ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. III, 1 SECTIO A 1949

Z Seminarium Matematycznego II Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Jan G.-Mikusiński.

Jan G.-Mikusiński

L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle
(Deuxième partie)

Pierścień algebraiczny i jego zastosowania w analizie funkcyjnej
(Część druga)

Introduction. Ce travail est la continuation de l'article *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle* (Première partie) qui a paru dans ces Annales, Vol. II, 1947.

Nous introduisons ici axiomatiquement (Chapitre IV) les notions suivantes: 1° l'ensemble A^* d'éléments non-négatifs, 2° l'inégalité et 3° le module. On obtient ainsi une structure dans laquelle on peut définir les notions de limite, de fonction continue, de dérivée et d'intégrale. Toutes ces notions coïncident, dans le cas des nombres réels, avec les notions habituelles.

Nous introduisons ensuite (Chapitre V) les notions de limite faible, de fonction faiblement continue, de dérivée faible et d'intégrale faible qui sont des généralisations des notions précédentes. Ces notions trouvent une application intéressante (Chapitre VI), en considérant l'espace C_T des fonctions $f(t)$ continues pour $0 \leqslant t < T$. On retrouve, parmi les éléments géneralisés qui sont des limites des suites faiblement convergentes, les fonctions sommables (N^{os} 89 et 90), les nombres complexes (N^{os} 92 et 93) et certains êtres mathématiques, étrangers à l'analyse classique, qui réalisent les symboles du calcul de H e a v i s i d e (N^{os} 94 et 99). Cette interprétation attribue donc aux symboles de Heaviside un sens mathématique direct, par contre à la théorie de la *transformation de Laplace* (N° 104).

Au cours de la rédaction de la deuxième partie de *L'anneau algébrique* nous avons trouvé inutile de discuter largement les diverses interprétations de l'anneau, introduites dans la première partie, nous nous sommes cependant bornés, dans la plupart des applications, à l'espace C_T. Signalons de plus que dans les interprétations I_T, I_T (i), I_T (iv), I_∞ (x), F et V_{AB} (N^{os} 12—16) la définition de l'égalité des éléments était incompatible avec l'axiome II du groupe abélien (N° 1). Nous tenons de rectifier ci-dessous en détail cette erreur. Remarquons d'ailleurs que cette erreur ne concerne que quelques interprétations particulières et ne touche pas la théorie générale.

Pour les raisons techniques, nous avons renoncé de discuter, dans la deuxième partie, les propriétés topologiques des espaces y considérés et leurs rapports avec d'autres espaces abstraits et nous nous sommes décidés d'insérer ces problèmes dans un article séparé qui se trouve en préparation.

En terminant, qu'il me soit permis d'exprimer mon affectueuse gratitude à MM. A. Bielecki et C. Ryll-Nardzewski qui, par leurs propres recherches et de nombreuses discussions, ont contribué à éclaircir beaucoup de points de la théorie exposée.

Rectification relative à la première partie. Certaines interprétations de l'anneau algébrique données aux N^{os} 12—15 sont incorrectes. A savoir, les définitions du N° 12 de l'égalité et de la somme, ne sont pas compatibles, dans le cas de l'ensemble I_T, avec l'axiome II du N° 1. En effet, si la fonction $a = \{a(t)\}$ n'est pas définie dans certains points où la fonction $b = \{b(t)\}$ l'est, il n'existe pas de fonction $x = \{x(t)\}$ pour laquelle $a + x = b$. Donc I_T n'est pas un anneau algébrique. Or, il le deviendra, dès que l'on suppose que

(α) les fonctions de I_T sont définies *partout* dans l'intervalle $0 < t < T$;

(β) la composition $\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau$ de deux fonctions quelconques de I_T est encore définie *partout* dans cet intervalle.

Remarquons que les conditions (α) et (β) sont satisfaits dans le cas des ensembles I_T (ii),..., I_T (ix), sauf I_T (iv), du N° 13; ceux-là sont donc des interprétations correctes de l'anneau algébrique. Par conséquent il en est de même des intersections de ces ensembles avec l'un quelconque des ensembles I_T (i), I_T (iv) ou I_∞ (x) (dans le dernier cas pour $T = \infty$).

Les suppositions (α) et (β) doivent être adoptées partout dans la suite du texte de la première partie où l'on parle des anneaux I_T, $I_T(\mathrm{i})$, $I_T(\mathrm{iv})$ ou $I_\infty(\mathrm{x})$.

Pour les raisons analogues à celles de tout à l'heure, une rectification convenable est nécessaire pour les ensembles F et V_{AB} des N^{os} 14 et 15. Notamment l'ensemble F deviendra un anneau algébrique, en supposant que les fonctions $f \in F$ sont définies *partout* dans le carré K, l'exception faite de la diagonale $x = y$, et mesurables par rapport à chacune des variables x et y. Pareillement l'ensemble V_{AB} deviendra un anneau algébrique, en supposant que les fonctions $f \in V_{AB}$ sont définies partout dans le triangle T_{AB} et mesurables par rapport à chacune des variables x et y. C'est avec cette correction qu'il faut entendre dans la suite les interprétations F et V_{AB}.

Les remarques ci-dessus ne concernent pas les ensembles $\bar{I}_T$, F et $\bar{V}_{AB}$ du N° 17, ces derniers étant des interprétations correctes de l'anneau algébrique.

Voici encore quelques autres erreurs remarquées dans le texte de la première partie de ce travail:

page	ligne	remplacer	par
1	2 (d'en bas)	des	dès
2	16 (d'en bas)	linéaire	algébrique
10	15	$a(\tau)$	$b(\tau)$
14	6	l'intervalle	l'intervalle $0 \leqslant t < T$
18	12	linéaire	algébrique
35	3	$l - 3l^2 - 2l^3$	$1 - 3l^2 - 2l^3$

Chapitre IV
Inégalité et module

47. Définition de l'inégalité dans le groupe abélien. Nous avons considéré dans notre étude précédente de l'anneau algébrique les quatre notions suivantes: *somme* $a+b$, *différence* $a-b$, *produit* ab et, sous certaines hypothèses, *quotient* $\frac{a}{b}$. Nous introduirons maintenant une nouvelle notion, à savoir celle d'*inégalité* $a \leqslant b$. Pour rendre notre exposé plus systématique, nous étudierons cette relation tout d'abord dans le cas du *groupe abélien* et seulement après dans celui de l'*anneau algébrique.*

Remarquons que, dans le cas des nombres réels, la relation $a \leqslant b$ est équivalente à l'énoncé suivant: *la différence* $b-a$ *est un nombre* *non négatif.* Si la classe A^* des nombres réels non négatifs est déterminée, on peut donc définir l'inégalité $a \leqslant b$ par la relation $b-a \in A^*$. C'est de cette manière que nous définirons l'inégalité dans le cas général.

Étant donné un groupe abélien additif A, nous considérons un sous-ensemble quelconque $A^* \subset A$ qui satisfait aux axiomes suivants[1]):

1^* $0 \in A^*$;

2^* *Si* $a \in A^*$ *et* $b \in A^*$, *alors* $a+b \in A^*$;

3^* *Si* $a \in A^*$ *et* $b-qa \in A^*$, *quel que soit* q *naturel, alors* $a=0$.

Nous posons par définition

$$a \leqslant b,$$

lorsque $b-a \in A^*$; l'ensemble A^* peut ainsi être envisagé comme celui d'éléments non négatifs et l'axiome 3^* joue alors le rôle de l'*axiome d'Archimède*.

Remarque 47. Le produit des éléments de A par un nombre quelconque n'est pas défini, en général. Cependant le produit par un nombre naturel q a toujours un sens, si l'on pose par définition

$$1a=a \quad \text{et} \quad (q+1)a=qa+a \quad (q=1, 2, \ldots).$$

C'est dans ce sens qu'il faut entendre le produit qa dans la condition 3^*.

48. Propriétés fondamentales de l'inégalité. On déduit de la définition du N° 47 les propriétés suivantes de l'inégalité:

(i) *Tout élément* $a \in A^*$ *satisfait à l'inégalité* $0 \leqslant a$.

En effet, si $a \in A^*$, on a $a-0 \in A^*$.

(ii) *Si* $a=b$, *alors* $a \leqslant b$.

En effet, on a alors $b-a=0 \in A^*$.

(iii) *Si* $a \leqslant b \leqslant c$, *on a* $a \leqslant c$ (transitivité).

En effet si $b-a \in A^*$ et $c-b \in A^*$ il vient, d'après 2^*,

$$c-a=(c-b)+(b-a) \in A^*.$$

(iv) *Si* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d$, *on a* $a+c \leqslant b+d$.

En effet, on a alors $b-a \in A^*$ et $d-c \in A^*$, donc d'après 2^*,

$$(b+d)-(a+c) = (b-a)+(d-c) \in A^*.$$

D'après (iv) les inégalités peuvent être ajoutées l'une à l'autre.

(v) *Si* $a \leqslant b$, *on a* $qa \leqslant qb$ *pour tout* q *naturel.*

---

[1]) Voir J. G.-Mikusiński [14].

En effet, d'après (iv) on a $2a \leq 2b$ et par induction $qa \leq qb$ pour tout p naturel.

(vi) *Si* $a \leq b$, *on a* $a-c \leq b-c$ *pour tout* $c \in A$.

En effet, on a alors $(b-c)-(a-c)=b-a \in A^*$.

(vii) *Si* $a \leq b \leq a$, *on a* $a=b$.

En effet, on a alors $b-a \in A^*$ et $0 \leq -(b-a)$. La dernière inégalité donne $0 \leq -q(b-a)$ pour tout q naturel, ce qui peut s'écrire $0-q(b-a) \in A^*$. En vertu de 3* on a donc $b-a=0$.

49. Relations avec la notion classique d'inégalité. On reconnaît dans les propositions du N° 48 les lois usuelles de l'analyse classique. Or, ceci s'explique facilement par le fait que les axiomes 1*—3* sont remplis par l'ensemble des nombres non négatifs. Donc, toutes les règles déduites de 1*—3* sont légitimes dans le calcul ordinaire. Remarquons que la réciproque n'est pas vraie. En effet, étant donnés deux nombres non négatifs a et b, on peut affirmer toujours que l'une au moins des deux inégalités $a \leq b$ ou $b \leq a$ a lieu. L'exemple suivant montre que cette proposition n'est pas vraie, en général, pour les ensembles A^* quelconques.

Soit A l'ensemble des fonctions réelles, définies dans l'intervalle (0,1). On admet la définition habituelle de l'addition. Convenons que toute fonction non négative dans (0,1) appartient à A^*. Alors on vérifie sans peine que les axiomes 1*—3* sont remplis. Or, les deux fonctions $a=\{t\}$ et $b=\{1-t\}$ appartiennent à la classe A^*, tandis qu'aucune des inégalités $a \leq b$ ou $b \leq a$ n'a lieu.

L'exemple ci-dessus montre qu'en opérant avec le symbole $\leq$ il faut agir avec précaution et que l'on n'a de droit de profiter, dans le cas général, que des règles qui ont été déduites des axiomes 1*—3*.

50. La notion de module. Considérons maintenant un groupe abélien quelconque A et son sous-ensemble A^* satisfaisant aux axiomes 1*—3*. Nous introduirons une opération qui fait correspondre à chaque élément $a \in A$ un élément $|a| \in A^*$. Nous appellerons cette opération *module* lorqu'elle satisfait aux axiomes suivants[2]):

1° $|a|=a$ *pour tout* $a \in A^*$;

2° $|a|=0$ *entraîne* $a=0$;

3° $|-a|=|a|$;

4° $|a+b| \leq |a|+|b|$.

[2]) J. G.-Mikusiński [14].

De ces axiomes, on déduit les règles suivantes:

(50.1) $\big||a|\big| = |a|$ pour tout $a \in A$;

(50.2) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$;

(50.3) $\big||a|-|b|\big| \leqslant 3|a-b|$ (l'inégalité de A. Bielecki)[3];

(50.4) $|a_1 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n|$.

En effet, (50.1) résulte de 1°; (50.2) de 4° et 3°. Pour démontrer (50.3) remarquons d'abord que l'on a, d'après 4° et 3°,

$$0 \leqslant |b| - |a| + |a-b|, \tag{50.5}$$

$$0 \leqslant |a| - |b| + |a-b| \tag{50.6}$$

et aussi

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant \big||a|-|b|+|a-b|\big| + \big|-|a-b|\big|.$$

Donc en vertu de (50.6), 1° et 3°

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a|-|b|+2|a-b|. \tag{50.7}$$

En ajoutant enfin les inégalités (50.5) et (50.7) on obtient (50.3).

Enfin l'inégalité (50.4) se déduit par induction de 4°.

Exemple 50.1. Supposons que A soit l'ensemble des nombres entiers avec la définition habituelle de l'addition. Supposons ensuite que A^* soit composé des nombres 0, 2, 3, 4,... et que le module soit entendu au sens ordinaire, l'exception faite de $|\pm 1| = 5$. Le lecteur vérifiera que les postulats $1^* - 3^*$ et 1° — 4° sont remplis et que

$$\big||4|-|1|\big| \leqslant 3|4-1|,$$

$$\big||4|-|1|\big| \not\leqslant 2|4-1|,$$

$$\big||4|-|1|\big| \not\leqslant |4-1|.$$

Cet exemple est fort instructif, car il montre que le coefficient 3 dans l'inégalité (50.3) ne peut pas être diminué.

Exemple 50.2. Le lecteur démontrera que l'on a généralement $2\big||a|-|b|\big| \leqslant 4|a-b|$ et $\big|2|a|-2|b|\big| \leqslant 2|a-b|$ (A. Bielecki).

51. Limite forte[4]. On dira qu'une suite infinie a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dont les éléments appartiennent à A converge fortement vers $a \in A$,

[3]) A. Bielecki [1].

[4]) L'adjectif *forte* est employé pour distinguer la limite considérée ici de la *limite faible* que nous étudierons au Chapitre V.

en symbole $\lim a_n = a$, lorsqu'il existe un élément $c \in A^*$ tel que, quel que soit q naturel, on a

$$q\,|a_n - a| \leqslant c \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Le lecteur vérifiera que dans le cas des suites numériques cette définition est équivalente avec la définition usuelle.

52. Propriétés fondamentales de la limite forte. Signalons les propriétés suivantes de la limite forte:

La limite forte, si elle existe, est unique.

En effet, en supposant qu'une suite a_n converge fortement vers deux limites a et b, on aura pour tout q naturel

$$q\,|a_n - a| \leqslant c_1 \quad \text{et} \quad q\,|a_n - b| \leqslant c_2$$

pour n suffisamment grand. Par suite

$$q\,|b - a| = q\,|(a_n - a) - (a_n - b)| \leqslant q\,(|a_n - a| + |a_n - b|) \leqslant c_1 + c_2$$

et $|b - a| = 0$ (axiome 3*), $b - a = 0$ (axiome 2°), $b = a$.

Si une suite a_n converge fortement vers a, il en est de même de toute suite partielle a_{k_n} $(k_1 < k_2 < \ldots)$.

Un rearrangement quelconque des éléments d'une suite n'influence ni la convergence ni la valeur de la limite.

Les deux dernières propositions bien évidentes.

Si les deux limites fortes $\lim a_n$ *et* $\lim b_n$ *existent, on a*

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n .$$

En effet, si

$$q\,|a_n - a| \leqslant c_1 \quad \text{et} \quad q\,|b_n - b| \leqslant c_2 ,$$

on a

$$q\,|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leqslant q\,(|a_n - a| + |b_n - b|) \leqslant c_1 + c_2 .$$

Si $\lim a_n = a$, *alors* $\lim |a_n| = |a|$.

En effet, d'après (50.3) on a $\big||a_n| - |a|\big| \leqslant 3\,|a_n - a|$, d'où la proposition.

Si $a_n \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *on a* $\lim a_n \leqslant \lim b_n$, *pourvu que les deux limites existent.*

En effet,

$$0 \leqslant |b - a| = \lim |b_n - a_n| = \lim (b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n .$$

53. Convergence forte dans un sous-groupe. Considérons un groupe abélien A, où le sous-ensemble A^* d'éléments non négatifs et l'opération de module sont établis. Soit B un sous-groupe de A tel que $|a| \epsilon B$ pour tout élément $a \epsilon B$ et posons $B^* = BA^*$, où BA^* désigne la partie commune des ensembles B et A^*.

L'ensemble B^* satisfait évidemment aux axiomes 1^*—3^* du N° 47. De plus, si l'on rétrécit le domaine du module à l'ensemble B, les axiomes 1°—4° du N° 50 sont encore remplis (il faut alors remplacer dans 1° A^* par B^*). On peut donc introduire la convergence forte dans B sans faire intervenir l'ensemble A. La question se pose d'établir les conditions dans lesquelles les deux convergences relatives aux ensembles A et B sont équivalentes.

Désignons par

$$\lim_A a_n \quad \text{et} \quad \lim_B a_n$$

les limites fortes relatives aux ensembles A et B. Il est évident que si $\lim\limits_B a_n$ $(a_n \epsilon B)$ existe, il en est de même de $\lim\limits_A a_n$ et que les deux limites sont égales. Or, l'exemple suivant montre que l'existence de la limite $\lim\limits_A a_n = a$ n'entraîne pas en général celle de $\lim\limits_B a_n$, même dans le cas où tous les termes de la suite a_n ainsi que l'élément a appartiennent à B.

Soit A l'ensemble des fonctions réelles, définies dans l'intervalle ouvert $(0,1)$. Adoptons la définition habituelle des fonctions *non négatives* $a \epsilon A^*$ et la définition habituelle du *module*. On vérifie facilement que les axiomes 1^*—3^* et 1°—4° sont remplis. On a

$$\lim_A \{t^n\} = \{0\},$$

car, quel que soit q naturel, on a $q\,|t^n| < \frac{1}{1-t}$ pour $t \epsilon (0,1)$ et n assez grand. Soit maintenant $B \subset A$ l'ensemble des fonctions bornées dans $(0,1)$. Chacune des fonctions $\{t^n\}$ et la fonction $\{0\}$ appartiennent à B, mais la limite $\lim\limits_B \{t^n\}$ n'existe pas.

Or, la proposition suivante est vraie:

Si pour tout $a \epsilon A^*$ il existe un élément $b \epsilon B^*$ tel que $b - a \epsilon A^*$ et si $\lim\limits_A a_n \epsilon B$ $(a_n \epsilon B)$, alors $\lim\limits_B a_n$ existe et est égal à $\lim\limits_A a_n$.

La démonstration est immédiate.

54. Convergence forte dans les espaces fonctionnelles. Nous étudierons maintenant la convergence forte dans les *espaces fonctionnelles* avec la définition habituelle de l'addition.

Supposons que A soit un ensemble de fonctions réelles ou complexes, définies sur un ensemble G (G peut être un ensemble quelconque non vide) et que

(i) A soit un groupe abélien par rapport à l'addition;
(ii) le module (au sens ordinaire) de toute fonction de A appartienne à A.

Nous convenons que A^* est le sous-ensemble de A formé des fonctions non négatives (au sens ordinaire) et que l'opération de module est entendue au sens ordinaire. Cela étant, on vérifie facilement que les axiomes 1^*— 3^* et 1° — 4° des N^{os} 47 et 50 sont satisfaits.

Nous démontrerons les théorèmes suivants[5]):

Théorème 54.1. *Si A est l'ensemble de toutes les fonctions (réelles ou complexes) bornés sur G, la convergence forte (au sens du* N° 51) *équivaut à la convergence uniforme sur G.*

Corollaire 54.1. *Lorsque A est l'ensemble des fonctions (réelles ou complexes) continues sur G et que G est un compact, la con vergence forte équivaut à la convergence uniforme sur G.*

Théorème 54.2. *Si $G=\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$ et A est l'ensemble de toutes les fonctions (réelles ou complexes) bornées sur les ensembles G_ν* ($\nu=1, 2,\ldots$), *alors la convergence forte équivaut à la convergence uniforme sur tous les ensembles G_ν.*

Corollaire 54.2. *Lorsque A est l'ensemble des fonctions (réelles ou complexes) continues sur G et que G est un ensemble ouvert, la convergence forte équivaut à la convergence uniforme dans l'intérieur de G, c'est-à-dire à la convergence uniforme sur tous les compacts contenus dans G.*

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 54.1. Si une suite $a_n=\{a_n(x)\}$ $(x \in G)$ converge fortement vers $a=\{a(x)\}$, il existe dans A^* une fonction $c=\{c(x)\}$ telle que, pour tout q naturel et tout $x \in G$, on a

(54.1) $\qquad q\,|a_n(x) - a(x)| \leq c(x)$ à partir d'un indice n.

