et C. Posons $BC = a$, $AC = b$ et considérons des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c symétriques de Γ par rapport aux côtés a, b et c du triangle ABC respectivement. Définissons encore des domaines X_i et Y_i $(i=a,b,c)$ comme X et Y dans le lemme 1 en remplaçant le cercle Γ par Γ_i. Appelons E_i $(i=a,b,c)$ le domaine rempli par des points qui n'appartiennent ni à X_i ni à Y_i et désignons par des lettres barrées des domaines fermés. Soit P un point quelconque de la courbe. En appliquant le lemme 1 aux couples des cercles Γ, Γ_i $(i=a,b,c)$ on voit que le point P doit être situé soit dans le domaine $\bar{X}_i$ soit dans le domaine $\bar{E}_i\,(i=a,b,c)$. Cependant il résulte du lemme 2 que tous les points communs d'un domaine $\bar{X}_i$ et d'un domaine $\bar{E}_k$ $(i,k=a,b,c)$ appartiennent à la circonférence Γ, si donc P ne fait pas partie de cette circonférence il doit être situé soit dans tous les domaines $\bar{X}_a, \bar{X}_b, \bar{X}_c$ soit dans tous les domaines $\bar{E}_a, \bar{E}_b, \bar{E}_c$. Or on voit aisément que tous les domaines $\bar{X}_a, \bar{X}_b, \bar{X}_c$ n'ont qu'un seul point commun qui est un des points A,B,C lorsque l'angle correspondant du triangle ABC est obtus et qui est intérieur au triangle ABC si tous ses angles sont aigus (c'est le point d'intersection des circonférences $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$). Ainsi donc si la courbe ne contient pas un arc de la circonférence Γ tous ses points doivent appartenir au domaine $\bar{E}$ qui est l'ensemble des points appartenant à tous les domaines $\bar{E}_a, \bar{E}_b, \bar{E}_c$ à la fois. On voit cependant aisément que la frontière du $\bar{E}$ présente aux points A,B et C des „points de rebroussement" où les deux demi-tangentes ne sont pas situés sur une droite (si l'angle C p. ex. es obtus le point C serait isolé) et ceci est incompatible avec l'existance de la tangente en un de ces points au moins (celui qui n'est pas un bout de l'arc appartenant à la courbe).

3. Pour démontrer le théorème 2 remarquons que si la limite U n'est pas atteinte par un cercle-limite des cercles passants par 3 points qui tendent vers un seul elle est atteinte, en vertu du théorème 1, par un cercle Γ tangent en un point A à la courbe et qui passe par un autre point B de la courbe. Supposons d'abord que AB ne soit pas un diamètre de Γ. Traçons le cercle Γ' symétrique de Γ par

rapport au AB, d'après le lemme 1 aucun point de la courbe n'est pas situé à l'intérieur du domaine Y relatif aux cercles Γ et Γ'. Considérons d'autre part le tore Z obtenu en tournant le cercle autour de la tangente en A, il est clair qu'aucun point P de la courbe ne se trouve pas à l'intérieur du Z car autrement un cercle passant par P et tangent à la courbe en A aurait sa courbure plus grande que U. Or d'après le lemme 2 le domaine X est situé, à l'exception d'un arc de Γ, à l'intérieur de la sphère S dont Γ est un grand cercle et a fortiori à l'intérieur du tore Z. Si donc la courbe ne contient pas un arc de Γ elle se trouve à l'extérieur ou sur la frontière du domaine $X+Y$, ceci est cependant incompatible avec l'existence de la tangente en des points A et B. Supposons maintenant que AB soit un diamètre du cercle Γ. Comme aucun point de la courbe n'est situé à l'intérieur du tore Z dont le plan tangent en B est perpendiculaire à AB, la tangente en B à la courbe doit être perpendiculaire à AB.