Si γ est la borne supérieure de $c(x)$ sur G, on a donc

$$|a_n(x) - a(x)| < \frac{x}{q},$$

d'où la convergence uniforme sur G. Réciproquement, si l'on suppose la convergence uniforme sur G, on a pour tout q naturel et tout $x \in G$,

$$q\,|a_n(x) - a(x)| < 1 \quad \text{à partir d'un indice } n,$$

et il suffit de poser $c=\{1\}$.

[5]) Voir J. G.-Mikusiński [14].

La démonstration du corollaire 54.1 est immédiate, en vertu du N° 53.

La démonstration du théorème 54.2 sera appuyée sur un lemme qui nous sera encore utile dans la suite.

Lemme 54. *Soit $H_1, H_2, \ldots$ une suite d'ensembles disjoints et soit G leur somme. On suppose qu'une suite de fonctions $a_n = \{a_n(x)\}$ $(x \epsilon G)$ converge uniformément vers $a = \{a(x)\}$ sur chacun des ensembles $H_1, H_2, \ldots$ et que*

$$|a_n(x)| \leqslant b(x) \quad pour\ x \epsilon G \quad (n=1, 2, \ldots),$$

où $b(x)$ est une fonction non négative sur G. Si $\beta_1, \beta_2, \ldots$ est une suite de nombres positifs, croissante indéfiniment et $c(x) = \beta_\nu\, b(x)$ pour $x \epsilon H_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, alors, quel que soit q naturel et $x \epsilon G$, on a pour n assez grand

$$q\,|a_n(x) - a(x)| \leqslant c(x). \tag{54.2}$$

Démonstration du lemme. On a

$$|a_n(x) a(x)| \leqslant |a_m(x) - a(x)| + |a_m(x)| + |a_n(x)| \leqslant |a_m(x) - a(x)| + 2b(x)$$

pour $x \epsilon G$ et $m, n = 1, 2, \ldots$. Si l'on fait tendre m vers l'infini, il vient donc

$$|a_n(x) - a(x)| \leqslant 2b(x) \quad \text{pour } x \epsilon G \text{ et } n = 1, 2, \ldots .$$

Soit maintenant q un nombre naturel fixé arbitrairement et ν_0 le moindre indice tel que $\beta_{\nu_0} \geqslant 2q$. Alors l'inégalité (54.2) a certainement lieu pour $x \epsilon H_\nu$, où $\nu \geqslant \nu_0$, et n quelconque, car $q\,|a_m - a_n| \leqslant q(|a_m| + |a_n|) \leqslant 2q\, b(x)$. Or, l'inégalité a encore lieu pour x appartenant à l'un quelconque des ensembles $H_1, \ldots, H_{\nu_0 - 1}$, pourvu que n soit assez grand, car la suite $\{a_n(x)\}$ converge uniformément sur chacun de ces ensembles. Donc pour n assez grand l'inégalité (54.2) a lieu sur l'ensemble G tout entier.

Démonstration du théorème 54.2. Il est évident que la convergence forte entraîne la convergence uniforme sur G_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Pour démontrer l'inclusion inverse, posons $H_1 = G_1$ et $H_\nu = G_\nu - \sum_{i=1}^{\nu-1} G_i$ pour $\nu = 2, 3, \ldots$; les ensembles $H_1, H_2, \ldots$ sont évidemment disjoints et l'on a $G = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu$. Si maintenant une suite $a_n = \{a_n(x)\}$ converge uniformément sur chacun des ensembles G_ν, il en est de même des ensembles H_ν et il existe une fonction $b = \{b(x)\}$, bornée sur chacun des H_ν, telle que

$$|a_n(x)| \leqslant b(x) \quad \text{pour } x \epsilon G \text{ et } n = 1, 2, \ldots .$$

D'après le lemme 54 on a donc, quel que soit q naturel,

$$q\,|a_n(x)-a(x)| \leqslant c(x) \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

où $c(x)$ est une fonction bornée sur chacun des ensembles H_ν et par suite sur chacun des ensembles G_ν (car $G_\nu \subset \sum_{i=1}^{\nu} H_i$).

D é m o n s t r a t i o n d u c o r o l l a i r e 54.2. Tout ensemble ouvert G peut être représenté sous la forme $G=\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$, où les G_ν sont des compacts. Or, toute fonction continue dans G est bornée sur chacun des compacts G_ν et, inversement, toute fonction qui est bornée sur les G_ν peut être majorée par une fonction continue dans G, d'où le corollaire, en vertu du N° 53.

55. Convergence forte dans les espaces des fonctions définies presque partout. Il est parfois commode d'appeler *égales* les fonctions qui sont égales presque partout. Or, cet abus de language, fréquent dans la théorie des fonctions réelles, peut conduire à certaines confusions, lorsqu'on parle par exemple de l'unicité de la limite ou de l'unicité du zéro dans un groupe abélien. Cette difficulté logique peut être levée, en considérant les classes de fonctions dont les éléments sont égaux presque partout. On est ainsi amené à considérer des suites de classes au lieu de celles de fonctions; la limite d'une telle suite sera encore une classe. Pareillement le zéro dans un groupe abélien sera la classe des fonctions qui sont nulles presque partout.

Il est quand même possible, en gardant certaines précautions, de parler des fonctions au lieu de leurs classes et c'est ce que nous ferons dans la suite. Il faut naturellement convenir que toute fonction peut être remplacée par n'importe quelle fonction qui n'en diffère que sur un ensemble de mesure nulle. Les théorèmes d'unicité signifierons que la fonction dont il s'agit est déterminée à un ensemble de mesure nulle près.

Cela convenu, considérons un ensemble A de fonctions mesurables et finies presque partout sur un ensemble mesurable G. Supposons que

(i) A soit un groupe abélien par rapport à l'addition;
(ii) le module (au sens ordinaire) de toute fonction de A appartienne encore à A.

Soit A^* le sous-ensemble de A formé des fonctions non négatives presque partout sur G et convenons que l'opération de module soit entendue au sens ordinaire. Alors les axiomes $1^* - 3^*$ et $1^\circ - 4^\circ$ des Nos 47 et 50 sont satisfaits.

Nous démontrerons les théorèmes suivants[6]):

Théorème 55.1. *Si A est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables et finies presque partout sur G, alors la convergence forte équivaut à la convergence presque partout (au sens ordinaire) sur G.*

Théorème 55.2. *Si A est l'ensemble de toutes les fonctions p-sommables ($p > 0$) sur G, alors une condition suffisante et nécessaire pour qu'une suite $a_n = \{a_n(x)\}$ converge fortement vers $a = \{a(x)\}$ est qu'elle converge presque partout (au sens ordinaire) vers a et qu'elle soit bornée presque partout par une fonction p-sommable $c = \{c(x)\}$ c'est-à-dire que l'on ait $|a_n(x)| \leqslant c(x)$ pour $x \in G$ et $n = 1, 2, \ldots$.*

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 55.1. Il est évident que la convergence forte entraîne la convergence presque partout. Supposons maintenant, inversement, qu'une suite $a_n = \{a_n(x)\}$ converge presque partout sur G. Alors il existe une foncion $\{b(x)\}$ mesurable et finie presque partout sur G, telle que

$$|a_n(x)| \leqslant b(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{55}$$

presque partout sur G. D'autre part il existe, d'après un théorème d'E g o r o f f[7]), une suite d'ensembles mesurables $H_0, H_1, H_2, \ldots$ telle que $|H_0| = 0$[8]), $\sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu = G$ et que la suite a_n converge uniformément sur chacun des ensembles $H_1, H_2, \ldots$. On peut supposer que les ensembles $H_0, H_1, H_2, \ldots$ sont disjoints et que l'inégalité (55) a lieu partout sur les ensembles $H_1, H_2, \ldots$. En effet, dans le cas contraire on poserait $H'_0 = H_0 + K$, $H'_1 = H_1 - K$ et $H'_\nu = H_\nu - \sum_{i=1}^{\nu-1} H_i - K$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$, K étant l'ensemble (de mesure nulle) où l'inégalité (55) n'a pas lieu, et l'on prendrait ensuite les ensembles $H'_0, H'_1, \ldots$ au lieu de $H_0, H_1, \ldots$.

Cela étant la convergence forte résulte immédiatement du lemme 54.

La démonstration du théorème 55.2 est analogue. La seule différence consiste en ce que la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots$ du lemme 54 doit être choisie de la manière que la fonction c soit p-sommable. Or, ceci est toujours possible, car b a été supposée sommable.

[6]) J. G.-M i k u s i ń s k i [14].

[7]) On emploie ici une forme de ce théorème qui est due à N. L u s i n [10], p. 20. Voir aussi S. S a k s [18], p. 19.

[8]) $|H_0|$ signifie la mesure de H_0.

56. La condition de Cauchy. Nous laissons maintenant de côté les espaces fonctionnelles et nous revenons à nos considérations générales.

On dira qu'une suite a_n satisfait à la *condition de Cauchy*, lorsqu'il existe un élément $c \in A^*$, tel que pour tout q naturel on a

$$q\,|a_m - a_n| < c \quad \text{pour } m \text{ et } n \text{ suffisamment grands.}$$

Théorème 56.1. *Si une suite a_n satisfait à la condition de Cauchy, elle est bornée, c'est-à-dire il existe un élément $b \in A^*$ tel que*

$$|a_n| < b \quad \textit{pour } n = 1, 2\ldots\ .$$

Démonstration. On a

$$|a_n| = |(a_n - a_m) + a_m| < |a_n - a_m| + |a_m|.$$

Si la condition de Cauchy est remplie, on peut fixer m de manière que

$$|a_n - a_m| \leqslant c \text{ pour } n > m,$$

où $c \in A^*$. En posant $b = |a_1| + \ldots + |a_m| + c$, on a donc $|a_n| < b$ pour tout n naturel.

Théorème 56.2. *Toute suite a_n qui converge fortement vers un élément a de A, satisfait à la condition de Cauchy.*

Démonstration. On a, pour m et n assez grands,

$$q\,|a_m - a| < c \quad \text{et} \quad q\,|a_n - a| < c,$$

d'où

$$q\,|a_m - a_n| = q\,|(a_m - a) - (a_n - a)| < (|a_m - a| + |a_n - a|) \leqslant 2c.$$

Corollaire 56 (des théorèmes 56.1 et 56.2). *Toute suite fortement convergente est bornée.*

57. Espaces fortement complets. Nous avons vu au N° 56 que, si la limite forte $\lim a_n$ existe, la suite a_n satisfait à la condition de Cauchy. Or, la réciproque n'est pas vraie: si la condition de Cauchy est remplie pour une suite a_n, on ne peut pas en déduire en général qu'il existe la limite forte de a_n. On le voit aisément sur l'exemple suivant:

Soit A l'ensemble de tous les nombres rationnels, où l'addition est entendue au sens ordinaire, et soit A^* l'ensemble des nombres rationnels non négatifs. Alors, si la limite forte d'une suite $a_n \in A$ existe, elle se confond avec la limite au sens ordinaire. Si maintenant une suite $a_n \in A$ converge au sens ordinaire vers $\sqrt{2}$ elle satisfait évidemment à la condition de Cauchy, mais elle ne possède pas de limite forte, car $\sqrt{2}$ n'appartient pas à A.

Par contre, si l'ensemble considéré A est celui de tous les nombres (réels ou complexes), la condition de Cauchy entraîne toujours la convergence forte vers une limite qui appartient à A. Cet ensemble est dit *fortement complet.*

On dit généralement qu'un espace E est fortement complet, lorsque toute suite $a_n \epsilon E$ qui satisfait à la condition de Cauchy converge fortement vers un élément $a \epsilon E$.

Si un ensemble A est fortement complet, il en est de même de l'ensemble A^*. En effet, si la condition de Cauchy est satisfaite pour une suite $a_n \epsilon A^*$, on a $\lim a_n = a \epsilon A$, car A est complet. Or, on a $\lim a_n = \lim |a_n| = |a| \epsilon A^*$ (v. N° 52), d'où la proposition.

Exemples 57. Le lecteur vérifiera que les ensembles A considérés dans les théorèmes 54.1, 54.2, 55.1, 55.2 et dans les corollaires 54.1 et 54.2 sont fortement complets.

58. Séries. On dit qu'une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$$

est fortement convergente vers s lorsque la suite $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ est fortement convergente vers s. On appelle s *somme* de cette série et l'on écrit

$$a_1 + a_2 + \ldots = s.$$

Théorème 58. *Si l'ensemble A est fortement complet et si la série des modules $|a_1| + |a_2| + \ldots$ est fortement convergente, il en est de même de la série $a_1 + a_2 + \ldots$.*

Démonstration. On a alors, quel que soit q naturel,

$$q\,|a_{m+1} + \ldots + a_n| \leqslant q(|a_{m+1}| + \ldots + |a_n|) \leqslant c$$

pour m et n assez grands, d'où le théorème.

Si la série des modules $|a_1| + |a_2| + \ldots$ converge fortement, alors la série $a_1 + a_2 + \ldots$ est dite *fortement et absolument convergente.*

59. L'inégalité et le module dans l'anneau algébrique. On adopte pour l'*anneau algébrique* les mêmes axiomes $1^* - 3^*$ et $1^\circ - 4^\circ$ que pour le groupe abélien (N^os 47 et 50) et l'on introduit encore les deux suivantes:

2^{**} *Si $a \epsilon A^*$ et $b \epsilon A^*$, alors $ab \epsilon A^*$;*

5^* $|ab| \leqslant |a| \cdot |b|$.

L'axiome 2** paraît être tout à fait naturel, car il exprime le fait que le produit de deux éléments non négatifs est encore non négatif. L'axiome 5° est justifié par le fait qu'il est rempli dans certains espaces abstraits très importants, tandis que la relation classique $|ab| = |a| \cdot |b|$ y est fausse en général. Ce phénomène a lieu, entre autres, dans les espaces où le produit est défini au moyen de l'une des *compositions de Volterra* ou des opérations pareilles (v. N° 9). Considérons, à titre d'exemple, l'espace A des fonctions réelles et continues dans l'intervalle fermé $[0,1]$. Adoptons, comme au N° 54, les définitions habituelles de l'addition, des fonctions non négatives et celle du module et posons pour le produit

$$ab = \{a(t)\}\{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau \right\}.$$

L'ensemble considéré est alors un anneau algébrique (v. N^{os} 12 et 13). Si l'on prend maintenant pour a et b les fonctions $\{1\}$ et $\{t - \frac{1}{2}\}$ respectivement, on aura

$$|a \cdot b| = \left\{ \left| \int_0^t \left(\tau - \tfrac{1}{2}\right) d\tau \right| \right\} = \left\{ \tfrac{1}{2} |t^2 - t| \right\},$$

$$|a| \cdot |b| = \left\{ \int_0^t \left|\tau - \tfrac{1}{2}\right| d\tau \right\} = \begin{cases} \tfrac{1}{2}|t^2 - t| & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}|t^2 - t| & \text{pour } \tfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases},$$

donc $|a \cdot b| \neq |a| \cdot |b|$.

Le lecteur vérifiera que

(α) Si l'on adopte la définition habituelle des fonctions non négatives et du module, alors les axiomes 1*, 2*, 2**, 3* et 1° — 5° sont satisfaits pour les anneaux I_T(ii), I_T(iii), I_T(v), I_T(vi), I_T(vii) et ne le sont pas pour les anneaux I_1(vii) et I_T(ix) des N^{os} 12 et 13. De plus, les cinq premiers anneaux sont complets.

(β) Si l'on adopte la définition habituelle du module et si l'ensemble A^* est celui des fonctions presque partout non négatives, alors tous les anneaux $\breve{I}_T$, $\breve{I}_T$(i), $\breve{I}_1$(ii),..., $\breve{I}_\infty$(x), l'exception faite de I_T(IX), satisfont aux axiomes 1*, 2*, 2**, 3* et 1° — 5° et ils sont complets. (Les signes ˘ au-dessus de I signifient ici qu'il faut compter comme égales des fonctions qui sont égales presque partout (v. N^{os} 55 et 17)). Il en est de même des anneaux $\breve{F}$ et V (v. N^{os} 14 et 15).

60. Quelques propositions élémentaires. Il est évident que toutes les propositions établies aux N^{os} 48 et 50 sont vraies dans le cas de l'anneau algébrique, car celui-ci est en même temps un groupe abélien. Nous ajouterons encore quelques propositions concernant la multiplication.

(i) *Si* $0 \leqslant a \leqslant b$ *et* $0 \leqslant c \leqslant d$, *on a* $ac \leqslant bd$.

En effet, on a d'après 2** et 2*

$$bd - ac = b(d-c) + (b-a)c \in A^*.$$

D'après (i) les inégalités dont les premiers membres appartiennent à A^* peuvent se multiplier l'une par l'autre.

(ii) *Si* $0 \leqslant a \leqslant b$, *on a* $a^q \leqslant b^q$ *pour tout q naturel.*

En effet, d'après (i) on a $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$ et par induction $0 \leqslant a^q \leqslant b^q$ pour tout q naturel.

(iii) $|a_1 \ldots a_n| \leqslant |a_1| \ldots |a_n|$.

Cette inégalité se déduit de 5° par l'induction.

(iv) $\lim (a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$, *pourvu que les deux limites* $\lim a_n$ *et* $\lim b_n$ *existent.*

En effet si

$$q|a_n - a| \leqslant c_1 \quad \text{et} \quad q|b_n - b| \leqslant c_2,$$

on a

$$\begin{aligned} q|a_n b_n - ab| &= q|(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leqslant q|a_n - a| \cdot q|b_n - b| + |a| \cdot q|b_n - b| + q|a_n - a| \cdot |b| \\ &\leqslant c_1 c_2 + |a| c_2 + c_1 |b|. \end{aligned}$$

(v) *Si une suite numérique* α_n *tend vers* α, *on a* $\lim \alpha_n a = \alpha a$ *pour tout* $a \in A$.

En effet,

$$q|\alpha_n a - \alpha a| = q|\alpha_n - \alpha| \cdot |a| \leqslant |a| \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

61. Multiplication des séries absolument convergentes. On a le théorème suivant (dû à C a u c h y):

Théorème 61. *Si deux séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sont fortement et absolument convergentes, il en est de même de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *où* $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$, *et l'on a* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que la différence

$$d_m = \sum_{n=1}^{m} a_n \cdot \sum_{n=1}^{m} b_n - \sum_{n=1}^{m} c_n$$

tend vers zéro pour $m \to \infty$. Si $\frac{m-1}{2} \leqslant p \leqslant \frac{m}{2}$ (p entier), on peut écrire

$$\begin{aligned} d_m = a_2 b_m + a_3(b_{m-1}+b_m)\ldots + a_p(b_{m-p+2}+\ldots+b_m) + \\ + (a_{p+1}+\ldots+a_m)(b_{m-p+1}+\ldots+b_m) + \\ + a_m b_2 + (a_{m-} + a_m) b_3 + \ldots + (a_{p+2}+\ldots+a_m) b_{m-p}. \end{aligned}$$

Donc

$$|d_m| \leqslant a(|b_{m-p+1}|+\ldots|b_m+|) + (|a_{p+1}|+\ldots+|a_m|)b, \tag{61}$$

où $a = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et $b = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Si maintenant $m \to \infty$, le second membre de (61) tend vers zéro, d'où le théorème.