4. Puisque le théorème 3 se rapporte aux continus plans il nous sera commode d'énoncer le lemme 1 dans ce cas sous la forme suivante:

Lemme 1a. *Considérons deux cercles Γ et Γ', ayants les mêmes rayons, situés dans le même plan et qui se coupent aux points A et B. Soit P un point quelconque du plan des cercles Γ et Γ'. Si P est situé à l'intérieur d'un de ces cercles et à l'extérieur de l'autre la courbure du cercle qui passe par A, B et P est plus grande que celle des cercles Γ et Γ', si P est situé à l'intérieur des cercles Γ et Γ' ou à l'extérieur de ces cercles la courbure du cercle qui passe par A, B et P est plus petite que celle des cercles Γ et Γ'.*

Supposons maintenant que la limite u $(u>0)$ soit atteinte par un cercle qui passe par 3 points A, B et C du continu. En traçant encore des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c symétriques de Γ par rapport aux côtés du triangle ABC et en appliquant le lemme 1a aux couples des cercles Γ, Γ_i $(i=a, b, c)$ on voit que tout point de continu intérieur à Γ devrait être situé à l'extérieur ou sur la périphérie des Γ_i et que tout point de continu extérieur à Γ devrait être situé à l'intérieur ou sur la périphérie des Γ_i (pour $i=a, b, c$). Or si les angles A, B, C du triangle ABC sont aigus il n'existe qu'un seul point à l'intérieur de Γ qui satisfait à ces conditions (cf. § 2) tandis qu'aucun point extérieur à Γ n'y satisfait pas. Si l'angle C p. ex. est obtus le continu devrait être situé soit sur la périphérie de Γ soit dans deux domaines limités par des cercles et qui n'ont aucun point commun. L'un de ces domaines est situé en dehors de Γ, sa frontière passe par le point C, l'autre domaine est situé à l'intérieur de Γ, sa frontière passe par des points A et B. Si le triangle ABC est rectangle on voit directement que le continu se réduit à un arc de Γ. Pour constater que le théorème 3 est inexact dans le cas de l'espace introduisons des coordonnées sphériques φ et Θ sur une sphère dont la courbure est u et considérons un arc AB de loxodromie qui fait un petit angle ε avec des paralléles $\Theta = \text{const.}$ Nous supposons que lorsque un point décrit l'arc AB φ varie de 4π et que Θ reste voisin d'une valeur différente de 0 et de $\frac{\pi}{2}$. Il est clair que le grand cercle de la sphère qui passe par des points A et B coupe l'arc AB en un troisième point C; on constate d'autre part aisément, en faisant tendre ε vers 0, que tout cercle tangent en un point de l'arc AB à cet arc et qui passe par un autre point de l'arc AB a la courbure supérieure à u.

Considérons maintenant un ovale dont il est question dans l'énoncé 4. Il résulte des hypothèses que la borne U est finie et que des cercles-limites des cercles qui passent par 3 points qui tendent vers un seul sont identiques avec des cercles de courbure. Si donc la borne U ne serait pas atteinte par un cercle de courbure elle serait atteinte, d'après l'énoncé 2, par un cercle Γ doublement tangent à l'ovale aux points diamétralement opposés A et B, aucun point de l'ovale ne se trouvant pas à l'intérieur de Γ. Il est d'ailleurs clair que tous les points de l'ovale sont situés dans la bande comprise entre deux droites passants par A et B respectivement et perpendiculaires à AB, ou bien sur ces deux droites. En choisissant le point A comme l'origine des coordonnées et le segment AB comme l'axe des x on voit que chaque demi-droite $x = a$, $y > 0$ $(0 < a < AB)$ coupe l'ovale en exactement un point $y = y(x)$. Désignons encore par $z(x)$ l'ordonnée positive du cercle Γ: on a $y(x) \geqslant z(x)$. Il est clair que si l'ovale ne contient pas un arc de Γ il existe une valeur a, positive et voisine de 0, telle que $y'(a) > z'(a) > 0$, tandis que pour une valeur b voisine de AB $(b < AB)$ on aura $y'(b) < z'(b) < 0$. Considérons la fonction croissante;

$$F(t) = \int_0^t \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

Il résulte des inégalités écrites que l'on a:

$$\frac{F\,[y'(a)] - F\,[y'(b)]}{F\,[z'(a)] - F\,[z'(b)]} > 1$$

Or les dérivées des fonctions $F(y'(x))$ et $F[z'(x)]$ ce sont des courbures de l'ovale et du cercle respectivement. En appliquant le théorème de Lagrange au rapport ci-dessus on verrait donc qu'il existe un point de l'ovale où la courbure est supérieure à celle du cercle Γ, en contradiction avec l'hypothèse faite.

La considération de la limite inférieure u est moins compliquée Le cas où $u=0$ étant évident on peut supposer que $u>0$. Si la borne u n'était pas atteinte par un cercle de courbure elle serait atteinte, d'après le théorème 3, par un cercle Γ tangent en un point A à l'ovale et passant par un autre point B de l'ovale. Si AB est un diamètre de Γ on voit immédiatement que l'ovale se réduit au cercle Γ. Si AB n'est pas un diamètre de Γ traçons le cercle Γ' symétrique de Γ par rapport à AB. Aucun point de l'ovale ne peut être situé simultanément à l'extérieur de Γ et du cercle Γ'' symétrique de Γ par rapport à la tangente à Γ en A (car autrement la courbure du cercle passant par ce point et tangent à l'ovale en A serait plus petite que u), donc tous ses points seraient situés, d'après le lemme 1a, soit sur les circonférences Γ, Γ' ou Γ'', soit simultanément à l'intérieur de Γ et à l'extérieur de Γ', ou bien à l'intérieur de Γ' et de Γ'' simultanément, ceci est cependant manifestement impossible.

6. Occupons-nous maintenant du continu dont-il est question dans le théorème 5. Soit O un point quelconque de ce continu. Il est clair que chaque sphère de centre O et de rayon R assez petit coupe le continu en 3 points au plus, donc le continu est composé, dans le voisinage de O, d'au plus 3 branches de courbe continue: $x=x_i(R)$, $y=y_i(R)$, $z=z_i(R)$ $(i=1,2,3)$. Si $R\to O$ et si le point P décrit une de ces branches la direction du vecteur OP tend vers une limite bien déterminée. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et considérons deux directions limites, soit OM et ON du vecteur OP; nous pouvons supposer que OM et ON ne sont pas situés sur une même droite. Traçons la bissectrice de l'angle MON, un cercle tangent à cette bissectrice et dont la courbure est supérieure à W et enfin la sphère dont le cercle en question est un grand cercle. Il est

clair que la périphérie de la sphère devrait contenir une infinité des points du continu, en contradiction avec la définition du nombre W.

Il y a plus: l'angle KOL que font des directions limites $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OL}$ qui correspondent à des branches différentes ne peut être égal qu'à zéro ou à π. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et considérons un petit cercle C tangent à OK et à OL, puis un cercle concentrique C' dont le rayon est égal à celui de C multiplié par un nombre fixe plus grand que 1 et voisin de 1. Traçons encore la sphère dont C' est un grand cercle. Il est clair que la branche (ou les branches) qui s'accumule vers $\overrightarrow{OK}$ coupe la sphère en deux points au moins et qu'il en est de même avec la branche qui s'accumule vers $\overrightarrow{OL}$. En choisissant le rayon de C assez petit nous obtenons de nouveau une contradiction. Considérons encore une direction $\overrightarrow{OM}$ suivant laquelle s'accumulent les points du continu qui tendent vers O, tous ces points sont situés dans un demi-cône C, de sommet O, de l'axe $\overrightarrow{OM}$ et tel que l'angle de la génératrice avec l'axe est un nombre ε arbitrairement petit. Supposons qu'il existe une suite infinie des sphères qui passent par O, dont les rayons tendent vers zéro, dont les centres sont situés sur $\overrightarrow{OM}$ et qui sont telles que chaque sphère coupe le continu en deux points A et B autres que O. Choisissons de cette suite une sphère S dont la courbure est plus grande que W; si le continu ne pénètre à l'intérieur de S ni dans le voisinage du point A ni dans celui de B nous remplaçons la sphère S par une sphère tangente en O à S, le centre de cette sphère étant situé sur $\overrightarrow{OM}$ et sa courbure étant plus petite que celle de S (mais supérieure à W) il est clair que si la nouvelle sphère que nous appelons encore S est suffisament voisine de la sphère primitive le continu pénètre à son intérieur dans le voisinage des points A et B. En définitive on peut toujours supposer que le continu pénètre à l'intérieur de S dans le voisinage d'un des points A et B au moins, du point A pour fixer des idées. Il est cloir que tous les points du demi-cône C dont les distances au point O sont assez petites sont situés à l'intérieur de la sphère S ainsi choisie. Toute sphère T tangente en B à S,-contenue à l'intérieur de S, et dont le rayon diffère assez peu de celui de S coupe le continu en un point voisin de A; la courbure de T surpassant W cette sphère ne peut donc couper le continu qu'en un seul point voisin de O. En appliquant le même raisonnement à la direction $\overrightarrow{OM'}$ opposée à $\overrightarrow{OM}$