62. L'anneau complexe du type [A]. Soit A_1 l'anneau algébrique formé de tous les *nombres* (réels ou complexes) avec les définitions habituelles de l'addition, de la multiplication, de l'ensemble A_1^* des nombres non négatifs et du module. Soit ensuite A_2 un anneau algébrique quelconque, où l'ensemble des éléments non négatifs A_2^* et l'opération du module sont établies conformément aux axiomes

(61.2) $\qquad 1^*, 2^*, 3^{**},\;$ et 1°—5°

des N[os] 48, 50 et 59. Les éléments de l'anneau A_1 seront dits *nombres* et ceux de A_2 *vecteurs* (v. N° 29). Nous allons considérer l'anneau complexe A du type [A] (v. N[os] 27—29) formé de manière que le produit d'un vecteur par un nombre est toujours un vecteur et que les axiomes suivants sont remplis:

$$(62.2) \qquad \begin{cases} 2^{***} \text{ Si } \alpha \in A_1^* \text{ et } a \in A_2^*, \text{ alors } \alpha a \in A_2^*; \\ 3^{\circ\circ}\ |\alpha a| = |a| \cdot |\alpha|. \end{cases}$$

Nous convenons qu'un élément $\alpha + a$ ($\alpha \in A_1$, $a \in A_2$) de A appartiendra à l'ensemble A^* des éléments non négatifs lorsque $\alpha \in A_2^*$ et $a \in A_2^*$. On vérifie facilement que les axiomes 1^*, 2^*, 2^{**} et 3^* sont alors satisfaits pour A^*. Le module dans A sera défini par la relation

$$|\alpha + a| = |\alpha| + |a|.$$

Cela posé, on vérifie facilement que ce module satisfait aux axiomes 1°—5°.

Remarquons que dans le cas de l'anneau complexe du type [A] l'inégalité (50.3) peut être remplacée par l'inégalité habituelle

(62) $$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|.$$

En effet, on a alors

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant \Big||a|-|b|+\tfrac{1}{2}(|b|-|a|+|a-b|)\Big|+\Big|-\tfrac{1}{2}(|b|-|a|+|a-b|)\Big|$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\Big||a|-|b|+|a-b|\Big|+\tfrac{1}{2}\Big||b|-|a|+|a-b|\Big|,$$

d'où (62), en vertu de (50.5) et (50.6).

Étant donnée une suite $u_n=\alpha_n+a_n$ ($\alpha_n \epsilon A_1$, $a_n \epsilon A_2$, $n=1,2,\ldots$), il est évident que la convergence forte de u_n vers $u=\alpha+a$ équivaut à la convergence forte simultanée des deux suites α_n et a_n vers α et a respectivement.

Remarque 62.1. Si l'on adopte l'axiome $3^{\circ\circ}$, l'axiome 3° devient manifestement superflu, car il devient un cas particulier de $3^{\circ\circ}$.

Remarque 62.2. Nous avons adopté ci-dessus les axiomes (62.1) pour l'anneau A_2 et les axiomes (62.2) pour l'anneau A. Ceci entraîne le fait que les axiomes (62.1) sont encore remplis par l'anneau A. Or, il est facile de vérifier que, réciproquement, si l'on suppose que les axiomes (62.1) sont remplis par les deux anneaux A_2 et A, alors les axiomes (62.2) en sont une conséquence. En effet, ceci est immédiat pour l'axiome 2^{***}; quant à l'axiome $3^{\circ\circ}$, il suffit de remarquer que l'on a alors

$$|\alpha|\cdot|a|=|\alpha|\cdot\Big|\frac{1}{\alpha}\alpha a\Big| \leqslant |\alpha|\cdot\Big|\frac{1}{\alpha}\Big|\cdot|\alpha a|=|\alpha a| \leqslant |\alpha|\cdot|a|,$$

d'où $3^{\circ\circ}$, en vertu (vii) (N° 48).

Remarque 62.3. Dans le cas de l'anneau A du type [A] la définition de la convergence forte donnée au N° 51 peut être remplacée par la définition équivalente que voici: Une suite a_n ($n=1,2,\ldots$) converge fortement vers a, lorsqu'il existe un élément $c \epsilon A^*$ tel que, quel que soit le nombre ε positif, on a $|a_n-a| \leqslant \varepsilon c$ pour n suffisamment grand.

63. Séries dans l'anneau du type [A]. Pour les anneaux du type [A] le théorème suivant a lieu:

Théorème 63. *Si l'anneau A (du type [A]) est complet (N° 57), la convergence forte d'une série $u_0+u_1+u_2+\ldots$ ($u_n \epsilon A$ pour $n=1,2\ldots$)*

entraîne la convergence forte et absolue (vers un élément de A) de toute série de la forme

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots$ *est une série numérique telle que* $|a_n| < \mu^n < 1$ *pour* n *assez grand.*

Démonstration. En posant $s_n = |a_0|\,|u_0| + \dots + |a_n|\,|u_n|$, on a

$|s_m - s_n| \leqslant |a_{n+1}|\,|u_{n+1}| + \dots + |a_m|\,|u_m| \leqslant \mu^{n+1}|u_{n+1}| + \dots + \mu^m |u_m|$ pour $m > n$.
La convergence forte de la série $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ étant supposée, on a $|u_n| \leqslant b \in A^*$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ (v. Corollaire 56), donc

$$|s_m - s_n| \leqslant (\mu^{n+1} + \dots + \mu^m)\, b \leqslant \frac{\mu^{n+1}}{1-\mu}\, b,$$

d'où le théorème.

Du théorème 63 on déduit facilement qu'il existe, pour toute série

(63.1) $\qquad u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots \quad (\lambda \in A_1,\ u_n \in A,\ n = 0, 1, 2, \dots),$

un nombre non négatif ϱ, tel que cette série est fortement et absolument convergente (vers un élément de A) pour tout λ dont la valeur absolue est inférieure à ϱ et divergente pour tout λ dont la valeur absolue est supérieure à ϱ. On appellera ϱ *rayon de convergence* de la série (63.1). Ce rayon est nul lorsque la série diverge pour tout $\lambda \neq 0$, il est infini lorsqu'elle converge pour tout λ.

Si la série proposée est de la forme

$$\lambda u + \lambda^2 u^2 + \dots \quad (\lambda \in A_1,\ u \in A),$$

son rayon de convergence sera dit *rayon de l'élément* u et il sera désigné par $\varrho(u)$.

64. Quelques interprétations particulières. Nous supposerons à ce N° que les éléments de l'anneau A_2 sont des *fonctions*. Nous adopterons les définitions habituelles de l'addition et de la multiplication de la fonction (vecteur) par un nombre. Le sous-ensemble A^* sera celui des fonctions non négatives et le module sera entendu au sens ordinaire. Cela convenu, les interprétations (α), (β) et (γ) seront des anneaux algébriques satisfaisant aux axiomes (62.1); les anneaux du type [A] leur correspondant satisferont aux axiomes (62.2). Tous ces anneaux seront complets.

(α) Soit A_2 l'ensemble des fonctions complexes d'une variable réelle t, mesurables dans un intervalle donné $0 < t < T$ et bornées dans tout intervalle partiel fermé. Adoptons la définitions suivante de la multilipcation

$$ab = \{a(t)\}\{b(t)\} = \left\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Nous démontrerons que si la condition suivante 3° est remplie pour une fonction $u \in A_2$, le rayon de cette fonction est infini:

3° Il existe pour $u = \{u(t)\}$ deux nombres positifs ϵ et δ tels que

$$|a(t)| \leqslant \frac{1}{t^{1-\epsilon}} \quad \text{pour } 0 < t < \delta.$$

En effet, supposons d'abord que l'on ait $|u(t)| \leqslant \frac{\varkappa}{t^{1-\epsilon}}$ pour $0 < t \leqslant T < +\infty$. Alors

$$|u^n| \leqslant |u|^n \leqslant \left\{\frac{\varkappa}{t^{1-\epsilon}}\right\}^n = [\varkappa\Gamma(\varepsilon)]^n \cdot l^{n\epsilon} \leqslant \frac{[\varkappa\Gamma(\varepsilon)]^n \cdot T^{n-1}}{\Gamma(n\varepsilon)}\, l \qquad \text{pour } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

(v. N° 30). Il s'ensuit que la série

$$\lambda u + \lambda^2 u^2 + \ldots \tag{64.1}$$

converge uniformément dans l'intervalle $0 < t \leqslant T$, quel que soit λ complexe. Si maintenant on suppose que la condition 3° est remplie, il existe pour tout $t_0 \in (0, T)$ un nombre positif $\varkappa = \varkappa(t_0)$ pour lequel $|u(t)| \leqslant \frac{\varkappa(t_0)}{t^{1-\epsilon}}$ dans l'intervalle $0 < t \leqslant t_0$. Par suite la série (64.1) converge uniformément dans tout intervalle fermé contenu dans $(0, T)$. D'après le corollaire 54.2 la série (64.1) converge donc fortement, quel que soit λ complexe. C'est ce qui signifie que le rayon de u est infini.

Le lecteur vérifiera que le sous-ensemble de A_2 des fonctions qui satisfont à la condition 3° constitue encore un anneau algébrique.

(β) Soit A_2 l'ensemble des fonctions complexes $a = \{a(x, y)\}$ de deux variables réelles, ces fonctions étant assujetties aux conditions suivantes:

1° a est definie dans le triangle T_{AB}:

$$A < y < x < B,$$

où A et B sont des nombres donnés, finis ou infinis;

2° a est mesurable par rapport à chacune des variables x et y;

3° à toute fonction a et à tout couple de nombres α, β (où $A < \alpha < \beta < B$) on peut faire correspondre deux nombres positifs μ et $\varkappa$ tels que $|a(x,y)| \leqslant \mu(x-y)^{\varkappa-1}$ dans le triangle $T_{\alpha,\beta}$:

$$\alpha \leqslant y < x \leqslant \beta.$$

On suppose que la multiplication est définie par la formule

$$ab = \{a(x,y)\}\{b(x,y)\} = \left\{\int_y^x a(x,s)\, b(s,y)\, ds\right\},$$

Cela posé, nous démontrerons que le rayon de tout élément de A_2 est infini. En effet, on a dans le triangle $T_{\alpha,\beta}$

$$|a^2| \leqslant \left|\int_y^x a(x,s)\, a(s,y)\, ds\right| \leqslant \mu^2 \int_y^x (x-s)^{\varkappa-1}(s-y)^{\varkappa-1}\, ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\varkappa)^2\, \mu^2}{\Gamma(2\varkappa)} (x-y)^{2\varkappa-1}$$

et par induction

$$|a_n| < \frac{\Gamma(\varkappa)^n \mu^n}{\Gamma(n\varkappa)} (x-y)^{n\varkappa-1}$$

Donc, en posant, il vient $\quad \sigma = |\lambda|^n \Gamma(\varkappa)^n \mu^n$

$$|\lambda^{m+1} a^{m+1} + \ldots + \lambda^n a^n| < \frac{\sigma^{m+1}}{\Gamma[(m+1)\varkappa]} (x-y)^{(m+1)\varkappa-1} + \ldots + \frac{\sigma_n}{\Gamma(n\varkappa)} (x-y)^{n\varkappa-1}$$

d'où la convergence uniforme dans $T_{\alpha,\beta}$. Soit maintenant T_{α_n,β_n} $(n=1, 2,\ldots)$ une suite de triangles fermés dont la somme est T_{AB}. Alors la série

(64.2) $$\lambda u + \lambda^2 u^2 + \ldots$$

converge uniformément dans chacun des ensembles H_1, $H_2,\ldots$, où $H_1 = T_{\alpha_1\beta_1}$, $H_n = T_{\alpha_{n+1}\,\beta_{n+1}} - T_{\alpha_n\,\beta_n}$ $(n=2, 3,\ldots)$. En appliquant le lemme 54, on voit donc que la série (64.2) converge fortement.

(γ) Soit A_2 l'ensemble des fonctions complexes $a = \{a(x,y)\}$ de deux variables réelles, ces fonctions étant assujetties aux conditions suivantes:

1° a est définie dans l'ensemble K des valeurs x, y satisfaisant aux inégalités $0 < x,y < 1$ et $x \neq y$;

2° a est mesurable par rapport à chacune des variables x et y;

3° il existe pour tout a un couple de nombres positifs μ et $\varkappa$ tel que $|a(x,y)| < \mu |x-y|^{\varkappa-1}$ dans K.

La multiplication soit definie par la formule:

$$ab = \{a(x,y)\}\{b(x,y)\} = \left\{\int_0^1 a(x,s)\,b(s,y)\,ds\right\}.$$

Nous démontrerons que le rayon de tout élément de A_2 est positif. On a en effet

$$|u^n| \leqslant |u|^n \leqslant \mu\{|x-y|^{\varkappa-1}\}^n.$$

En posant $b_\varkappa = \{|x-y|^{\varkappa-1}\}$, on a d'après le calcul du N° 14

$$b_\varkappa^2 \leqslant \beta_\varkappa b_\varkappa$$

où $\beta_\varkappa = \frac{2}{\varkappa} + B(\varkappa,\varkappa)$, B étant la fonction *beta* d'Euler. Donc

$$|u^n| \leqslant \mu^n \beta_\varkappa^{n-1} b_\varkappa.$$

Si $|\lambda| \leqslant \frac{1}{\mu\beta_\varkappa}$, on a

$$|\lambda^{m+1}u^{m+1} + \ldots + \lambda^n u^n| \leqslant \frac{1}{\beta_\varkappa}(\sigma^{m+1} + \ldots + \sigma^n)\, b_\varkappa \qquad (\sigma = |\lambda|\mu\beta_\varkappa),$$

d'où la convergence forte de la série $\lambda u + \lambda^2 u^2 + \ldots$.

65. Fonctions de variable numérique dont les valeurs appartiennent à un anneau algébrique. La série (63.1) fait correspondre à chaque λ du cercle de convergence un élément $s(\lambda) \epsilon A$ qui est la somme de cette série. La somme $s(\lambda)$ peut donc être considérée comme une *fonction* d'une variable complexe dont les valeurs appartiennent à l'anneau A. Plus généralement, si à chaque valeur λ d'un ensemble E de nombres complexes ou réels est attribué un élément $a(\lambda)$ d'un anneau algébrique A, on dira que dans l'ensemble E est définie une *fonction* $a(\lambda)$.

66. Continuité forte et uniformément forte. La fonction $a(\lambda)$ définie sur E sera dite *fortement continue au poit* $\lambda \epsilon E$, lorsqu'il existe un élément $c \epsilon A^*$ pour lequel il est possible de faire correspondre à tout q naturel un nombre positif δ de manière que l'inégalité $|\lambda - \lambda'| \leqslant \delta$, où $\lambda' \epsilon E$, entraîne $q\,|a(\lambda) - a(\lambda')| \leqslant c$. On dira que $a(\lambda)$ est *fortement continue sur l'ensemble* E, lorsqu'elle est continue en tout point de cet ensemble.

Théorème 66.1. *Si $a(\lambda)$ est fortement continue sur un compact E, elle est bornée sur ce compact, c'est-à-dire il existe un élément $b \epsilon A^*$ tel que $|a(\lambda)| \leqslant b$ pour tout $\lambda \epsilon E$.*

En effet, on peut alors faire correspondre à tout $\lambda \in E$ un entourage $V(\lambda)$ de λ et un élément $c(\lambda) \in A^*$, tels que $|a(\lambda) - a(\lambda')| \leqslant c(\lambda)$ pour $\lambda \in EV(\lambda)$, en désignant par $EV(\lambda)$ l'intersection des ensembles E et $V(\lambda)$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue il existe un nombre fini d'entourages $V(\lambda_1), \ldots, V(\lambda_n)$ qui couvrent le compact E. On a $|a(\lambda')| \leqslant |a(\lambda_\nu)| + c(\lambda_\nu)$ pour $\lambda' \in EV(\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ et par suite $|a(\lambda')| \leqslant b = \sum_{\nu=1}^{n} \left(|a(\lambda_\nu)| + c(\lambda_\nu) \right)$, d'où la proposition.

Une fonction $a(\lambda)$ définie sur un ensemble E sera dite *uniformément fortement continue sur E*, lorsqu'il existe un élément $c \in A^*$ tel qu'il est possible de faire correspondre à tout q naturel un nombre positif $\delta = \delta(q)$ pour lequel l'inégalité $|\lambda - \lambda'| \leqslant \delta$, où $\lambda, \lambda' \in E$, entraîne $q|a(\lambda) - a(\lambda')| \leqslant c$.

La continuité uniformément forte entraîne donc la continuité forte. Or, la réciproque n'a pas lieu, même si l'ensemble considéré est un compact, comme on le voit sur l'exemple suivant:

Exemple 66. Soit A l'ensemble des fonctions réelles, presque partout continues sur l'intervalle $[0,1]$. On considère comme égales les fonctions qui sont égales presque partout. On adopte les définitions habituelles de l'addition, de la multiplication, celle des fonctions non négatives et du module. Faisons correspondre à tout $\lambda \in [0,1]$ un élément $a(\lambda) \in A$, en supposant que $a(\lambda) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant \lambda$ et $a(\lambda) = 1$ pour $\lambda < t \leqslant 1$. En regardant $a(\lambda)$ comme une fonction de λ, cette fonction est fortement continue en tout point de l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. En effet, si λ est fixé arbitraiment dans cet intervalle, on a

$$q|a(\lambda) - a(\lambda')| \leqslant \left\{ \frac{1}{|t - \lambda|} \right\} \text{ pour } \lambda' \text{ assez proche de } \lambda.$$

La fonction $a(\lambda)$ est donc fortement continue dans $[0,1]$. Cependant elle ne l'est pas uniformément. En effet, soit $c = \{c(t)\}$ une fonction non négative de l'ensemble A et soit $t = \lambda_0$ un point de continuité de cette fonction. Il est alors évident que l'inégalité $q|a(\lambda_0) - a(\lambda')| \leqslant c$ n'a plus lieu pour q assez grand et $\lambda' \neq \lambda_0$.

Théorème 66.2. *Si une fonction $a(\lambda)$ est uniformément fortement continue sur un ensemble borné E, cette fonction est bornée sur E.*

En effet, il est alors possible de diviser E en un nombre fini de sous-ensembles $E_1, \ldots, E_n$ dont les diamètres sont tellement petits que

$|a(\lambda)-a(\lambda')| \leqslant c$ pour λ et λ' appartenant au même ensemble E_ν $(\nu=1,\ldots,n)$. Alors on a $|a(\lambda')| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |a(\lambda_\nu)| + c$ pour $\lambda' \epsilon E$, où les λ_ν peuvent être fixés arbitrairement dans E_ν $(\nu=1,\ldots,n)$.

Théorème 66.3. *Si $a(\lambda)$ est fortement continue ou uniformément fortement continue sur un ensemble E, il en est de même de son module $|a(\lambda)|$.*

Ce théorème résulte aussitôt de l'inégalité

$$q\big||a(\lambda)|-|a(\lambda')|\big| \leqslant q|a(\lambda)-a(\lambda')| .$$

Théorème 64.4. *Si deux fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont uniformément fortement continues sur un ensemble E, il en est de même de leur somme $a(\lambda)+b(\lambda)$. Si de plus l'ensemble E est borné ou bien si l'une au moins des fonctions $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ est constante, le produit $a(\lambda)b(\lambda)$ est aussi uniformément fortement continu dans E.*

En effet, si

$$q|a(\lambda)-a(\lambda')| \leqslant c_1 \quad \text{et} \quad q|b(\lambda)-b(\lambda')| \leqslant c_2,$$

alors

$$q|[a(\lambda)+b(\lambda)]-[a(\lambda')+b(\lambda')]| \leqslant c_1+c_2.$$

Si a est constant. on a $q|ab(\lambda)-ah(\lambda')| \leqslant |a|\,q|b(\lambda)-b(\lambda')| \leqslant |a|\,c_2$ et si b est constant, on a $q|a(\lambda)b-a(\lambda')b| \leqslant c_1|a|$.

Si l'ensemble E est borné, on a

$$\begin{aligned} q|a(\lambda)b(\lambda)-a(\lambda')b(\lambda')| &= q|[a(\lambda)-a(\lambda)]b(\lambda)+a(\lambda')[b(\lambda)-b(\lambda')]| \\ &\leqslant q|a(\lambda)-a(\lambda')|\cdot|b(\lambda)|+|a(\lambda)|\cdot q|b(\lambda)-b(\lambda')| \\ &\leqslant c_1b_0+a_0c_2, \end{aligned}$$

où $|a(\lambda)| \leqslant a_0$ et $|b(\lambda)| \leqslant b_0$ pour tout $\lambda \epsilon E$ (v. théorème 66.2).

Théorème 66.5. *Si $a(\lambda)=\alpha(\lambda)\cdot c$, où $\alpha(\lambda)$ est une fonction numérique uniformément continue sur E, alors $a(\lambda)$ est uniformément fortement continue sur E.*

La démonstration est immédiate.