nous constatons que la portion du continu située dans un voisinage de O (et par conséquant tout le continu) est une courbe de Jordan sans points multiples (en particulier sans points de rebroussements) et qui possède partout une tangente.

Nous allons voir maintenant que la direction de cette tangente varie d'une manière continue avec le paramètre de la courbe. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi: soit O un point de la courbe, OT la tangente en O, M_n une suite des points de la courbe qui tendent vers O, $M_n T_n$ la tangente en M et supposons que les angles des vecteurs $\overrightarrow{M_n T_n}$ avec le vecteur $\overrightarrow{OT}$ tendent vers un nombre positif $\alpha\,(0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2})$. Traçons des cercles passants par O et tangents aux points M_n à la courbe et puis des sphères S_n de centres C_n, dont ces cercles sont des grands cercles; les rayons des S_n tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. Les angles des vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ avec $\overrightarrow{OT}$ tendent zéro, donc les angles des vecteurs $\overrightarrow{OC_n}$ avec $\overrightarrow{OT}$ tendent vers $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Il en résulte que toutes les sphères S_n contiennent une portion voisine de O (et variable avec S_n) d'un demi-cône K dont le sommet est O et l'axe $\overrightarrow{OT}$, si l'angle des génératrices avec l'axe est un nombre ε assez petit. La branche de la courbe issue de O reste d'abord dans le demi-cône K, donc dans toute sphère S_n, finit par sortir de S_n et touche S_n au point M_n, cette branche coupe donc S en 4 points au moins (dont certains sont confondus). Le rayon de S_n tendant vers zéro lorsque $n \to \infty$ nous obtenons de nouveau une contradiction. Il résulte de ce qui précède qu'un plan perpendiculaire à la tangente OT et que passe assez près de O coupe la courbe en un seul point voisin de O, si donc on choisit O comme l'origine des coordonnées et la tangente OT comme l'axe Ox la courbe est répresentable, dans le voisinage de l'origine, par des équations: $y = y(x)$, $z = z(x)$ où $y'(x)$ et $z'(x)$ sont continues. En définitive le continu est une courbe de Jordan rectifiable, sans points multiples et qui possède partout une tangente qui varie continûment.

7. Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème 5 Considérons la sphère S pour laquelle la borne W est atteinte. Nous dirons qu'un point d'intersection de la courbe fermée avec S est „un point P“ si la courbe pénètre à l'intérieur de la sphère dans le voisinage de ce point, dans la cas contraire nous dirons que le point

d'intersection est „un point T“ (en un point T la courbe est tangente à la sphère). Nous allons voir que tous les points d'intersection sont des points T. Il est d'abord impossible que tous les points d'intersection soient des points P: si leur nombre était supérieur à 3 une sphère S' suffisament voisine de S et tangente intérieurement à S en un des points P, au point P_1 pour fixer des idées, couperait la courbe en 4 points ce que est impossible; s'il n'y a que 2 ou 3 points P la courbe est nécessairement tangente à S en un de ces points et on peut reprendre le raisonnement précédent en y remplaçant le point P_1 par ce point (certains des 4 points d'intersection de la courbe avec S sont maintenant confondus). Ce même raisonnement s'applique encore s'il y a un point T et deux points P, pourvu que l'on remplace le point P_1 par le point T. La courbe étant fermée il est impossible qu'il existe un seul point P, tous les points d'intersection sont donc bien des points T. Supposons maintenant qu'il existe deux points T, soit T_1 et T_2, tels que $T_1 T_2$ ne soit pas un diamètre de la sphère S. Abaissons du centre C de S sur la corde $T_1 T_2$ la perpendiculaire CQ et déplaçons légèrement la sphère S dans la direction CQ. Il est clair que la sphère obtenue coupe la courbe en 4 points P; or nous avons vu que cela est impossible. $T_1 T_2$ est donc nécessairement un diamètre de S et par suite tous les points d'intersection de la courbe avec la sphère S se réduisent à deux points T au plus. Pour voir que la deuxième partie du théorème 5 n'est pas exacte lorsque la courbe n'est pas fermée il suffit de considérer le cas d'une courbe plane (qui correspond au théorème 5a). Soit a un nombre plus grand que 2 et considérons dans le plan oxy la courbe composée 1° des segments: $y=0, 1 < x < a; y=0, -a < x < -1$; $x=0, |y| < a$; 2° de l'arc de cercle AB tangent aux points $A(a, 0)$ et $B(0, a)$ aux segments précédents (l'arc AB correspond à $\frac{3}{4}$ de la circonférence); 3° de l'arc de cercle symétrique de l'arc précédent par rapport à l'origine. On a ici $W=1$ et cette borne est atteinte par le cercle $x^2+y^2=1$ qui coupe la courbe en 4 points distincts. Il est aisé de constater que tous les cercles tangents à la courbe et qui passent par deux autres points de la courbe ont leurs rayons supérieurs ou égaux à 1.

8. Dans la démonstration du théorème 6 nous utiliserons plusieurs lemmes, le premier d'entre eux est évident et tout à fait analogue au lemme 1a:

Lemme 3. Considérons deux sphères S et S' ayants les mêmes rayons et qui se coupent suivant un cercle Γ. Soit P un point *quelconque de l'espace. Si P est situé à l'intérieur d'une de ces sphères et à l'extérieur de l'autre la courbure de la sphère qui passe par Γ et P est plus grande que celle des sphères S et S', si P est situé à l'intérieur des sphères S et S' ou à l'extérieur de ces sphères la courbure de la sphère qui passe par Γ et P est plus petite que celle des sphères S et S'.*

Lemme 4. Etant donnés 4 points A, B, C et D de la périphérie d'une sphère, points qui ne sont pas tous situés sur une même circonférence, deux de ces points (A et B par exemple) sont situés dans la plus grande des calottes déterminées par des cercles passants par trois points restants (des cercles BCD et ACD respectivement).

On peut énoncer le lemme 4 sous la forme suivante: „Etant donné un tétraèdre $ABCD$ il est impossible que le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre soit situé du côté opposé aux points intérieurs du tétraèdre par rapport aux plans des 3 faces de celuici ou bien sur ces plans". Supposons que le centre O se trouve du coté opposé aux points intérieurs du tétraèdre par rapport aux plans des faces ABC, ADC et DBC ou bien sur ces plans, il en résulterait que le prolongement rectiligne du segment OC au delà de C devrait pénétrer dans le tétraèdre, ce qui est impossible car ce prolongement est situé à l'extérieur de la sphère circonsrite au tétraèdre.