67. Dérivée dans l'anneau du type [A] [9]. Supposons qu'une fonction $a(\lambda)$ dont les valeurs appartiennent à un anneau complexe A

[9]) Les notions de dérivé et d'intégrale, introduites aux Nos 67 et 71—74, conservent leur sens dans certains espaces plus généraux dont nous parlerons dans la troisième partie de ce mémoire.

du type [A] soit définie sur un ensemble E et que λ_0 soit un point d'accumulation de cet ensemble. On écrira

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} a(\lambda) = a \qquad (a \in A),$$

lorsqu'il existe un élément $c \in A^*$ pour lequel on a, quel que soit q naturel,

$$q\,|a(\lambda) - a| \leqslant c \qquad \text{pour } \lambda \in E \text{ assez proche de } \lambda_0.$$

On dira que la fonction $a(\lambda)$ est *dérivable au point* $\lambda_0 \in E$, lorsqu'il existe un élément $a'(\lambda_0) \in A$ pour lequel

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{a(\lambda) - a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = a'(\lambda_0).$$

L'élément $a'(\lambda_0)$ sera dit *dérivée de* $a(\lambda)$ *au point* λ_0.

La dérivabilité d'une fonction entraîne la continuité de cette fonction au point considéré. En effet, si $a(\lambda)$ est dérivable au point $\lambda_0 \in E$, on a, quel que soit q naturel,

$$q \left| \frac{a(\lambda) - a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - a'(\lambda_0) \right| \leqslant c \qquad \text{pour } \lambda \in E \text{ assez proche } \lambda_0.$$

Cette inégalité entraîne

$$q\,|a(\lambda) - a\lambda_0)| \leqslant q\,|\lambda - \lambda_0|\,\big(c + |a'(\lambda_0)|\big),$$

d'où la continuité au point λ_0.

Si la dérivée de $a(\lambda)$ existe en tout point d'un ensemble E, on dira $a(\lambda)$ est *dérivable sur* E (on suppose alors que E n'a pas de points isolés). La dérivée est dans ce cas une *fonction* définie sur E.

Voici quelques règles de différentiation:

$$(67) \quad \left|\begin{array}{l} [a(\lambda) + b(\lambda)]' = a'(\lambda) + b'(\lambda); \\ \left.\begin{array}{l} [c \cdot a(\lambda)]' = c \cdot a'(\lambda) \\ [a(\lambda) \cdot c]' = a'(\lambda) \cdot c \end{array}\right\} (c \text{ constant}); \\ [a(\lambda) \cdot b(\lambda)]' = a'(\lambda)\,b(\lambda) + a(\lambda)\,b'(\lambda); \\ \text{si une fonction numérique } \varphi(\lambda) \text{ est dérivable et } b(\lambda) = a[\varphi(\lambda)], \\ \quad \text{alors } b'(\lambda) = \varphi'(\lambda).\ a'[\varphi(\lambda)]. \end{array}\right.$$

Les démonstrations sont analogues à celles de l'analyse classique.

68. Dérivabilité régulière. Considérons la fonction $a(\lambda)$ définie dans l'exemple 66. La dérivée de cette fonction existe partout dans l'intervalle [0,1] et elle est identiquement nulle. En effet, on a, quel que soit q naturel,

$$q\left|\frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right| \leqslant \left\{\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^2}\right\}$$

pour λ assez proche de λ_0, donc $a'(\lambda_0)=\lim \dfrac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=0$ pour tout $\lambda_0 \epsilon [0,1]$. Cet exemple montre que la dérivée peut être identiquement nulle, sans que la fonction soit nécessairement constante.

Nous introduirons maintenant une condition accessoire qui entraîne, dans le cas où la dérivée est nulle, la réduction de la fonction à une constante. Nous dirons qu'une fonction $a(\lambda)$ définie sur un ensemble E est *régulièrement fortement dérivable sur* E lorsqu'il existe une fonction $a'(\lambda)$ définie sur E et un élément $c \epsilon A^*$, tels qu'il est possible de faire correspondre à tout point $\lambda \epsilon E$ et à tout q naturel un nombre positif δ, pour lequel l'inégalité $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, où $\lambda, \lambda_0 \epsilon E$, entraîne

$$(68.1) \qquad q\left|\frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-a'(\lambda_0)\right| \leqslant c.$$

D'après cette définition la dérivabilité régulière entraîne celle au sens du N° 67. La fonction $a'(\lambda)$ qui figure dans (68.1) est la dérivée de $a(\lambda)$. La seule différence entre les deux genres de dérivabilité consiste en ce que l'élément c est, dans le cas de la dérivabilité régulière, le même pour tout $\lambda_0 \epsilon E$, ce qui n'a pas lieu en général (v. l'exemple au commencement de ce N°).

Une fonction constante est évidemment régulièrement fortement dérivable et sa dérivée est identiquement nulle. Le théorème inverse a lieu:

Théorème 68.1. *Lorsqu'une fonction* $a(\lambda)$ *est régulièrement fortement dérivable dans un intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *et que sa dérivée est identiquement nulle, cette fonction est constante dans* $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Démonstration. Faisons correspondre à tout q naturel et à tout $\lambda_0 \epsilon [\lambda_1, \lambda_2]$ un nombre positif $\delta=\delta(q, \lambda_0)$ de manière que l'inégalité

$$(68.2) \qquad q\left|\frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right| \leqslant c$$

soit remplie pour $|\lambda-\lambda_0|<\delta(q, \lambda_0)$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue on peut choisir un nombre fini d'entourages $|\lambda-\lambda_0^{(i)}|<\delta_i$ $(i=1,\ldots,n)$ qui couvrent l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Il s'ensuit qu'il est possible de diviser l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ en n parties au moyen de $n-1$

points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ de manière que l'inégalité $x_i \leqslant \lambda \leqslant x_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n;\ x_0=\lambda_1,\ x_{n+1}=\lambda_2)$ entraîne

$$q\,|a(\lambda)-a(x_i)| \leqslant 2(\lambda-x_i)\,c.$$

En particulier:

$$q\,|a(x_{j+1})-a(x_j)| \leqslant 2(x_{j+1}-x_j)\,c \qquad (j=0,1,\ldots,n).$$

Cela étant, on a

$$\begin{aligned} q\,|a(\lambda)-a(\lambda_1)| &\leqslant q\,|a(\lambda)-a(x_i)|+q\,|a(x_i)-a(x_{i-1})|+\ldots+q\,|a(x_1)-a(\lambda_1)| \\ &\leqslant 2[(\lambda-x_i)+(x_i-x_{i-1})+\ldots+(x_1-\lambda_1)]\,c=2(\lambda-\lambda_1)\,c \\ &\leqslant 2(\lambda_2-\lambda_1)\,c. \end{aligned}$$

D'après l'axiome 3* (N° 47), on a donc $a(\lambda)=a(\lambda_1)$, d'où le théorème.

Théorème 68.2. *Si $a(\lambda)$ est une fonction régulièrement fortement dérivable, il en est de même du produit $ba(\lambda)$, où b est un élément quelconque de A.*

D é m o n s t r a t i o n. En effet, si l'inégalité (68.1) a lieu, on a aussi

$$q\left|\frac{ba(\lambda)-ba(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-ba'(\lambda_0)\right| \leqslant |b|\cdot c.$$

d'où le théorème.

Théorème 68.3. *La somme et la différence de deux fonctions régulièrement fortement dérivables sont encore régulièrement fortement dérivables.*

D é m o n s t r a t i o n. Si

$$(68.3) \qquad q\left|\frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-a'(\lambda_0)\right| \leqslant c_1 \ \text{ et } \ q\left|\frac{b(\lambda)-b(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-b'(\lambda_0)\right| \leqslant c_2,$$

on a

$$q\left|\frac{[a(\lambda)\pm b(\lambda)]-[a(\lambda_0)\pm b(\lambda_0)]}{\lambda-\lambda_0}-[a'(\lambda_0)\pm b'(\lambda_0)]\right| \leqslant c_1+c_2,$$

d'où le théorème.

Théorème 68.4. *Lorsque les fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont régulièrement fortement dérivables sur un compact E et que leurs dérivées sont bornées sur E, le produit $a(\lambda)b(\lambda)$ est encore régulièrement fortement dérivable sur E.*

D é m o n s t r a t i o n. Les fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ étant dérivables, elles sont continues sur E et par suite bornées:

$$|a(\lambda)| \leqslant a_0, \quad |b(\lambda)| \leqslant b_0 \quad \text{pour } \lambda \in E.$$

Si maintenant

$$|a'(\lambda)| \leqslant a'_0, \quad |b'(\lambda)| \leqslant b'_0 \qquad \text{pour } \lambda \in E,$$

on a, en admettant (68.3),

$$q\left|\frac{a(\lambda)\,b(\lambda)-a(\lambda_0)\,b(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-a'(\lambda_0)\,b(\lambda_0)-a(\lambda_0)\,b'(\lambda_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-a'(\lambda_0)\right)b(\lambda)\right|+$$

$$+\left|\left(a(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)a'(\lambda_0)\right)\left(\frac{b(\lambda)-b(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-b'(\lambda_0)\right)\right|+|(\lambda-\lambda_0)\,a'(\lambda_0)\,b'(\lambda_0)|$$

$$\leqslant c_1 b_0+(a_0+|\lambda-\lambda_0|\,a'_0)\,c_2+|\lambda-\lambda_0|\,a'_0\,b'_0,$$

d'où le théorème.

69. Un théorème sur les séries de puissances. Si l'on suppose que l'ensemble considéré A du type [A] est complet, le théorème suivant a lieu:

Théorème 69. *Si la série*

(69.1) $$s(\lambda)=k_0+\lambda k_1+\lambda^2 k_2+\dots$$

est fortement convergente dans le cercle $|\lambda|<\varrho$, *la fonction* $s(\lambda)$ *est uniformément fortement continue et régulièrement dérivable dans tout cercle* $|\lambda|\leqslant\varrho_1<\varrho$. *De plus, on a*

(69.2) $$s'(\lambda)=k_1+2\lambda k_2+3\lambda^2 k_3+\dots \qquad \textit{pour tout } |\lambda|<\varrho.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la série (69.2) converge pour $|\lambda|<\varrho$. En effet, en possant $|\lambda|<\varrho_1<\varrho$, on a

$$s'(\lambda)=k_1+\frac{2\lambda}{\varrho_1}\varrho_1 k_2+\frac{3\lambda^2}{\varrho_1^2}\varrho_1^2 k_3+\dots.$$

Cette série converge fortement d'après le théorème 63, lorsque la série (69.1) est supposée fortement convergente, car on a alors

$$\left|\frac{(n+1)\,\lambda^n}{\varrho_1^n}\right|=|a_n|<\mu^n<1 \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Considérons maintenant les deux expressions $\Delta(\lambda,\varkappa)$ et $D(\lambda,\varkappa)$:

$$\Delta(\lambda,\varkappa)=s(\lambda+\varkappa)-s(\lambda),$$

$$D(\lambda,\varkappa)=\frac{1}{\varkappa}\Delta(\lambda,\varkappa)-(k_1+2\lambda k_2+\dots).$$

On a

$$\varDelta(\lambda,\varkappa)=\varkappa\left\{k_1+(2\lambda+\varkappa)\,k_2+\ldots+\left[\binom{n}{1}\lambda^{n-1}+\binom{n}{2}\lambda^{n-2}\varkappa+\ldots+\varkappa^{n-1}\right]k_n+\ldots\right\}.$$

$$D(\lambda,\varkappa)=\varkappa\left\{k_2+(3\lambda+\varkappa)\,k_3+\ldots+\left[\binom{n}{2}\lambda^{n-1}+\binom{n}{3}\lambda^{n-3}\varkappa+\ldots+\varkappa^{n-2}\right]k_n+\ldots\right\}.$$

Soit $|\lambda|<\varrho_2<\varrho_1<\varrho$; la série $s(\varrho_1)=k_0+\varrho_1 k_1+\varrho_1^2 k_2+\ldots$ étant fortement convergente, il existe un element $c\in A^*$, tel que

$$|\varrho_1^n k_n|\leqslant c \qquad \text{pour } n=0,1,2,\ldots .$$

Donc

$$|\varDelta(\lambda,\varkappa)|\leqslant|\varkappa|\left[\frac{1}{\varrho_1}+\frac{2|\lambda|+|\varkappa|}{\varrho_1^2}+\ldots+\frac{\binom{n}{1}|\lambda|^{n-1}+\ldots+|\varkappa|^{n-1}}{\varrho_1^n}+\ldots\right]c,$$

$$|D(\lambda,\varkappa)|\leqslant|\varkappa|\left[\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{3|\lambda|+|\varkappa|}{\varrho_1^3}+\ldots+\frac{\binom{n}{2}|\lambda|^{n-}+\ldots+|\varkappa|^{n-1}}{\varrho_1^n}+\ldots\right]c.$$

En utilisant les inégalités générales

$$\binom{n}{i+1}\leqslant n\binom{n-1}{i} \quad\text{et}\quad \binom{n}{i+2}\leqslant\binom{n}{2}\binom{n-2}{i},$$

il vient

$$|\varDelta(\lambda,\varkappa)|\leqslant\frac{|\varkappa|}{\varrho_1}\left[1+2\frac{|\lambda|+|\varkappa|}{\varrho_1}+\ldots+n\left(\frac{|\lambda|+|\varkappa|}{\varrho_1}\right)^{n-1}+\ldots\right]c,$$

$$|D(\lambda,\varkappa)|\leqslant\frac{|\varkappa|}{\varrho_1^2}\left[1+3\frac{|\lambda|+|\varkappa|}{\varrho_1}+\ldots+\binom{n}{2}\left(\frac{|\lambda|+|\varkappa|}{\varrho_1}\right)^{n-2}+\ldots\right]c.$$

Pour $|\varkappa|$ assez petit on a $|\lambda|+|\varkappa|<\varrho_2$ et par suite

(69.3) $$|\varDelta(\lambda,\varkappa)|\leqslant|\varkappa|\frac{\alpha}{\varrho_1}c \quad\text{et}\quad |D(\lambda,\varkappa)|\leqslant|\varkappa|\frac{\beta}{\varrho_1^2}c,$$

où

$$\alpha=1+2\frac{\varrho_2}{\varrho_1}+\ldots+n\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{n-1}+\ldots,$$

$$\beta=1+3\frac{\varrho_2}{\varrho_1}+\ldots+\binom{n}{2}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{n-2}+\ldots,$$

les deux dernières séries étant convergentes.

Des inégalités (69.3), on obtient aussitôt le théorème.

70. Fonctions analytiques. Soit

$$\varPhi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots$$

une série de puissances de variable complexe λ dont le rayon de convergence est $\sigma>0$. Posons

$$\varPhi(\lambda k)=a_0+a_1\lambda k+a_2\lambda^2k^2+\ldots \qquad (k\in A).$$

où le rayon de k est $\varrho = \varrho(k)$. Le symbole $\Phi(\lambda k)$ représente une fonction de λ qui est définie et dérivable dans le cercle de rayon $P \leqslant \sigma\varrho(k)$. En effet, supposant que $|\lambda| < \varrho_1\sigma < \varrho\sigma$, on a $\frac{|\lambda|}{\varrho_1} < \sigma$ et, en vertu de la convergence de $\Phi(\lambda)$ dans le cercle de rayon σ, $|a^n| < \frac{|\lambda^n}{\varrho_1{}^n}$ pour n assez grand. Donc $|a_n \lambda^n| < \varrho_1{}^n$, ce qui prouve la convergence forte de la serie $\Phi(\lambda k)$ (v. théorème 63).

Si la fonction (numérique) $\Phi(\lambda)$ est entière, la fonction $\Phi(\lambda k)$ est définie pour chaque λ complexe, pourvu que $\varrho(k) > 0$. De même, si $\varrho(k) = \infty$, $\Phi(\lambda k)$ est définie pour tout λ, pourvu que $\lambda = 0$ ne soit pas un point singulier de $\Phi(\lambda)$.

Exemples 70.

$$e^{\lambda k} = 1 + \frac{\lambda k}{1!} + \frac{\lambda^2 k^2}{2!} + \ldots,$$

$$\sin \lambda k = \frac{\lambda k}{1!} - \frac{\lambda^3 k^3}{3!} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1 - \lambda k} = 1 + \lambda k + \lambda^2 k^2 + \ldots;$$

les deux premières fonctions sont définies pour tout λ, la dernière l'est pour $|\lambda| < \varrho(k)$.

On peut effectuer les calculs arithmétiques (addition, soustraction te multiplication) et la dérivation comme sur les fonctions analytiques ordinaires, pcurvu que l'on fasse attention aux cercles de convergence. On a par exemple

$$(1 - \lambda k)(1 + \lambda k + \lambda^2 k^2 + \ldots) = 1 \qquad \text{pour tout } |\lambda| < \varrho(k)$$

$$e^{k_1} \cdot e^{k_2} = e^{k_1 + k_2} \qquad [\varrho(k_1) > 0 \text{ et } \varrho(k_2) > 0],$$

$$(e^{\lambda k})' = k e^{\lambda k} \qquad \text{etc.}$$

71. Intégrale d'une fonction uniformément fortement continue. Soit E un ensemble borné et mesurable (au sens de Lebesgue). Nous appellerons *décomposition* de E tout système de k (k un nombre naturel) ensembles disjoints et mesurables $E_1, \ldots, E_k$ dont la somme est E. Nous dirons qu'une suite de décompositions

$$E_1^n, \ldots, E_{k_n}^n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{71.1}$$

est *régulière*, lorsque le plus grand des diamètres des ensembles (71.1) tend vers zéro pour $n \to \infty$.

Étant donnée une suite de décompositions de E et une fonction $a(\lambda)$ définie sur E, considérons la suite des sommes

$$(71.2)\qquad s_n = \sum_{\nu+1}^{k_n} \left| E_\nu^n \right| \cdot a(\lambda_\nu^n) \qquad (n=1,2,\dots),$$

où $|E_\nu^n|$ est la mesure (de Lebesgue) de E_ν^n et λ_ν^n un élément fixé arbitrairement dans E_ν^n. La suite (71.2) sera dite *régulière* lorsque la suite correspondante de décompositions est régulière.

Nous démontrerons que *si une fonction $a(\lambda)$ est uniformément fortement continue sur E et si l'anneau considéré A est complet, alors toutes les suites régulières convergent fortement vers le même élément $a \in A$.* Cet élément sera dit *intégrale forte* de $a(\lambda)$ sur E et l'on écrira

$$a = \int_E a(\lambda)\, d\lambda.$$

En effet, on peut écrire

$$s_m = \sum_{\mu,\nu} \left| E_\mu^m E_\nu^n \right| \cdot a(\lambda_\mu^m) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{\mu,\nu} \left| E_\mu^m E_\nu^n \right| \cdot a(\lambda_\nu^n),$$

où $E_\mu^m E_\nu^n$ est l'intersection des ensembles E_μ^m et E_ν^n. Donc

$$|s_m - s_n| \leqslant \sum_{\mu,\nu} \left| E_\mu^m E_\nu^n \right| \cdot |a(\lambda_\mu^m) - a(\lambda_\nu^n)|.$$

Pour les intersections $E_\mu^m E_\nu^n$ qui ne sont pas vides on a $q|a(\lambda_\mu^m)-a(\lambda_\nu^n)| \leqslant c$, pourvu que m et n soient assez grands. Par suite

$$q|s_m - s_n| \leqslant \sum_{\mu,\nu} \left| E_\mu^m E_\nu^n \right| \cdot c = |E| \cdot c,$$

d'où l'existence de la limite. Pour en démontrer l'unicité, considérons deux suites régulières s_n' et s_n'' quelconques et la troisième $\bar{s}_n$ telle que $\bar{s}_{2n-1} = s_n'$ et $\bar{s}_{2n} = s_n''$ pour $n=1,2,\dots$. La suite $\bar{s}_n$ est évidemment régulière, il existe donc la limite $\lim \bar{s}_n$. Or, les deux suites s_n' et s_n'' sont des suites partielles de $\bar{s}_n$, donc $\lim s_n' = \lim s_n'' = \lim \bar{s}_n$, d'où l'unicité.

De la définition on déduit facilement les propositions suivantes:

(i) *Si une fonction numérique $\alpha(\lambda)$ est uniformément continue sur E, alors on a*

$$\int_E \alpha(\lambda) \cdot c\, d\lambda = \int_E \alpha(\lambda)\, d\lambda \cdot c, \qquad \textit{quel que soit } c \in A,$$

où $\int_E \alpha(\lambda)\, d\lambda$ est l'intégrale au sens habituel.

(ii) *Si* $a(\lambda)$ *est une fonction uniformément fortement continue sur* E, *alors*

$$\Big|\int_E a(\lambda)d\lambda\Big| \leqslant \int_E |a(\lambda)|\,d\lambda$$

et

$$\int_E a(\lambda)b\,d\lambda = \int_E a(\lambda)d\lambda\cdot b\,,\quad \int_E ba(\lambda)\,d\lambda = b\int_E a(\lambda)d\lambda \qquad \textit{pour tout } b \in A.$$

De plus, si l'on décompose E *en deux ensembles mesurables disjoints* E_1 *et* E_2, *on a toujours*

$$\int_E a(\lambda)d\lambda = \int_{E_1} a(\lambda)d\lambda + \int_{E_2} a(\lambda)d\lambda\,.$$

(iii) *Si* $a(\lambda)$ *et* $b(\lambda)$ *sont uniformément fortement continues, on a*

$$\int_E [a(\lambda) \pm b(\lambda)]d\lambda = \int_E a(\lambda)d\lambda \pm \int_E b(\lambda)d\lambda\,:$$

si de plus $a(\lambda) \leqslant b(\lambda)$ *sur* E, *on a*

$$\int_E a(\lambda)d\lambda = \int_E b(\lambda)d\lambda\,.$$

Nous démontrerons encore le

Théorème. 71. *Si* $a(\lambda)$ *est uniformément fortement continue dans un intervalle fini* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *alors l'intégrale*

$$b(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} a(\lambda)d\lambda, \qquad \text{où } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,$$

est régulièrement fortement dérivable dans cet intervalle et l'on a $b'(\lambda) = a(\lambda)$.

D é m o n s t r a t i o n. Si $\lambda', \lambda'' \in (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\lambda' \neq \lambda''$, on a

$$D(\lambda',\lambda'') = \frac{b(\lambda') - b(\lambda'')}{\lambda' - \lambda''} - a(\lambda') = \frac{1}{\lambda' - \lambda''}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\Big[a(\lambda) - a(\lambda')\Big]\,d\lambda\,.$$

La fonction $a(\lambda)$ étant uniformément fortement continue, il existe un élément $c \in A^*$ pour lequel $q\,|\,a(\lambda') - a(\lambda'')\,| \leqslant c \in A^*$, pourvu que les points λ' et λ'' soient assez proches, et par suite

$$q\,|D(\lambda',\lambda'')| \leqslant \frac{1}{|\lambda' - \lambda''|}\Big|\int_{\lambda'}^{\lambda''} c\,d\lambda\Big| = c\,,$$

d'où le théorème.

72. Fonctions fortement sommables. La fonction $a(\lambda)$ définie sur un ensemble mesurable E sera dite *fortement sommable sur E*, lorsque:

(i) Il existe un élément $c \in A^*$ et une fonction numérique $\gamma(\lambda)$ non négative et sommable sur E, telle que $|a(\lambda)| \leqslant \gamma(\lambda) \cdot c$ presque partout sur E;

(ii) Il existe une suite $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles mesurables, bornés et contenus dans E, telle que $\lim |E - E_n| = 0$ et que $a(\lambda)$ est uniformément fortement continue sur E_n $(n=1, 2, \ldots)$.

Toute fonction uniformément fortement continue sur E est donc fortement sommable. On voit aussi, d'après un théorème connu de Lusin que *si une fonction numérique $\alpha(\lambda)$ est sommable (au sens habituel) sur E, alors la fonction $\alpha(\lambda)a$, où $a \in A$, est fortement sommable sur E.* On peut démontrer aussi sans peine que *si $a(\lambda)$ est fortement sommable, il en est de même des fonctions $|a(\lambda)|$, $ba(\lambda)$ et $a(\lambda)b$, b étant un élément quelconque de A. Si $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont fortement sommables, il en est de même de leur somme $a(\lambda)+b(\lambda)$ et de leur différence $a(\lambda)-b(\lambda)$. Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur E, elle l'est sur tout ensemble mesurable partiel. Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur E_1 et sur E_2, elle l'est sur la somme E_1+E_2*

Le lecteur vérifiera que si A est l'ensemble des nombres réels· avec les définitions usuelles de l'addition et du module, la notion de fonction fortement sommable se confond avec celle de fonction sommable au sens classique.

73. L'intégrale d'une fonction fortement sommable. Nous démontrerons que si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur un ensemble mesurable E et si une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ satisfait à la condition (ii) du N° 72, alors la suite

$$a_n = \int_{E_n} a(\lambda)\, d\lambda \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{73}$$

est fortement convergente et la limite $\lim a_n$ est la même pour toute suite E_n satisfaisant à (ii). On appellera cette limite *intégrale forte de $a(\lambda)$ sur E* et l'on la désignera par le symbole

$$\lim a_n = \int_E a(\lambda) d\lambda.$$

En effet, la proposition est évidente, en vertu du théorème de Lusin, dans le cas, où $a(\lambda) = \alpha(\lambda)\, a$ et $\alpha(\lambda)$ est une fonction numérique, sommable au sens habituel sur E. On a alors $\int_E \alpha(\lambda)\, a\, d\lambda = \int_E \alpha(\lambda)\, d\lambda \cdot a$. Lorsque $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ sont deux fonctions (numériques) sommables sur E, telles que $\alpha(\lambda) \leqslant \beta(\lambda)$ presque partout sur E, et si $a \in A^*$ alors $\int_E \alpha(\lambda)\, a\, d\lambda \leqslant \int_E \beta(\lambda)\, a\, d\lambda$. Cela établi, on a

$$|a_m - a_n| = \left| \int\limits_{E_m - E_n} a(\lambda)\, d\lambda - \int\limits_{E_n - E_m} a(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \int\limits_{E_m - E_n} |a(\lambda)|\, d\lambda + \int\limits_{E_n - E_m} |a(\lambda)|\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D_{mn}} \gamma(\lambda)\, d\lambda \cdot c,$$

où $D_{mn} = (E_m - E_n) + (E_n - E_m)$. Or, pour m et n assez grands la mesure $|D_{mn}|$ de D_{mn} est arbitrairement petite et l'on aura $\int\limits_{D_{mn}} \gamma(\lambda)\, d\lambda < \frac{1}{q}$ d'où la convergence de a_n.

Pour démontrer l'inicité de la limite, considérons deux suites d'ensembles $E_1', E_2', \ldots$ et $E_1'', E_2'', \ldots$ qui satisfont à la condition (ii). Alors la suite $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots$, où $\bar{E}_{2n-1} = E_n'$ et $\bar{E}_{2n} = E_n''$, satisfait encore à (ii). Si maintenant on pose

$$a_n' = \int\limits_{E_n'} a(\lambda)\, d\lambda, \quad a_n'' = \int\limits_{E_n''} a(\lambda)\, d\lambda \quad \text{et} \quad \bar{a}_n = \int\limits_{\bar{E}_n} a(\lambda)\, d\lambda \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les suites a_n' et a_n'' seront des suites partielles de $\bar{a}_n$ et l'on aura $\lim a_n' = \lim a_n'' = \lim \bar{a}_n$, d'où l'unicité.

Le lecteur vérifiera que dans le cas où A est l'ensemble des nombres réels avec les définitions habituelles de l'addition et du module, l'intégrale forte se confond avec l'intégrale de Lebesgue.

74. Propriétés de l'intégrale. Signalons les théorèmes suivants:

Théorème 74.1 (additivité). *Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur deux ensembles mesurables disjoints F et G on a*

$$\int\limits_{F+G} a(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{F} a(\lambda)\, d\lambda + \int\limits_{G} a(\lambda)\, d\lambda.$$

Démonstration. Soit $E_1, E_2, \ldots$ une suite satisfaisant à la condition (ii) du N° 72, où $E = F + G$. Alors les deux suites $E_1F, E_2F, \ldots$ et $E_1G, E_2G, \ldots$ satisfont à la condition (ii), où l'ensemble E est remplacé par F ou G respectivement. La suite de la démonstration est évidente.

Théorème 74.2. *Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur E, on a*

$$\int\limits_{F} b a(\lambda)\, d\lambda = b \int\limits_{E} a(\lambda)\, d\lambda \quad \text{et} \quad \int\limits_{E} a(\lambda)\, b\, d\lambda = \int\limits_{E} a(\lambda)\, d\lambda \cdot b \qquad \textit{pour tout } b \in A.$$

La démontration est immédiate.

Théorème 74.3. *Si $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont fortement sommables sur E, on a*

$$\int_E [a(\lambda \pm b(\lambda)]\, d\lambda = \int_E a(\lambda)\, d\lambda \pm \int_E b(\lambda)\, d\lambda .$$

Démonstration. Soient $E_1, E_1, \dots$ et $E'_1, E'_2, \dots$ deux suites satisfaisant à la condition (ii) pour les fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ respectivement. Alors la suite d'intersections $E_1 E'_1, E_2 E'_2, \dots$ satisfait à (ii) pour les deux fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ simultanément. La suite de la démonstration est évidente,

Théorème 74.4. *Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur E et $0 \leqslant a(\lambda)$ presque partout sur E, alors $0 \leqslant \int_E a(\lambda)\, d\lambda$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que tous les termes de la suite (73) sont alors non négatifs.

Corollaire 74.1 (des théorèmes 74.3 et 74.4). *Si $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont fortement sommables sur E et si $a(\lambda) \leqslant b(\lambda)$ presque partout sur E, alors*

$$\int_E a(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int_E b(\lambda)\, d\lambda .$$

Théorème 74.5. *Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur E, on a*

$$\left| \int_E a(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \int_E | a(\lambda) |\, d\lambda .$$

Démonstration. Si la suite $E_1, E_2, \dots$ satisfait à (ii), on a, d'après le N° 71,

$$\left| \int_{E_n} a(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \int_{E_n} | a(\lambda) |\, d\lambda ,$$

d'où le théorème.

Théorème 74.6 (continuité absolue de l'intégrale). *Si $a(\lambda)$ est fortement sommable sur E, il existe un élément $c \in A^*$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\left| \int_G a(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \varepsilon c, \qquad \text{où } G \subset E,$$

pourvu que la mesure de G soit assez petite.

Démonstration. D'après la condition (i) du N° 72 on a $a(\lambda) \leqslant \varphi(\lambda) c$ presque partout sur E, donc

$$\left| \int_G a(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \int_G | a(\lambda) |\, d\lambda \leqslant \int_G \varphi(\lambda)\, d\lambda \cdot c ,$$

d'où le théorème.

Corollaire 74.2. *Si $a(\lambda)$ est fortement sommable dans un intervalle $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, la fonction*

$$b(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} a(\lambda)\, d\lambda$$

est uniformément fortement continue dans cet intervalle.

Chapitre V.
Limite faible.

75. Préliminaires. Les notions que nous avons traité aux chapitre précédents, à savoir: addition, multiplication, inégalité et module, étaient introduites en adoptant comme axiomes quelques unes des propriétés des notions analogues de l'analyse classique et en négligeant les autres. Donc, ces notions ainsi qui les notions secondaires qui s'en déduisent (limite, dérivée et intégrale fortes) peuvent être considérées comme une généralisation des notions analogues au sens habituel. Or, il en est tout à fait autrement de la notion de *limite faible* dont nous allons parler maintenant, celle-ci étant étrangère à l'analyse classique. La limite faible n'apparaît que dans l'étude des espaces abstraits; elle jouera aussi un rôle important dans la théorie de l'anneau algébrique et permettra de lui joindre de nouveaux éléments qui n'y peuvent pas être définis directement. En partant, par exemple, de certains anneaux dont les éléments sont des fonctions on pourra obtenir pour toute fonction sommable un élément qui peut être envisagé comme sa dérivée. Ainsi, *toute fonction sommable deviendra dérivable.* Ce phénomène a été signalé par L. Schwartz dont le point de départ était la théorie des fonctionneles linéaires[10]). La méthode que nons exposerons ici s'approche plutôt de celle utilisée par Cantor dans la théorie des nombres irrationnels.

La définition générale de la limite faible sera donné dans la troisième partie de ce mémoire, nous nous bornerons cependant ici à un cas particulier qui nous sera utile dans les applications. De plus nous convenons, une fois pour toutes, que les anneaux considérés dans ce chapitre seront toujours commutatifs.

76. Éléments libres. Un élément $g \in A$ sera dit *libre*[11]) lorsque l'égalité $gx = 0$ entraîne $x = 0$.

[10]) L. Schwartz [19] et 20].

[11]) Les éléments libres sont dits souvent *non diviseurs de zéro.*

Exemple 76. L'élément $l^a = \left\{ \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} \right\}$ (N° 30) considéré dans l'anneau I_T (N° 17) est libre, quel que soit le nombre a positif. En effet, si a est entier, la relation $l^a x = 0$ signifie que l'intégrale a-tuple

$$\int_0^t dt \ldots \int_0^t x(t)\, dt$$

est nulle. Alors on a $x(t) = 0$ presque partout. Si a n'est pas entier, il suffit de multiplier l'égalité $l^a x = 0$ par l^{n-a} où n est un entier supérieur à a; c'est ce qui donne $l^n x = 0$ et par suite $x = 0$.

Théorème 76. 1. *Si l'élément g est libre, alors la relation $gx = gy$ entraîne $x = y$.*

En effet, on a alors $g(x-y) = 0$, d'où $x-y = 0$.

Théorème 76. 2. *Le produit de deux éléments libres est encore un élément libre.*

En effet, g et h étant deux éléments libres, $gh \cdot x$ entraîne successivement $hx = 0$ et $x = 0$.

77. Éléments généralisés. Deux suites a_n et b_n dont les éléments appartiennent à A seront dites *équivalentes* lorsqu'il existe un élement libre g pour lequel les deux suites ga_n et gb_n convergent fortement vers une même limite (appartenant à A). La relation d'équivalence est évidemment *symétrique*; on peut démontrer facilement qu'elle est aussi *transitive*. En effet, si $\lim ga_n = \lim gb_n$ et $\lim hb_n = \lim hc_n$, où g et h sont des éléments libres, alors $\lim gha_n = h \lim ga_n = h \lim gb_n = \lim gh\, b_n = g \lim h\, b_n = g \lim h\, c_n = \lim gh\, c_n$, d'où la transitivité, car le produit gh est un élément libre.

Nous appellerons *élément généralisé* de l'anneau donné A toute classe des suites équivalentes. On voit que toute suite a_n pour laquelle il existe un élément libre g tel que la limite forte $\lim ga_n$ existe, détermine un élément généralisé. Ce fait peut aussi être exprimé de la manière suivante: Si une suite appartient aux deux éléments généralisés c_1 et c_2, ces éléments sont égaux: $c_1 = c_2$ (c'est-à-dire toute suite qui appartient à l'un de ces éléments appartient à l'autre et inversement).

Si a_n et b_n sont deux suites d'un élément généralisé c et si h est un élément libre pour lequel les deux limites $\lim ha_n$ et $\lim hb_n$ existent, alors ces limites sont égales. En effet soit g un élément libre pour lequel $\lim ga_n = \lim gb_n$. Alors $g \lim ha_n = h \lim ga_n = h \lim gb_n = g \lim hb_n$, d'où $\lim ha_n = \lim hb_n$. Il s'ensuit, en particulier, que l'élément généralisé peut posséder au plus une suite constante. Les éléments généralisés qui contiennent une suite constante seront dits *éléments ordinaires* et tous les autres *éléments extraordinaires.*

Exemple 77. Considérons, dans l'anneau $\check{I}_T$, la classe c des suites équivalentes à la suite $a_n = l^{1/n} = \left\{ \dfrac{t^{1/n}}{\Gamma(1+1/n)} \right\}$. Cette classe n'est pas vide, car la suite $l\, a_n$ converge fortement vers l. En effet, on a

$$l \cdot a_n = l \cdot l^{1/n} = l^{1+1/n} = \left\{ \frac{t^{1/n}}{\Gamma(1+1/n)} \right\};$$

or la suite $\left\{ \dfrac{t^{1/n}}{\Gamma(1+1/n)} \right\}$ est bornée par la fonction $\{1+t\} \epsilon \check{I}_T$ et elle converge uniformément vers $\{1\}$ dans tout intervalle $0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 < \infty$, donc la suite $l \cdot a_n$ converge fortement vers l (v. N° 54). La classe c est donc un élément généralisé. On voit facilement que cet élément est extraordinaire, car s'il existait une suite constante $b_n = b \,\epsilon\, \check{I}_T$, on aurait $lb = \lim lb_n = \lim la_n = l$, ce qui est impossible (v. N° 24).

Remarquons encore que *si l'une quelconque des suites d'un élément généralisé converge fortement vers un élément $a \,\epsilon\, A$, cet élément généralisé est ordinaire et il contient la suite costante $a_n = a$.* En effet, si $\lim b_n = a$, les deux suites $a_n = a$ et b_n déterminent le même élément généralisé, car $\lim ga_n = \lim gb_n$ pour tout élément libre g.

78. Somme, différence et produit des éléments généralisés. Un élément généralisé c sera dit *somme* de deux éléments généralisés a et b, lorsque c contient une suite (au moins) de la forme $c_n = a_n + b_n$ où $a_n \,\epsilon\, a$ et $b_n \,\epsilon\, b$; on écrira dans ce cas $c = a + b$.

Nous démontrerons l'existence et l'unicité de la somme $a+b$ pour tout couple d'éléments généralisés a et b de l'anneau considéré A. En effet, si $a'_n, a''_n \,\epsilon\, a$ et $b'_n, b''_n \,\epsilon\, b$, il existe deux éléments libres g et h, pour lesquels $\lim ga'_n = \lim ga''_n$ et $\lim hb'_n = \lim hb''_n$. Alors on a $\lim gh(a'_n + b'_n) = h \lim ga'_n + g \lim hb'_n = h \lim ga''_n + g \lim hb'_n = \lim gh(a''_n + b''_n)$, d'où la proposition.

Pareillement on dira qu'un élément c est la *différence* ou le *produit* de deux éléments généralisés a et b de A, lorsque c contient une suite (au moins) de la forme $c_n = a_n - b_n$ ou $c_n = a_n b_n$ respectivement où $a_n \epsilon a$ et $b_n \epsilon b$. Les démonstrations de l'existence et de l'unicité de la différence et du produit sont tout à fait analogues à celles de la somme.

On voit aussi, d'après le raisonnement précédent, que si a_n est une suite quelconque de a et b_n une suite quelconque de b, alors les suites $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ et $a_n b_n$ appartiennent toujours à $a+b$, $a-b$ et ab respectivement.

79. Anneau d'éléments généralisés. Désignons par $\bar{A}$ l'ensemble de tous les éléments généralisés dont les suites sont formées d'éléments d'un anneau commutatif donné A. Nous démontrerons que $\bar{A}$ est encore un anneau commutatif. En effet, si a, b, c sont des éléments généralisés, il en est de même des expressions $a(b+c)$ et $ab+ac$. Pour démontrer que ces expressions représentent un même élément, il suffit de vérifier qu'il existe une suite, au moins, qui appartient simultanément à $a(b+c)$ et $ab+ac$. En effet, si les suites a_n, b_n et c_n appartiennent à a, b et c respectivement, la suite $a_n(b_n+c_n)$ appartient à $a(b+c)$ et la suite $a_n b_n + a_n c_n$ appartient à $ab+ac$. Or, les deux suites étant identiques, on a $a(b+c) = ab+ac$. Ainsi l'axiome II de l'anneau algébrique se trouve démontré. Pareillement on vérifie les axiomes I, IV, V et l'axiome de la commutativité: $ab = ba$. Il reste encore l'axiome II. Or, les deux éléments a et b étant donnés le même raisonnement conduit à la conclusion que la différence $b-a$ satisfait à l'équation $a+(b-a) = b$.