9. Nous supposerons maintenant que la sphère S pour laquelle la borne inférieure w est atteinte passe par 4 points A, B, C, D du continu et nous aboutirons à une contradiction. Nous allons distinguer deux cas:

I cas: *le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ est situé à l'extérieur ou sur les faces du tétraèdre.*

Si un cercle qui passe par 3 des points A, B, C, D est un grand cercle de S on voit immédiatement que tout point du continu est situé sur la périphérie de S; s'il n'en est pas ainsi il résulte de l'hypothèse faite au sujet du centre O qu'il existe une hémisphère de S qui ne contient aucun point A, B, C, D. Supposons donc, par exemple, que le point D soit situé dans la plus petite des deux calottes de S qui sont séparées par la circonférence ABC. Traçons la sphère S' symétrique de S par rapport au plan ABC, en appliquant le lemme 3 au couple des sphères (S, S') on voit que tout point du continu qui n'appartient pas aux périphèries des sphères S et S' est situé soit dans le domaine R qui est l'ensemble des points situés à la fois à l'intérieur de S et à l'extérieur de S', soit dans le domaine R' qui est l'ensemble des points situés à la fois à l'extérieur de S et à l'intérieur de S'. En traçant maintenant des sphères S_c, S_a, S_b symétriques de S par rapport aux plans DAB, DBC, DCA respectivement et en appliquant le lemme 3 aux couples des sphères (S, S_c), (S, S_a), (S, S_b) on constate que les points du continu qui n'appartiennent pas aux périphéries des sphères S, S', S_a, S_b, S_c, sont situés dans le voisinage d'un des points A, B, C soit exclusivement à l'intérieur de S, soit exclusivement à l'extérieur de S, donc soit exclusivement dans R, soit exclusivement dans R'. Les domaines R et R' fermés ne contenant en commun que la circonférence ABC, qui ne contient évidemment pas d'autres points du continu que A, B et C, on voit que si le continu ne contient pas de portion située sur une sphère dont la courbure est w il est situé tout entier soit dans le domaine fermé R, soit dans le domaine fermé R'. La première hypothèse est cependant impossible car le continu contient le point D qui est situé à une distance positive de R. La deuxième l'hypothèse l'est également, car en vertu du lemme 4 il existe parmi les points A, B, C un au moins, soit C par exemple, qui se trouve sur la plus grande des calottes déterminées sur S par la circonférence ABD; en appliquant le lemme 3 au couple des sphères (S, S_c) on voit que le continu est situé, dans le voisinage de C, à l'intérieur de S donc dans R. Ainsi nous aboutissons toujours à une contradiction.

10. Nous allons considérer maintenant le II cas: *le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ est situé à l'intérieur du tétraèdre.*

Lemme 5. Etant donné un tétraèdre qui contient le centre O de la sphère circonscrite S à son intérieur il y a, dans le voisinage arbitrairement restreint d'un sommet quelconque des points qui appartiennent à la fois à S et à 3 sphères symétriques de S par rapport aux faces qui passent par le sommet considéré.

Désignons par O_A, O_B, O_C, O_D des centres des sphères S_A, S_B, S_C, S_D symétriques de S par rapport aux plans BCD, ACD, ABD, ABC respectivement et considérons par exemple le sommet A. Si le tétraèdre $ABCD$ est régulier on trouve de suite que $OO_i : AO_i = \frac{2}{3}$ $(i = B, C, D)$, donc le segment OA tout entier appartient aux sphères S_B, S_C, S_D. Nous pouvons maintenant déplacer continûment des sommets du tétraèdre régulier de manière qu'il finisse par coincider avec le tétraèdre donné, en ayant soin qu'au cours de cette transformation le centre O reste toujours à l'intérieur du tétraèdre et que les quatre sommets ne soient jamais situés dans un même plan. Il est clair que la propriété dont il est question dans le lemme ne peut cesser d'avoir lieu, au cours de la transformation, qu'au moment où deux des sphères S, S_i $(i=B, C, D)$ sont tangentes en A. Or il est d'abord clair qu'aucune de ces 4 sphères ne peut coincider avec l'autre. Si la sphère S_B par exemple est tangente en A à la sphère S_C les points O_B, O_C, A sont situés sur une droite, le plan $OO_B O_C$ est perpendiculaire aux faces CAD et BAD, donc aussi à l'arrêt AD, il s'ensuivrait que OA serait perpendiculaire à AD, résultat impossible. Si la sphère S est tangente en A à la sphère S_B, par exemple, le pied P_B de la perpendiculaire abaissée de O sur la face ACD coinciderait avec A, or cela n'est pas posible car P_B est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD.

Lemme 6. Considérons un tétraèdre qui contient le centre O de la sphère circonscrite S à son intérieur. Chaque demi-droite dont le bout est O et qui contient un sommet du tétraèdre traverse l'intérieur du triangle dont les sommets sont des centres des sphères symétriques de S par rapport aux faces qui passent par le sommet considéré.

On peut remplacer dans la démonstration du lemme les centres des sphères symétriques par les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les faces qui passent par le sommet considéré. Considérons, par exemple, le sommet A et soient P_B, P_C, P_D les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les faces ACD, ABD, ABC respectivement. Remarquons d'abord que la demi-droite OA ne coupe pas des côtés du triangle $P_B P_C P_D$: si elle coupait le côté $P_B P_D$, par exemple, le plan $AP_B P_D$ serait identique avec le plan $OP_B P_D$ qui est perpendiculaire à l'arrêt AC (il est impossible que les points A ou O soient situés sur la droite $P_B P_D$ donc les plans $AP_B P_D$ et $OP_B P_D$ sont bien déterminés); le segment AP_B serait donc perpendiculaire à AC, or ceci est exclu car P_B est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD. Il est de même impossible que le point O soit situé à l'intérieur du triangle $P_B P_C P_D$ car les plans $OP_D P_C, OP_B P_D, OP_B P_C$ seraient alors identiques, donc les arrêts AB, AC, AD aussi. Cela posé l'assertion du lemme: la demi-droite $OA\infty$ traverse l'intérieur du triangle $P_B P_C P_D$ est évidemment exacte, pour des raisons de symétrie, dans le cas du tétraèdre régulier. Nous pouvons déplacer continûment les sommets du tétraèdre régulier de manière qu'il finisse par coincider avec le tétraèdre donné, en ayant soin qu'au cours de cette transformation le centre O reste toujours à l'intérieur du tétraèdre et que les quatre sommets ne soient jamais situés dans un même plan. Il est clair que l'assertion du lemme ne peut cesser d'être exacte au cours de la transformation, que lorsque la demi-droite $OA\infty$ coupe un des côtés du triangle $P_B P_C P_D$, ou bien lorsque le point O est situé à l'intérieur de ce triangle. Nous avons cependant constaté que ces circonstances ne peuvent avoir lieu.

Lemme 7. Considérons un tétraèdre qui contient le centre O de la sphère circonscrite S à son intérieur. Tout point intérieur à S et dont la distance à un quelconque de sommets est plus petite qu'un nombre positif est aussi situé à l'intérieur de l'une au moins des 3 sphères symétriques de S par rapport aux faces qui passent par le sommet considéré. Tout point extérieur à S est situé à l'extérieur de l'une au moins des 3 sphères en question.

D'après le lemme 6 il est possible de choisir des masses positives m_B, m_C, m_D de manière que l'on ait $m_B+m_C+m_D=1$ et que le centre de gravité G de ces masses, placées aux points O_B, O_C, O_D respectivement, soit situé sur la demi-droite $OA\infty$. On sait que les lieux géométriques des points P qui satisfont à une relation

$$E(P)=m_B PO_B^2 + m_C PO_C^2 + m_D PO_D^2 = k$$

où k est un paramètre sont des sphères concentriques dont le centre est G et dont les rayons croissent avec k. Désignons par R le rayon commun des sphères S, S_A, S_B, S_C, S_D. Si le point G était situé sur le prolongement de OA au delà de A ou s'il était confondu avec A on aurait en tout point P intérieur à S $E(P)>E(A)=R^2$, or c'est en contradiction avec le lemme 5 d' après lequel il existe des points P intérieurs à S et tels que $PO_B<R$, $PO_C<R$, $PO_D<R$, par suite $E(P)<R^2$. Ainsi donc le point G est situé sur le segment OA (les extrémités O et A étant exclus), il en résulte que l'on a $E(P)<E(A)=R^2$ en tout point P situé à l'intérieur de la sphère dont le centre est G et qui est tangente intérieurement à S au point A, un tel point est nécessairement situé à l'intérieur de l'une au moins das sphères S_B, S_C, S_D. Il est d'autre part évident que tout point de S dont la distance au sommet A est assez petite et qui n'appartient pas au tétraèdre $ABCD$ est situé à l'intérieur de l'une au