80. Isomorphisme de l'ensemble des éléments ordinaires avec l'anneau A. Désignons généralement par $\bar{a}$ l'élément ordinaire qui est déterminé (v. N° 77) par la suite $a_n = a \epsilon A$. La correspondence entre les éléments $\bar{a}$ et a est évidemment biunivoque. De plus, *l'ensemble des éléments ordinaires est isomorphe avec A*, c'est-à-dire si $c = a+b$ et $d = ab$, on a $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ et $\bar{d} = \bar{a}\bar{b}$ et réciproquement. Cet isomorphisme permet d'identifier les éléments ordinaires $\bar{a}$ avec les éléments correspondants $a \epsilon A$ et de négliger dans la suite la barre au-dessus de la lettre, en posant tout simplement $\bar{a} = a$. Par conséquent les éléments de A seront désormais dits *ordinaires*.

Or, les éléments ordinaires ne font qu'une partie de l'ensemble $\bar{A}$ des éléments généralisés, donc ces derniers peuvent être envisagés comme une généralisation des éléments de l'anneau A, c'est ce qui justifie leur dénomination.

On voit que *si a est un élément ordinaire et b_n une suite d'éléments ordinaires qui appartient à un élément généralisé b, la suite des éléments ordinaires ab_n appartient à l'élément généralisé ab.*

Il s'ensuit que *s'il existe, pour deux éléments généralisés a et b, un élément libre h tel que $ha=hb$, on a $a=b$.* En effet, si les suites d'éléments ordinaires a_n et b_n appartiennent à a et b respectivement, alors $ha_n \in ha$ et $hb_n \in hb$. Toutes les deux suites ha_n et hb_n appartiennent donc à un même ensemble, ce qui entraîne l'existence d'un élément libre $g \in A$ pour lequel $\lim gha_n = \lim ghb_n$. Par conséquent les suites a_n et b_n appartiennent à un même élément généralisé, d'où la proposition.

Remarquons enfin que *pour tout élément généralisé a il existe un élément libre $g \in A$ tel que le produit ga est un élément ordinaire.* En effet, il suffit de supposer que g est un élément libre pour lequel la suite ga_n, où $a_n \in a$, converge fortement. Alors cette suite appartient à l'élement ga qui, d'après le N° 76, est ordinaire.

81. Limite faible. On dira qu'une suite d'éléments généralisés a_n converge faiblement vers un élement généralisé a, lorsqu'il existe un élément libre $g \in A$ pour lequel tous les éléments ga_n et ga sont ordinaires et la suite ga_n converge fortement vers ga. L'élément a sera dit *limite faible* de a_n.

Nous démontrerons que *si tous les éléments d'une suite b_n appartiennent à A, une condition nécessaire et suffisante pour que b_n converge faiblement vers b est que l'élément b contienne la suite b_n.*

En effet, la nécessité est triviale, d'après la définition de l'élément-généralisé. En supposant, d'autre part, que la suite b_n appartienne à b, il existe un élément libre g pour lequel la suite gb_n converge fortement vers un élément a de A. La suite gb_n appartient, d'après le N° 80, à l'élément gb. En vertu de la remarque à la fin du N° 77, l'élément gb contient la suite constante $a_n=a$, c'est-à-dire on a $gb=a$. Donc la suite gb_n converge fortement vers gb et par conséquent b_n converge faiblement vers b.

La limite faible d'une suite, si elle existe, est unique. En effet, s'il y en avait deux a et b pour une suite a_n, on aurait $\lim ga_n = ga$ et $\lim ha_n = hb$, g et h étant des éléments libres et le symbole lim désignant la limite forte. Par suite $\lim gha_n = gha = ghb$, d'où $a=b$.

On voit que *la convergence forte entraîne la convergence faible et l'égalité des deux limites.* En effet, si a_n converge fortement vers a, la suite ga_n converge fortement vers ga, quel que soit l'élément libre g. D'où la proposition.

L'exemple suivant montre que la limite faible est une généralisation *essentielle* de la limite forte, c'est-à-dire que la limite faible peut exister bien que la limite forte n'existe pas (même dans le cas où tous les termes de la suite ainsi que la limite sont des éléments ordinaires).

Exemple 81. Les termes de la suite $a_n = l^{1/n}$ peuvent être regardés comme des éléments de l'anneau $\breve{I}_T$ ou ceux de l'anneau complexe $[\breve{I}_T]$ du type [A], où $A_2 = \breve{I}_T$ (v. N^{os} 17 et 55). Le premier cas a été discuté dans l'exemple 77. Dans le second cas la suite a_n converge faiblement vers l'unité 1 qui est un élément ordinaire de $[I_T]$. Cette convergence n'est pas forte, car la suite $l^{1/n} = \left\{ \dfrac{t^{1/n-1}}{\Gamma(1/n)} \right\}$ n'est bornée par aucune fonction sommable dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$ (v. N^{os} 12, 17 et Corollaire 56).

Signalons encore les propriétés principales de la limite faible.

Si une suite a_n converge faiblement vers un élément généralisé a, il en est de même de toute suite partielle. Si deux suites a_n et b_n convergent faiblement vers un même élément généralisé a, il en est de même de la suite entrelacée, c'est-à-dire de la suite c_n où $c_{2n-1} = a_n$ *et* $c_{2n} = b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. La première de ces propositions est évidente. Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer que les relations $\lim ga_n = ga$ et $\lim hb_n = ha$ entraînent $\lim ghc_n = gha$, où lim désigne la limite forte.

Remarquons encore que *si a_n et b_n convergent faiblement vers a et b respectivement, alors les suites $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ et $a_n b_n$ convergent faiblement vers $a+b$, $a-b$ et ab respectivement.* En effet, si $\lim ga_n = ga$, $\lim hb_n = hb$ (g et h libres, le symbole lim désigne ici la limite forte), on a $\lim gh(a_n \pm b_n) = gh(a \pm b)$ et $\lim (gha_n b_n) = ghab$, d'où la proposition.

On voit que les propriétés principales de la limite faible sont les mêmes que celles de la limite forte; de plus, les deux limites se confondent, dès que la limite forte existe. Nous désignerons donc la limite faible par le même symbole lim que la limite forte, ce qui ne conduira pas, en général, aux confusions. S'il y a lieu de discerner les deux genres de limite, on le dira explicitement.

82. Fonctions généralisés. Continuité et dérivabilité faibles. Pareillement qu'au N° 65 on peut considérer les fonctions de variable numérique dont les valeurs sont des éléments généralisés. Ces fonctions seront dites fonctions généralisés; celles dont toutes les valeurs sont ordinaires seront dites fonctions ordinaires.

Une fonction généralisée $a(\lambda)$ définie sur un ensemble E sera dite *faiblement continue sur* E, lorsqu'il existe un élément libre g tel que produit $ga(\lambda)$ est ordinaire et fortement continu sur E.

Une fonction généralisée $a(\lambda)$ définie sur E sera dite *uniformément faiblement continue sur* E lorsqu'il existe un élément libre g pour lequel le produit $ga(\lambda)$ est ordinaire et uniformément fortement continu sur E.

Une fonction généralisée $a(\lambda)$ définie sur E sera dite *faiblement dérivable sur* E lorsqu'il existe une fonction généralisée $a'(\lambda)$ et un élément libre g pour lequel le produit $ga(\lambda)$ est ordinaire sur E et y possède la dérivée forte égale à $ga'(\lambda)$.

Les règles (67) sont évidemment valables pour la différentiation faible. En effet, si $a'(\lambda)$ et $b'(\lambda)$ sont respectivement les dérivées faibles de $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$, il existe deux éléments libres g et h, pour lesquels les fonctions $ga(\lambda)$ et $hb(\lambda)$ sont ordinaires et fortement dérivables. On a alors

$$(gh\,[a(\lambda)+b(\lambda)])' = h\,[ga(\lambda)]' + g\,[hb(\lambda)]' = gh\,[a'(\lambda)+b'(\lambda)],$$

$$\begin{aligned}[gh\,a(\lambda)\,b(\lambda)]' &= [ga(\lambda)]'hb(\lambda) + ga(\lambda)\,[hb(\lambda)]' \\ &= gh\,[a'(\lambda)\,b(\lambda) + a(\lambda)\,b'(\lambda)],\end{aligned}$$

d'où la première et la quatrième et, par suite, la deuxième et la troisième des relations (67). Enfin on a, pour $b(\lambda) = a\,[\varphi(\lambda)]$,

$$[g\,b(\lambda)]' = \varphi'(\lambda)\,g\,a'[\varphi(\lambda)],$$

d'où la dernière des relations (67).

Une fonction généralisée $a(\lambda)$ sera dite *régulièrement faiblement dérivable sur* E, lorsqu'il existe un élément libre g pour lequel le produit $ga(\lambda)$ est une fonction ordinaire et régulièrement fortement dérivable sur E (v. N° 68).

83. Intégrale faible. On dira que a est intégrale faible d'une fonction généralisée $a(\lambda)$ sur l'ensemble E: $a = \int_E a(\lambda)\,d\lambda$, lorsqu'il existe un élément libre g pour lequel les produits ga et $ga(\lambda)$ sont ordinaires et que l'on a

$$ga = \int_E ga(\lambda)\,d\lambda,$$

où le dernier symbole désigne l'intégrale forte.

Si l'intégrale forte d'une fonction ordinaire existe, alors il existe évidemment l'intégrale faible et les deux intégrales se confondent.

Théorème 83.1. *Si une fonction $a(\lambda)$ est faiblement uniformément continue sur un ensemble borné et mesurable E, alors l'intégrale faible $\int_E a(\lambda)d\lambda$ existe.*

D é m o n s t r a t i o n. En effet, il existe alors un élément libre g pour lequelle le produit $ga(\lambda)$ est uniformément fortement continu sur E. Il existe donc l'intégrale forte de $ga(\lambda)$ et l'on a

$$\int_E ga(\lambda)\, d\lambda = \lim s_n$$

où la suite s_n est une suite régulière de $ga(\lambda)$ (v. N° 70):

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{k_n} |E_\nu^n| \cdot ga(\lambda_\nu^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or, on a $s_n = gr_n$, où

$$r_n = \sum_{\nu=1}^{k_n} |E_\nu^n| \cdot a(\lambda_\nu^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donc la suite r_n est faiblement convergente et l'on a

$$g \lim r_n = \int_E ga(\lambda)\, d\lambda,$$

d'où le théorème.

Théorème 83.2. *Si l'intégrale faible $a = \int_E a(\lambda)\, d\lambda$ existe, on a*

$$\int_E c \cdot a(\lambda)\, d\lambda = c \cdot \int_E a(\lambda)\, d\lambda$$

pour tout élément généralisé c.

D é m o n s t r a t i o n. L'existence de l'intégrale faible a équivaut à l'existence de l'intégrale forte $\int_E ga(\lambda)\, d\lambda$ pour un élément libre g et l'égalité

$$\int_E ga(\lambda)\, d\lambda = ga.$$

Si h est un élément libre pour lequel hc est ordinaire, on a

$$\int_E ghca(\lambda)\, d\lambda = ghca,$$

d'où le théorème.

Théorème 83.3. *Si les intégrales faibles* $a = \int\limits_E a(\lambda)\, d\lambda$ *et* $b = \int\limits_E b(\lambda)\, d\lambda$ *existent, on a*

$$\int\limits_E [a(\lambda) \pm b(\lambda)]\, d\lambda = \int\limits_E a(\lambda)\, d\lambda \pm \int\limits_E b(\lambda)\, d\lambda.$$

Démonstration. Soient g et h deux éléments libres pour lesquels les intégrales fortes

$$\int\limits_E g a(\lambda)\, d\lambda = ga \quad \text{et} \quad \int\limits_E h b(\lambda)\, d\lambda = hb$$

existent. On a alors

$$\begin{aligned}\int\limits_E gh\,[a(\lambda) \pm b(\lambda)]\, d\lambda &= \int\limits_E gha(\lambda)\, d\lambda \pm \int\limits_E ghb(\lambda)\, d\lambda \\ &= h \int\limits_E ga(\lambda)\, d\lambda \pm g \int\limits_E hb(\lambda)\, d\lambda \\ &= hga \pm ghb = gh(a \pm b),\end{aligned}$$

d'où le théorème.

Théorème 83.4. *Si* $a(\lambda)$ *est uniformément faiblement continue dans un intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$, *alors l'intégrale faible*

$$b(\lambda) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda} a(\lambda)\, d\lambda, \qquad \text{où} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,$$

est régulièrement faiblement dérivable dans cet intervalle et l'on a $b'(\lambda) = a(\lambda)$.

Démonstration. En effet, il existe alors un élément libre g pour lequel le produit $ga(\lambda)$ est ordinaire et uniformément fortement continu. En vertu du théorème 70 l'intégrale $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda} ga(\lambda)\, d\lambda$ est régulièrement fortement dérivable dans $[\lambda_1, \lambda_2]$ et l'on a

$$[gb(\lambda)]' = [\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda} ga(\lambda)\, d\lambda\,]' = ga(\lambda),$$

d'où le théorème.

Remarque 83. On peut dire qu'une fonction $a(\lambda)$ est *faiblement sommable* sur un ensemble mesurable E, lorsqu'il existe un élément libre g pour lequel le produit $ga(\lambda)$ est ordinaire et fortement sommable sur E. Alors on peut démontrer que toute fonction faiblement sommable possède l'intégrale faible. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de cette démonstration qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

84. L'équation différentielle $ax'(\lambda)=bx(\lambda)$. Nous énoncerons dans les N[os] 84—86 quelques théorèmes sur les équations différentielles

$$ax'(\lambda)=bx(\lambda) \quad \text{et} \quad ax''(\lambda)=bx(\lambda)$$

qui assurent l'unicité de leurs solutions sous certaines hypothéses[12]). L'existence de ses solutions sera établie, au Chapitre VI, dans quelques interprétations particulières.

Nous démontrerons, en premier lieu, le

Théorème 84. *Si une fonction généralisée* $x(\lambda)$ *est régulièrement faiblement dérivable dans un intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *et y satisfait à l'équation différentielle*

$$ax'(\lambda)=bx(\lambda), \tag{84.1}$$

où a est un élément libre et b un élément généralisé quelconque, on a

$$x(\lambda)\,x(\mu)=x(\lambda_1)\,x(\lambda+\mu-\lambda_1) \quad \textit{pour } \lambda,\mu\geqslant\lambda_1 \textit{ et } \lambda+\mu\leqslant\lambda_1+\lambda_2. \tag{84.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit g un élément libre tel que le produit $gx(\lambda)$ est ordinaire et régulièrement fortement dérivable dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Alors il en est de même du produit $y_1(\lambda)=agx(\lambda)$ et l'on a

$$y_1'(\lambda)=agx'(\lambda)=bgx(\lambda).$$

Or, le dernier produit est encore dérivable et, par conséquent, continu et borné dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Donc la dérivée de $y_1(\lambda)$ est bornée dans $[\lambda_1, \lambda_2]$. On voit aussi facilement que la fonction

$$y_2(\lambda)=agx(\lambda_1+\lambda_0-\lambda),$$

où λ_0 est fixé arbitrairement dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$, est régulièrement fortement dérivable sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_0]$. La dérivée de $y_2(\lambda)$ est, pareillement que celle de $y_1(\lambda)$, bornée sur $[\lambda_1, \lambda_0]$.

Considérons maintenant la fonction

$$z(\lambda)=y_1(\lambda)\cdot y_2(\lambda)=a^2g^2x(\lambda_1+\lambda_0-\lambda).$$

D'après le théorème 68.4, $z(\lambda)$ est une fonction régulièrement fortement dérivable dans $[\lambda_1, \lambda_0]$ et l'on a, en vertu de (83.1)

$$\begin{aligned} z'(\lambda) &= y_1'(\lambda)\cdot y_2(\lambda)+y_1(\lambda)\cdot y_2'(\lambda) \\ &= agx'(\lambda)\cdot agx(\lambda_1+\lambda_0-\lambda)-ag(\lambda)\cdot agx'(\lambda_1+\lambda_0-\lambda) \\ &= 0. \end{aligned}$$

---

[12]) Pour les théorèmes analogues dans les espaces plus généraux voir J. G.-M i k u s i n s k i [15].

D'après le théorème 68.1, la fonction $z(\lambda)$ est donc constante et l'on a $z(\lambda_1) = z(\lambda)$, c'est-à-dire

$$a^2 g^2 x(\lambda_1)\, x(\lambda_0) = a^2 g^2 x(\lambda)\, x(\lambda_1 + \lambda_0 - \lambda),$$

d'où

$$x(\lambda_1)\, x(\lambda_0) = x(\lambda)\, x(\lambda_1 + \lambda_0 - \lambda).$$

Cette formule a été démontrée pour λ_0 fixé arbitrairement dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Donc, en posant $\lambda_0 = \lambda + \mu - \lambda_1$, il vient (84.1).

On peut completer le théorème ci-dessus par la remarque suivante: *Si une fonction généralisée $x(\lambda)$ est faiblement dérivable dans un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ et y satisfait à l'équation fonctionnelle* (84.2) *alors il existe deux éléments ordinaires a et b pour lesquels on a* (84.1) *dans l'intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$. En effet, en dérivant (84.2) une fois par rapport à λ et l'autre par rapport à μ, on obtient

$$x(\lambda_1)\, x'(\lambda + \mu - \lambda_1) = x'(\lambda)\, x(\mu) = x(\lambda)\, x'(\mu).$$

Si $gx(\lambda_1)$ et $hx'(\lambda_1)$ sont des éléments ordinaires, on a donc pour $\mu = 0$:

$$ghx(\lambda_1)\, x'(\lambda) = ghx'(\lambda_1)\, x(\lambda),$$

d'où la proposition.

85. L'unicité de la solution. On peut énoncer le théorème d'unicité pour l'équation (84.1) sous la forme suivante:

Théorème 85. *On suppose que dans l'anneau considéré A la relation $x^2 = 0$, où $x \in A$, entraîne toujours $x = 0$. Cela posé, soit $x(\lambda)$ une fonction généralisée qui est régulièrement faiblement dérivable dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ et qui y satisfait à l'équation* (84.1), *où a est un élément libre et b un élément généralisé quelconque. Alors, si $x(\lambda) = 0$ dans un point quelconque de $[\lambda_1, \lambda_2[$, on a identiquement $x(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $x(\varkappa_1) = 0$ pour un certain point $\varkappa_1$ de l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. D'après le théorème 84 on a

$$x(\varkappa_2)\, x(\varkappa_2) = x(\lambda_1)\, x(\varkappa_1),$$

où $\varkappa_2$ est la moyenne arithmétique de λ_1 et $\varkappa_1$. Donc $x(\varkappa_2)^2 = 0$ et par conséquent $x(\varkappa_2) = 0$. Par induction on a $x(\varkappa_n) = 0$ pour $n = 2, 3, \ldots$, où $\varkappa_n$ est la moyenne de λ_1 et $\varkappa_{n-1}$. En vertu de la continuité de $x(\lambda)$ on a donc $x(\lambda_1) = 0$. Si maintenant λ est un point quelconque de l'intervalle $[\lambda_1, \mu_1]$, où μ_1 est la moyenne de λ_1 et λ_2, on a, d'après (84.2),

$$x(\lambda)\, x(\lambda) = x(\lambda_1)\, x(2\lambda - \lambda_1),$$

d'où $x(\lambda)^2 = 0$ et $x(\lambda) = 0$. Ainsi nous avons démontré l'identité $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in [\lambda_1, \mu_1]$. En particulier on a $x(\mu_1) = 0$. Or, le raisonnement précédent prouve encore que $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in [\mu_1, \mu_2]$, où μ_2 est la moyenne de μ_1 et λ_2. Par induction on a $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in [\mu_{n-1}, \mu_n]$ $(n = 2, 3, \ldots)$, où μ_n est la moyenne de μ_{n-1} et λ_2. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer encore que, en vertu de la continuité de $x(\lambda)$, on a $x(\lambda_2) = 0$.

Il résulte du théorème précédent que *si deux fonctions* $x_1(\lambda)$ *et* $x_2(\lambda)$ *sont régulièrement faiblement dérivables dans l'intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *et y satisfont à la même équation* (84.1), *alors l'égalité* $x_1(\varkappa_1) = x_2(\varkappa_1)$ *dans un seul point* $\varkappa_1 \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *entraîne l'identité* $x_1(\lambda) = x_2(\lambda)$ *dans l'intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *tout entier.* En effet, il suffit de remarquer que la différence $y(\lambda) = x_2(\lambda) - x_1(\lambda)$ satisfait encore à l'équation (84.1) et s'annulle pour $\lambda = \varkappa_1$.