moins des sphères S_B, S_C, S_D. La première partie du lemme 7 est donc établie (en supposant que le sommet considéré soit A). Pour établir la deuxième partie du lemme il suffit de remarquer que l'on a en tout point P extérieur à S: $E(P) > E(A) = R^2$.

Il est maintenant aisé d'achever la démonstration du théorème 6 dans le II cas. En appliquant le lemme 3 aux couples des sphères $(S, S_B), (S, S_C), (S, S_D)$ on constate que tout point du continu qui n'est pas situé sur les périphéries de ces sphères se trouve soit à l'intérieur de S et à l'extérieur de toutes les sphères S_B, S_C, S_D, soit à l'extérieur de S et à l'intérieur de toutes les sphères S_B, S_C, S_D. En tenant compte du lemme 7 on voit donc que si le continu ne contenait pas de portion située sur une sphère dont la courbure est w le point A serait isolé.
Remarque. Il résulte de la démonstration du lemme 7 qu'il est possible d'énoncer le lemme 6 sous la forme plus précise que voici:

Lemme 6a. Considérons un tétraèdre qui contient le centre O de la sphère circonscrite à son intérieur. Le segment qui joint le centre O à un sommet quelconque A traverse l'intérieur du triangle dont les sommets sont des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les faces qui passent par A en un point N tel que $ON : OA < \frac{1}{2}$.

C'est M. J. G. Mikusiński qui a remarqué le premier l'équivalence des lemmes 7 et 6a.

Streszczenie

Niech U i u oznaczają odpowiednio kresy górny i dolny krzywizny kół przechodzących przez conajmniej 3 punkty ograniczonego kontinuum. W i w mają znaczenie analogiczne w stosunku do kul przechodzących przez conajmniej 4 punkty kontinuum. Jest zawsze $w \leqslant u$, $W \leqslant U$. Przyjmijmy, że kontinuum nie zawiera łuku koła o krzywiźnie równej U lub u, wówczas kres $U < \infty$ nie może być osiągnięty przez koło które przechodzi przez 3 różne punkty kontinuum; jeśli to kontinuum jest płaskie to samo ma miejsce w stosuku do kresu $u > 0$. Jeśli $W < \infty$ to kontinuum jest krzywą Jordana, która ma wszędzie styczną ciągłą, jeśli ta krzywa jest zamkniętą, to kres $U < \infty$ może być osiągnięty tylko albo przez koło przechodzące przez jeden tylko punkt krzywej albo przez koło C styczne do krzywej w A i przechodzące przez inny punkt B krzywej w ten sposób że AB jest średnicą C a styczna do krzywej w B jest prostopadłą do tej średnicy. Jeśli kontinuum jest owalem posiadającym wszędzie krzywiznę ciągłą, to kresy $U < \infty$ i $u > 0$ są osiągnięte tylko przez koła krzywiznowe. Załóżmy teraz, że kontinuum nie zawiera części położonej na kuli o krzywiźnie W lub w. Jeśli $W < \infty$ i jeśli krzywa Jordana do której się redukuje kontinuum jest zamkniętą, to kres W może być osiągnięty tylko albo przez kulę przechodzącą przez jeden tylko punkt krzywej, albo przez kulę styczną w obu końcach jednej z jej średnic do krzywej i niemającą żadnego innego punktu wspólnego z krzywą. Jeśli $w > 0$ to kres w nie może być osiągnięty przez kulę przechodzącą przez 4 różne punkty kontinuum.