86. L'équation $ax''(\lambda) = bx(\lambda)$. Un théorème analogue au théorème 85 peut être démontré pour l'équation du second ordre:

Théorème 86. *On suppose que tout élément de l'anneau considéré* A *est libre, c'est-à-dire que l'égalité* $xy = 0$ *entraîne toujours* $x = 0$ *ou bien* $y = 0$. *Soit maintenant* $x(\lambda)$ *une fonction généralisée qui est deux fois régulièrement faiblement dérivable dans un intervalle* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *et qui y satisfait à l'équation différentielle*

$$ax''(\lambda) = bx(\lambda), \tag{86.1}$$

où a *et* b *sont des éléments généralisés quelconques, pourvu que* $a \neq 0$. *Alors, si* $x(\lambda) = x'(\lambda) = 0$ *dans un point quelconque de* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *on a identiquement* $x(\lambda) = 0$ *pour tout* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

D é m o n s t r a t i o n. La démonstration sera divisée en trois parties:

(I) Fixons μ arbitrairement dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ et posons

$$y(\lambda) = x(\lambda)\, x'(\lambda_1 + \mu - \lambda) + x'(\lambda)\, x(\lambda_1 + \mu - \lambda) \qquad \text{pour } \lambda \in [\lambda_1, \mu].$$

Soit g un élément tel que le produit $gax(\lambda)$ est régulièrement fortement dérivable. On vérifie facilement que

$$[gay(\lambda)]' = gay'(\lambda) = 0.$$

Par suite le produit $gay(x)$ est constant. Supposons que $x(\lambda_1) = x'(\lambda_1) = 0$. Alors on a $gay(\lambda_1) = 0$, donc $gay(\lambda) = 0$ et $y(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in [\lambda_1, \mu]$. Comme μ a été fixé arbitrairement dans $[\lambda_1, \lambda_2]$ on a

$$x(\lambda)\, x'(\lambda_1 + \mu - \lambda) + x'(\lambda)\, x(\lambda_1 + \mu - \lambda) = 0$$

pour tout couple de nombres λ et μ satisfaisant aux inégalités $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda_2$. Supposons que

$$(86.2) \qquad x(\lambda_0) \neq 0$$

pour un certain $\lambda_0 \epsilon [\lambda_1, \mu_1]$, où μ_1 est la moyenne arithmétique de λ_1 et λ_2. On a en particulier

$$x(\lambda_0)\, x'(\lambda_1 + \mu - \lambda_0) + x'(\lambda_0)\, x(\lambda_1 + \mu - \lambda_0) = 0 \qquad \text{pour } \lambda_0 \leqslant \mu \leqslant \lambda_2$$

d'où

$$x(\lambda_0)\, x'(\lambda) = -\, x'(\lambda_0)\, x(\lambda) \qquad \text{pour } \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_0.$$

En vertu du théorème 85 on a donc $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_0$ et en particulier pour $\lambda = \lambda_0$, ce qui n'est pas compatible avec (86.2). Nous avons ainsi démontré que l'on a $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \epsilon [\lambda_1, \mu_1]$. Par conséquent on a $x(\mu_1) = x'(\mu_1) = 0$. Or, d'après le raisonnement de tout à l'heure, on a encore $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \epsilon [\mu_1, \mu_2]$, où μ_2 est la moyenne de μ_1 et λ_2. Par induction on a $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \epsilon [\mu_{n-1}, \mu_n]$ $(n = 2, 3, \ldots)$, où μ_n est la moyenne de μ_{n-1} et λ_2, et en vertu de la continuité de $x(\lambda)$ il vient $x(\lambda_2) = 0$ dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ tout entier.

(II) Supposons maintenant que $x(\lambda_2) = x'(\lambda_2) = 0$. En posant $\lambda = -\bar{\lambda}$ et $x(\lambda) = \bar{x}(\bar{\lambda})$, on a

$$a\bar{x}''(\bar{\lambda}) = b\bar{x}(\bar{\lambda}) \qquad \text{pour } \bar{\lambda} \epsilon [-\lambda_2, -\lambda_1].$$

On vérifie facilement que la fonction $\bar{x}(\lambda)$ est deux fois régulièrement faiblement dérivable et que $\bar{x}(-\lambda_2) = \bar{x}'(-\lambda_2) = 0$. Donc, en vertu de (I) on a identiquement $x(\lambda) = 0$ dans $[-\lambda_2, -\lambda_1]$ et par suite $x(\lambda) = 0$ dans $[\lambda_1, \lambda_2]$.

(III) Si enfin $x(\lambda_0) = x'(\lambda_0) = 0$ pour un certain λ_0 intérieur à $[\lambda_1, \lambda_2]$, on peut appliquer les raisonnements (I) et (II) aux intervalles $[\lambda_0, \lambda_2]$ et $[\lambda_1, \lambda_0]$ respectivement, d'où $x(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \epsilon [\lambda_1, \lambda_2]$.

Il résulte du théorème précédent que *si deux fonctions* $x_1(\lambda)$ *et* $x_2(\lambda)$ *sont deux fois régulièrement faiblement dérivables et satisfont à l'équation différentielle* (86.1) *avec les mêmes conditions initiales* $x_1(\lambda_0) = x_2(\lambda_0)$, $x'(\lambda_0) = x'(\lambda_0)$ $(\lambda_0 \epsilon [\lambda_1, \lambda_2])$, *elles sont identiques*. En effet, la différence $y(\lambda) = x_2(\lambda) - x_1(\lambda)$ satisfait alors aux conditions du théorème 86, d'où $x_2(\lambda) - x_1(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \epsilon [\lambda_1, \lambda_2]$.

Chapitre VI.

Applications.

87. Équations intégrales. Nous montrerons tout d'abord une application très simple des séries de puissances (v. Nos 63, 64 et 69).

Soit A l'anneau du type [A], où A_2 est l'ensemble de fonctions de deux variables $a = \{a(x,y)\}$ considéré dans l'exemple (β) du N° 64. Alors l'équation

(87.1) $$z = a + kz$$

possède toujours la solution

$$z = \frac{1}{1-k}\, a,$$

car le rayon de k est infini et la série

$$\frac{1}{1-k} = 1 + k + k^2 + \ldots$$

est fortement convergente; de plus, cette solution est unique. Ce fait signifie que l'équation intégrale

(87.2) $$z(x, y) = a(x, y) + \int_y^x k(x, s)\, z(s, y)\, ds$$

possède toujours une et une seule solution. En posant en particulier $y = 0$ et $z(x, 0) = z(x)$, $a(x, 0) = a(x)$, l'équation (87.2) prend la forme de l'équation de Volterra

$$z(x) = a(x) + \int_0^x k(x,s)\, z(s)\, ds.$$

Ainsi l'existence et l'unicité de la solution de cette dernière équation se trouve établie.

Soit maintenant A l'anneau du type [A], où A_2 est l'ensemble de fonctions de deux variables $a = \{a(x, y)\}$ considéré dans l'exemple (γ) du N° 64. Alors l'équation

(87.3) $$z = a + \lambda kz,$$

où λ est un nombre, possède toujours la solution

$$z = \frac{1}{1 - \lambda k}\, a,$$

pourvu que $|\lambda|$ soit inférieur au rayon $\varrho(k)$ de k; cette solution est unique. Cela signifie que l'équation

$$z(x, y) = a(x, y) + \lambda \int_0^1 k(x, s)\, z(s, y)\, ds$$

et en particurier l'équation de Fredholm

$$z(x) = a(x) + \lambda \int_0^1 k(x, s)\, z(s)\, ds$$

possède toujours une et une seule solution, si $|\lambda| < \varrho(k)$.

88. L'anneau C_T. Nous passons maintenant au domaine principal de nos applications.

Désignons par C_T l'ensemble des fonctions complexes $a = \{a(t)\}$ de variable réelle t, définies et *continues* dans un intervalle donné $0 \leqslant t < T$. La somme de deux fonctions de C_T soit entendue au sens ordinaire et le produit soit défini par la relation (v. N° 10)

$$ab = \{a(t)\}\{b(t)\} = \{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\}.$$

Cela posé, C_T *constitue un anneau algébrique commutatif.*

Soit C_T^* l'ensemble des fonctions continues et non négatives pour $0 \leqslant t < T$. Cet ensemble satisfait évidement aux axiomes 1^*, 2^*, 2^{**} et 3^* des N^{os} 47 et 59. Convenons enfin que le *module* des fonctions de C_T est entendu au sens ordinaire. Ce module satisfait aux axiomes 1°—5° des N^{os} 50 et 59.

On vérifie facilement que l'ensemble C_T est fortement complet (v. N° 57).

Nous étudierons maintenant les *éléments généralisés de* C_T qui sont, comme nous le verrons, d'une abondance bien variée. Nous en discuterons successivement les plus caractéristiques types.

89. La classe d'éléments généralisés correspondant aux fonctions sommables[13]). Désignons par S_T la classe des éléments généralisés a pour lesquels le produit la, où $l = \{1\}$ (v. N° 30), est ordinaire et peut être représenté sous la forme

(89) $$la = \{\int_0^t a(\tau)\, d\tau\}$$

[13]) Les résultats des N^{os} 89—91 ont été établis dans quelques discussions de l'auteur avec M. C. Ryll-Nardzewski.

où $\{a(t)\}$ est une fonction sommable dans tout intervalle $0 \leqslant t < t_0 < T$. On voit aussitôt que la fonction $\{a(t)\}$ qui correspond à l'élément donné a est déterminée jusqu'à un ensemble de mesure nulle près.

Nous démontrerons que, réciproquement, à toute fonction $\{a(t)\}$ sommable dans les intervalles $0 \leqslant t < t_0 < T$ on peut faire correspondre un élément a de S_T de manière que l'égalité (89) ait lieu. En effet, il existe toujours une suite $a_n = \{a_n(t)\}$ de fonctions continues pour $0 \leqslant t < T$ qui converge (au sens ordinaire) presque partout vers $\{a(t)\}$ et telle que l'on a presque partout $|a_n(t)| \leqslant b(t)$, où $\{b(t)\}$ est une fonction sommable dans tout intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0 < T$. La suite $la_n = \{\int_0^t a_n(\tau) d\tau\}$ converge alors, d'après le Corollaire 54.1, fortement vers $\{\int_0^t a(\tau)\, d\tau\}$. Donc la suite a_n détermine un élément généralisé a pour lequel on a (89). Cet élément est évidement unique.

Nous avons ainsi établi une correspondence biunivoque entre les éléments de la classe $\bar{S}_T$ et ceux de la classe S_T des fonctions *sommables* dans tout intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0 < T$.

90. Isomorphisme des classes $\bar{S}_T$ et S_T. Soient a et b deux éléments de la classe $\bar{S}_T$ et $\{a(t)\}$, $\{b(t)\}$ deux fonctions correspondantes de S_T. Nous démontrerons que *la somme $a+b$ et le produit ab appartiennent encore à la classe* $\bar{S}_T$ et que *les fonctions leur correspondant sont la forme*

$$\{a(t) + b(t)\} \quad \text{et} \quad \{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau\}.$$

En effet, si $la = \{\int_0^t a(\tau)\, d\tau\}$ et $lb = \{\int_0^t b(\tau)\, d\tau\}$, on a

$$l(a+b) = la + lb = \{\int_0^t a(\tau)\, d\tau\} + \{\int_0^t b(\tau)\, d\tau\} = \{\int_0^t [a(\tau)+b(\tau)]\, d\tau\},$$

d'où la proposition pour la somme.

D'autre part, on peut écrire, en vertu des théorèmes 10.1, 10.3 et 10.4,

$$l^2 ab = la \cdot lb = \{\int_0^t a(\tau)\, d\tau\} \{\int_0^t b(\tau)\, d\tau\} = l \cdot \{\int_0^t c(\tau)\, d\tau\},$$

où $c(t) = \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau$. Comme l'élément l est libre, il vient d'ici

$$l \cdot ab = \{\int_0^t c(\tau)\, d\tau\}.$$

d'où la proposition pour le produit.

En se servant du langage familier de l'algèbre abstraite, on exprimera la propriété des ensembles $\bar{S}_{T}$ et S_T que nous venons de démontrer en disant que *les ensembles $\bar{S}_T$ et S_{T} sont isomorphes par rapport à l'addition et la multiplication.* Cet isomorphisme permet d'envisager les fonctions sommables comme une généralisation, au sens du N° 77, des fonctions continues et de les identifier avec les éléments généralisés de la classe S_{T}.

91. Éléments géneralisés dans l'anneau des fonctions sommables. L'ensemble S_T considéré au N^{os} 89 et 90 constitue évidemment un anneau algébrique par rapport aux opérations

$$\{a(t)\}+\{b(t)\}=\{a(t)+b(t)\} \text{ et } \{a(t)\}\{b(t)\}=\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)d\tau\}.$$

L'anneau C_T peut être considéré comme un sous-anneau de S_T.

Si les fonctions de S_T non négatives presque partout sont considérées comme des éléments non négatifs et le module est entendu au sens ordinaire, on peut parler des convergences forte et faible dans l'anneau S_T qui signifient évidemment autre chose que les convergences analogues relatives à l'anneau C_T.

Nous démontrerons que *tout élément généralisé de S_T est en même temps un élément généralisé de C_T.* Plus précisément: *tout élément généralisé de S_T contient une suite a_n dont tous les termes sont des éléments de C_T et pour laquelle il existe un élément libre $g \epsilon C_T$ tel que la suite ga_n converge fortement dans C_T.* Cette proposition montre qu'il revient au même si l'on parle des éléments généralisés de C_T ou bien de ceux de S_T.

En effet, si une suite $b_n \epsilon S_T$ appartient à un élément généralisé b de S_T, il existe un élément libre $h \epsilon S_T$ pour lequel la suite hb_n converge dans S_T fortement vers un élément ordinaire $hb \epsilon S_T$. Il existe donc un élément $c \epsilon S_T^*$ pour lequel on a, quel que soit q naturel,

$$q\,|hb_n - hb| \leqslant c \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Par conséquent on a

$$q\,|lhb_n - lhb| \leqslant lc \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Or, les éléments lhb_n, lhb et lc appartiennent tous à C_T, donc la suite lhb_n converge dans C_T fortement vers lhb.

Considérons, d'autre part, la suite $e_n = \{ne^{-nt}\}$. La suite $l^2 e_n$ converge dans C_T fortement vers l^2, comme on le voit facilement en écrivant $l^2 e_n = \{t\} + \left\{\frac{1}{n}(e^{-nt} - 1)\right\}$. Donc le produit $l^2 e_n \cdot lhb_n$ converge dans C_T et a fortiori dans S_T fortement vers $l^2 \cdot lhb$ ou, ce qui revient au même, $l^3 h \cdot e_n b_n$ converge de cette façon vers $l^3 h \cdot b$. Or, le produit

$$a_n = e_n b_n = \left\{ n \int_0^t e^{-n(t-\tau)} b_n(\tau)\, d\tau \right\} = \left\{ n e^{-nt} \int_0^t e^{n\tau} b_n(\tau)\, d\tau \right\}$$

est évidemment une fonction continue et appartient, par conséquent, à C_T. Comme $g = l^2 h$ est un élément libre de C_T, la proposition se trouve démontrée.

92. L'élément „unité“. La suite $e_n = \{ne^{-nt}\}$ jouit d'une propriété intéressante. En effet, la relation $\lim l^2 e_n = l^2$ entraîne successivement $\lim l^2 e_n a = l^2 a$ et

$$\lim e_n a = a \qquad \text{(limite faible)},$$

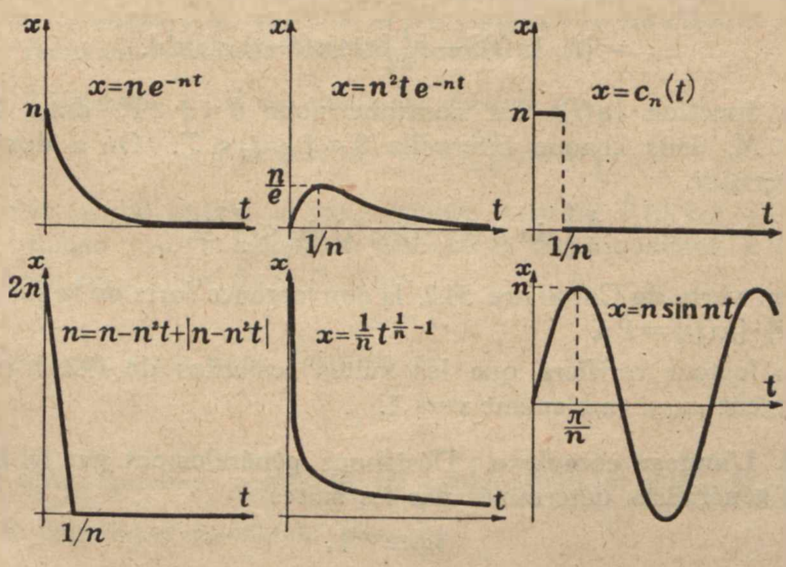
quel que soit l'élément généralisé a. Si l'on désigne par e l'élément généralisé qui correspond à la suite e_n, on a donc

$$ea = a.$$

L'élément e est donc l'*unité* dans l'anneau C_T d'éléments généralisés de C_T et l'on peut écrire tout simplement $e = 1$. Cette unité n'appartient évidemment pas à l'anneau C_T ni à S_T (v. N° 24).

L'élément 1 peut aussi être obtenu au moyen de l'une quelconque des suites:

(92.1) $\qquad \{n^2 t e^{-nt}\}, \quad \{n \sin nt\} \quad$ et $\quad \{n - n^2 t + |n - n^2 t|\}$.



Si l'on admet les fonctions discontinues et si l'on considère la convergence faible dans l'anneau S_T, on peut prendre aussi les suites

$$(92.2)\qquad \left\{\frac{1}{n}t^{1/n-1}\right\},\qquad \left\{c_n(t)\right\},$$

où $c_n(t)$ est égal à n pour $t \leqslant \frac{1}{n}$ et à zéro ailleurs. Les diagrames des fonctions (92.1) et (92.2) sont représentés sur la page précédente.

Pour démontrer que les suites (92.1) et (92.2) appartiennent à l'élément unité, il suffit de montrer qu'en les multipliant par un élément libre g, convenablement choisi, on obtiendra les suites qui convergent fortement vers g. Par exemple, la suite

$$l^2\cdot\{n \sin nt\} = \{n\int_0^t (t-\tau)\sin n\tau\, d\tau\} = \{t - \frac{1}{n}\sin nt\}$$

converge fortement vers $\{t\} = l^2$. On peut aussi vérifier directement pour un élément arbitraire $a = \{a(t)\} \epsilon C_T$, que le produit $\{n \sin nt\}.\ a$ converge faiblement vers a. Dans ce but, il suffit de montrer que le produit

$$l^2\{n \sin nt\}\, a$$

converge fortement vers l^2a. Or, ceci est évident, d'après le résultat de tout à l'heure. On peut aussi suivre la voie naïve et effectuer le calcul direct:

$$(92.3)\qquad \begin{aligned} l^2\{n \sin nt\}\, a &= \{t - \frac{1}{n}\sin nt\}\{a(t)\} = \\ &= \{t\}\cdot\{a(t)\} - \{\frac{1}{n}\int_0^t \sin n(t-\tau)\, a(\tau)d\tau\}. \end{aligned}$$

La fonction $\{a(t)\}$ est continue pour $0 \leqslant t < T$, donc bornée, $|a(t)| \leqslant M$, dans chaque intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0 < T$. On a donc dans cet intervalle

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^t \sin n(t-\tau)\cdot a(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \frac{2}{n}M,$$

d'où, en vertu du Corollaire 54.2, la convergence forte de la suite (92.3) vers $\{t\}\cdot\{a(t)\} = l^2 a$.

Le lecteur vérifiera que les suites restantes de (92.1) et (92.2) convergent aussi faiblement vers 1.

93. L'anneau complexe. Désignons généralement par $[\alpha]$ les éléments généralisés déterminés par les suites

$$\{\alpha n e^{-nt}\},$$

où a est un nombre quelconque, complexe ou réel. Alors les suites

$$\{n^2 te^{-nt}\},\ \{an \sin nt\} \qquad \text{etc.}$$

appartiennent encore à $[a]$. La convergence faible de ces suites se démontre de la même manière que celle des suites du N° 92.

On a

$$[a] + [\beta] = \lim \{ane^{-nt}\} + \lim \{\beta ne^{-nt}\} = \lim \{(a+\beta) ne^{-nt}\} = [a+\beta]$$

et

$$[a] \cdot [\beta] = \lim \{ane^{-nt}\} \cdot \lim \{\beta ne^{-nt}\} = \lim \{a \beta ne^{-nt}\} = [a\beta].$$

Ces deux égalités expriment l'isomorphisme de l'ensemble des éléments $[a]$ avec l'ensemble des nombres complexes, où l'addition et la multiplication sont entendues au sens ordinaire. On peut donc identifier ces éléments et écrire tout simplement $[a] = a$. Ainsi les nombres peuvent être envisagés comme des éléments extraordinaires de l'anneau C_T.

L'ensemble $\overline{C_T}$ étant un anneau algébrique, il s'ensuit que les éléments de la forme $a+a$, où a est un nombre complexe et $a \epsilon \overline{C_T}$, appartient encore à l'anneau $\overline{C_T}$. On voit ainsi que l'anneau complexe $[C_T]$ du type $[A]$, où $A_2 = C_T$ (v. N^{os} 28 et 29), est un sous-anneau de $\overline{C_T}$. Ce fait est théoriquement trés interéssant, car il montre que la construction algébrique de l'anneau complexe peut être remplacée, dans le cas de l'anneau $[C_T]$, par la construction qui s'appuie sur la notion de convergence faible.

On peut démontrer facilement que la convergence forte dans l'anneau complexe $[C_T]$ entraîne la convergence faible relative à C_T et que la réciproque n'a pas lieu, en général.

94. L'élément s. Il est facile de vérifier que

$$l^3 \{n^2 \cos nt\} = l^2 - \left\{\frac{1}{n} \sin nt\right\}.$$

Cette égalité prouve la convergence forte de $l^3 \{n^2 \cos nt\}$ vers l^2. En désignant par s l'élément généralisé correspondant à la suite $\{n^2 \cos nt\}$, on a donc $l^3 s = l^2$, d'où

$$ls = 1.$$

L'élément s est donc l'inverse de l;

$$s = \frac{1}{l}.$$

Il sera cependant commode de garder, dans la suite, le symbole s et de l'employer également avec $\frac{1}{l}$.

On sait que la multiplication d'une fonction $a = \{a(t)\}$ de C_T par l'élément l entraîne l'intégration de $a(t)$:

$$la = \left\{ \int_0^t a(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Pour reconnaître, qu'est ce que signifie la multiplication par s, nous étudierons les 4 cas suivants:

(i) Soit $a = \{a(t)\}$ une fonction continûment dérivable pour $0 \leqslant t < T$ et nulle au point $t = 0$. Alors on a

$$a = l \cdot \{a'(t)\}$$

et, en multipliant les deux membres de cette égalité par s,

$$sa = \{a'(t)\}.$$

Le produit sa est donc un élément ordinaire de C_T qui est égal à la dérivée de $\{a(t)\}$.

(ii) Soit $a = \{a(t)\}$ une fonction continûment dérivable pour $0 \leqslant t < T$ avec le valeur initiale $a(0)$ quelconque. Alors on peut écrire

$$\{a(t)\} = a(0) \cdot l + \{a(t) - a(0)\},$$

où la fonction $\{a(t) - a(0)\}$ est continûment dérivable pour $0 \leqslant t < T$ et nulle pour $t = 0$. En multipliant la dernière égalité par s, il vient donc, suivant le cas (i),

$$s\{a(t)\} = a(0) + \{a'(t)\}. \tag{94}$$

La multiplication par s ne signifie donc pas, dans ce cas, la dérivation au sens propre, il faut cependant ajouter à la dérivée $\{a'(t)\}$ le *nombre* $a(0)$. Or, c'est justement cette petite modification qui assure l'associativité de la multiplication des éléments l et s:

$$(ls)\, a = l\, (sa),$$

c'est ce qui entraîne une simplification efficace des calculs.

(iii) Soit $a = \{a(t)\}$ une fonction absolument continue dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$. Alors la dérivée $\{a'(t)\}$ de $\{a(t)\}$ existe presque partout et l'on a, d'après les N^{os} 89 et 90,

$$l\{a'(t)\} = \{ \int_0^t a'(\tau)\, d\tau \} = \{a(t) - a(0)\} = \{a(t)\} - a(0) \cdot l.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par s, on retrouve la formule (94).

(iv) Considérons maintenant le cas, où $a = \{a(t)\}$ est une fonction continue quelconque. L'existence du produit sa est toujours assurée par le fait que l'ensemble $\overline{C}_T$, auquel s et a appartiennent, est un anneau. En considérant la multiplication par s comme une généralisation de la dérivation, on peut dire que toute fonction continue est dérivable. Ainsi par exemple la fonction sans dérivée de Weierstrass est dérivable. Ce paradoxe n'est évidemment qu'apparent, car la multiplication par s donne un élément généralisé qui n'est pas nécessairement une fonction.

Dans le méme sens, on peut dire que toute fonction sommable de S_T est dérivable. Il peut paraître, tout d'abord, inutile d'introduire les dérivées qui ne sont pas les fonctions; or, il se peut, qu'en opérant avec ces éléments généralisés, le résultat final redeviendra une fonction au sens propre. C'est ainsi que les calculs se prêterons à des applications pratiques.

Remarquons enfin que, l'ensemble $\overline{C}_T$ étant un anneau algébrique, le produit sa a un sens, quel que soit l'élément généralisé a. Pour la même raison le produit $s^n a$ qui correspond à la dérivation n-tuple de $\{a(t)\}$ existe toujours.

95. La fonction l^λ. Les fonctions dons nous avons parlé aux N^{os} 88—94 étaient des éléments des anneaux C_T et S_T. Cependant l'expression

$$\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}, \tag{95.1}$$

où Γ signifie la fonction *gamma* d'Euler (v. N° 30), est susceptible de deux interprétations, à savoir: on peut la traiter 1° comme une fonction $\{a(t,\lambda)\}$ de deux variables t et λ, ou bien 2° comme une fonction $a(\lambda)$ au sens du N° 65 qui fait correspondre à tout nombre positif λ une fonction de C_T. Les deux interprétations nous seront utiles dans la suite. Nous étudierons aussi, plus généralement, des fonctions $a(\lambda)$ dont les valeurs sont des éléments généralisés de $\overline{C}_T$.

La fonction (95.1) satisfait, pour $\lambda, \mu > 0$, à l'équation fonctionnelle

$$l^\lambda \cdot l^\mu = l^{\lambda+\mu}. \tag{95.2}$$

Moyennant l'élément $s=\frac{1}{l}$, la fonction l^λ peut être aussitôt prolongée à toute valeur réelle de λ, en posant

$$l^\lambda = \left(\frac{1}{l}\right)^\nu \cdot l^\varkappa,$$

où ν est le moindre nombre naturel supérieur à $-\lambda$ et $\varkappa = \lambda + \nu$. En particulier on a donc $l^0 = \frac{1}{l} \cdot l = 1$.

Le lecteur vérifiera que cette fonction prolongée l^λ satisfait encore à l'équation (95.2) pour tous les λ et μ réels.

96. Continuité uniforme. Nous démontrerons que *la fonction l^λ est uniformément fortement continue dans tout intervalle* $1 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ Cette proposition est évidemment une conséquence directe du

Lemme 96. *Si une fonction de deux variables $\{a(t, \lambda)\}$ est continue (au sens ordinaire) dans le domaine D: $(\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,\ 0 \leqslant t < T)$, alors la fonction $a(\lambda) = \{a(t, \lambda)\}$ est uniformément fortement continue dans l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.*

Démonstration. La fonction de deux variables $\{a(t, \lambda)\}$ est uniformément continue dans chaque domaine $D^{(u)}$: $(\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,\ 0 \leqslant t \leqslant u < T)$. Il existe donc une suite de nombres $\gamma_n^{(u)}$ convergente vers zéro, telle que

$$|a(t, \lambda) - a(t, \lambda')| \leqslant \gamma_n^{(u)} \quad \text{pour } |\lambda - \lambda'| \leqslant \frac{1}{n},\ \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda' \leqslant \lambda_2 \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant u.$$

Désignons, pour toute valeur t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$ et tout n naturel, par $c_n(t)$ le moindre nombre tel que

$$|a(t, \lambda) - a(t, \lambda')| \leqslant c_n(t) \quad \text{pour } |\lambda - \lambda'| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda' \leqslant \lambda_2;$$

la continuité de $\{a(t, \lambda)\}$ dans D entraîne la continuité des fonctions $\{c_n(t)\}$ pour $0 \leqslant t < T$ et $n = 1, 2, \ldots$.

On a

$$0 \leqslant c_n(t) \leqslant \gamma_n^{(u)} \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant u,$$

d'où la convergence uniforme de $\{c_n(t)\}$ dans l'intervalle $[0, u]$. En vertu du lemme 54.2, il existe une fonction $\{c(t)\}$ telle que l'on peut faire correspondre à tout q naturel un nombre n_0 de manière à avoir

$$q c_n(t) \leqslant c(t) \quad \text{pour } n \geqslant n_0 \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

d'où

$$q\,|a(t, \lambda) - a(t, \lambda')| \leqslant c(t) \quad \text{pour } |\lambda - \lambda'| \leqslant \frac{1}{n_0} \text{ et } 0 \leqslant t < T.$$

Or, cette inégalité exprime déjà la continuité uniformément forte de $a(\lambda) = \{a(t, \lambda)\}$ dans l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

On peut remarquer facilement que la continuité uniformément forte de l^λ dans les intervalles $1 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ entraîne *la continuité faible de l^λ dans tout intervalle fini J.* En effet, si $\lambda_0 \leqslant 1$ est la borne inférieure de cet intervalle, on a

(96) $$l^{2-\lambda_0} \cdot l^\lambda = l^{2-\lambda_0+\lambda}, \qquad \text{où } 2 - \lambda_0 + \lambda \geqslant 2 \text{ pour } \lambda \in J,$$

d'où la proposition.

97. Dérivée de l^λ. Nous démontrerons maintenant que *la fonction l^λ est régulièrement fortement dérivable dans chaque intervalle* $1<\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$. En effet, la fonction de deux variables $\{a(t,\lambda)\}=\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}$ possède la dérivée partielle (au sens ardinaire) par rapport à λ:

$$\frac{\partial a(t,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{t^{\lambda-1}\ln t}{\Gamma(\lambda)}-\frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\cdot\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

qui est continue pour $\lambda>1$ et $t\geqslant 0$. La dérivabilité régulièrement forte de 1 resultera donc du

Lemme 97. *Si une fonction $\{a(t,\lambda)\}$ définie dans le domaine D: $(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2,\ 0\leqslant t<T)$ posséde la dérivée partielle $\frac{\partial a(t,\lambda)}{\partial\lambda}$ continue dans ce domaine, alors la fonction $a(\lambda)=\{a(t,\lambda)\}$ est régulièrement fortement dérivable dans l'intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$ et l'on a*

$$a'(\lambda)=\left\{\frac{\partial a(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right\}.$$

Démonstration. On a

$$\Delta=\frac{a(t,\lambda)-a(t,\lambda')}{\lambda-\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\lambda}a(t,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}a(t,\xi)-\frac{\partial}{\partial\lambda}a(t,\lambda).$$

où $|\xi-\lambda|\leqslant|\lambda-\lambda'|$. Pareillement que dans la démonstration du lemme 96, il existe une fonction $\{c(t)\}$ telle qu'il est possible de faire correspondre à tout q naturel un nombre n_0 pour lequel on a

$$q\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}a(t,\lambda)-\frac{\partial}{\partial\lambda}a(t,\lambda')\right|\leqslant c(t)\qquad\text{pour } |\lambda-\Upsilon'|\leqslant\frac{1}{n_0}\ \text{et}\ 0\leqslant t<T.$$

Par conséquent on a $q|\Delta|\leqslant c(t)$, d'où le lemme.

Si J est un intervalle fini et λ_0 la borne inférieure de J, on voit d'après (96) que la fonction $l^{1+|\lambda_0|}\cdot l^\lambda$ est régulièrement fortement dérivable dans J. Donc, *l^λ est régulièrement faiblement dérivable dans tout intervalle fini.*

98. Continuité forte et continuité par rapport à deux variables Les lemmes 96 et 97 peuvent être completés par la proposition suivante:

Si une fonction $a(\lambda)$ est fortement continue au point λ_0 la fonction correspondante de deux variables $\{a(t,\lambda)\}$ est continue par rapport aux deux variables sur la droite $\lambda=\lambda_0$ $(0\leqslant t<T)$.

En effet soit t_0, λ_0 où $0 \leqslant t_0 < T$, un point quelconque de cette droite. Lorsque $\varepsilon < 0$ est donné arbitrairement, il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que

$$(98.1) \qquad |a(t,\lambda_0) - a(t_0, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } |t - t_0| < \delta_1.$$

D'autre part, la continuité forte de $a(\lambda)$ au point λ_0 signifie l'existence d'une fonction $\{c(t)\}$ continue pour $0 \leqslant t < T$ telle que l'on peut attribuer à tout nombre naturel q un nombre positif δ_2, pour lequel l'inégalité $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2$ entraîne

$$q\,|a(t,\lambda) - a(t,\lambda_0)| \leqslant c(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t < T.$$

Si m est le maximum de $c(t)$ pour $|t - t_0| \leqslant \delta_1$, on aura donc pour $\frac{m}{q} > \frac{\varepsilon}{2}$ et δ_2 choisi d'une manière convenable,

$$(98.2) \qquad |a(t,\lambda) - a(t,\lambda_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } |t - t_0| < \delta_1 \text{ et } |\lambda - \lambda_0| < \delta_2.$$

Les relations (98.1) et (98.2) entraînent

$$|a(t,\lambda) - a(t_0,\lambda_0)| < \varepsilon \qquad \text{pour } |t - t_0| < \delta_1 \text{ et } |\lambda - \lambda_0| < \delta_2.$$

d'où la proposition.

Il s'ensuit aussitôt, en vertu des lemmes 96 et 97, que

Si une fonction $a(\lambda)$ est fortement continue dans un intervalle fermé $[\lambda_2, \lambda_2]$, elle y est uniforément fortement continue.

Si une fonction $a(\lambda)$ possède la dérivée fortement continue dans un intervalle fermé $[\lambda_1, \lambda_2]$, alors $a(\lambda)$ est régulièrement fortement dérivable dans cet intervalle.

Ces propositions sont valables pour l'anneau C_T et ne peuvent pas être généralisées, sans hypothèses accessoires, aux anneaux arbitraires (v. N° 66).

99. Translation. Posons

$$(99) \qquad E(\lambda) = s \cdot \{k(t,\lambda)\} \qquad \text{pour } \lambda \leqslant 0,$$

où

$$k(t,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < \lambda, \\ 1 & \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant t. \end{cases}$$

On a alors

$$l^2 E(\lambda) = \{ \int_0^t k(\tau,\lambda)\, d\tau \} = \{k_1(t,\lambda)\},$$

où

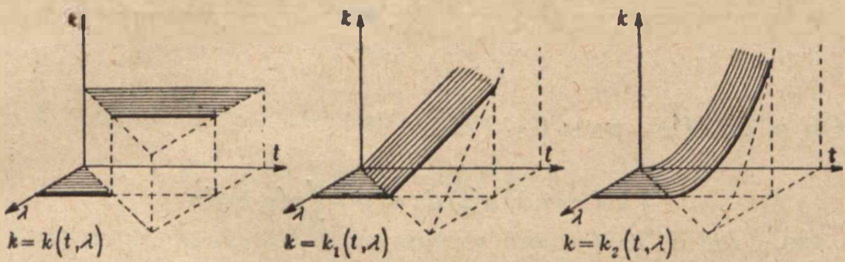
$$k_1(t,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < \lambda, \\ t - \lambda & \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant t. \end{cases}$$

et

$$l^3 E(\lambda) = \{ \int_0^t k_1(\tau, \lambda)\, d\tau \} = \{ k_2(t, \lambda) \},$$

où

$$k_2(t, \lambda) = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 \leqslant t < \lambda, \\ {}^1/_2 (t - \lambda)^2 \text{ pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant t. \end{cases}$$



La fonction $\{k_2(t, \lambda)\}$ possède la dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} k_2(t, \lambda) = - k_1(t, \lambda)$$

qui est continue pour $t \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$. Il s'en suit, d'après les N^{os} 96—98, que la fonction $l^3 E(\lambda)$ est uniformément fortement continue et régulièrement fortement dérivable dans chaque intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ et que

$$l^3 E'(\lambda) = - l^2 E(\lambda).$$

Par conséquent la fonction $E(\lambda)$ est uniformément faiblement continue et régulièrement faiblement dérivable dans chaque intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ et l'on a

$$E'(\lambda) = - s \cdot E(\lambda) \qquad \text{pour } \lambda \geqslant 0.$$

D'aprés (99) on voit facilement que

$$E(0) = s \cdot l = 1.$$

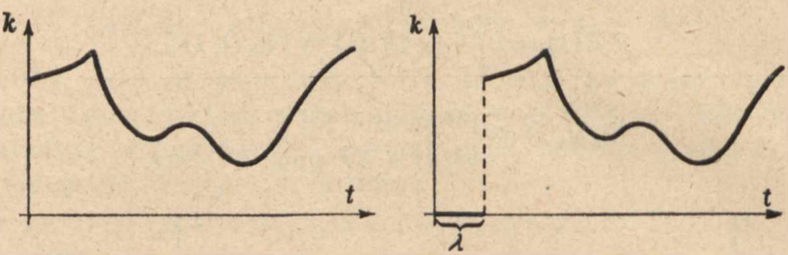
En vertu du théoréme 84, la fonction $E(\lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$E(\lambda + \mu) = E(\lambda) \cdot E(\mu) \qquad \text{pour } \lambda, \mu \geqslant 0.$$

Nous démontrerons que *si $a = \{a(t)\}$ est une fonction continue de C_T ou bien une fonction sommable de S_T, alors le produit $E(\lambda) a$ représente toujours la fonction $\{a(t, \lambda)\}$, définie par les égalités:*

$$a(t, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < \lambda, \\ a(t - \lambda) & \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant t. \end{cases}$$

On peut dire, moins exactement, que la multiplication par $E(\lambda)$ signifie la *translation* de la fonction donnée d'un segment de longueur λ:



On a, en effet, pour $0 \leqslant t \leqslant \lambda$,

$$\int_0^t k(t-\tau, \lambda)\, a(\tau)\, d\tau = 0 = \int_0^t a(\tau, \lambda)\, d\tau$$

et pour $0 \leqslant \lambda \leqslant t$

$$\int_0^t k(t-\tau, \lambda)\, a(\tau)\, d\tau = \int_0^{t-\lambda} a(\tau)\, d\tau = \int_\lambda^t a(\tau-\lambda)\, d\tau = \int_0^t a(\tau-\lambda)\, d\tau,$$

donc

$$l E(\lambda)\, a = l\{a(t, \lambda)\}$$

et par suite

$$E(\lambda)\, a = \{a(t, \lambda)\}.$$

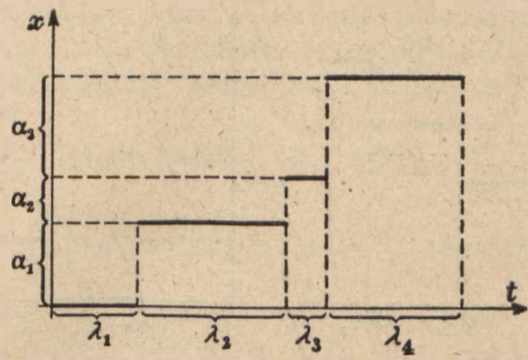
100. Séries de translations. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ une suite quelconque de nombres non négatifs, croissante indéfiniement. On voit facilement que si $a_1, a_2, \ldots$ est une suite arbitraire de fonctions de C_T ou bien de S_T, alors la série infinie

(100.1) $$a_1 E(\lambda_1) + a_2 E(\lambda_2) + \ldots$$

est toujours faiblement convergente. Pareillement, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ est une suite arbitraire de nombres (réels ou complexes), la série

(100.2) $$\alpha_1 E(\lambda_1) + \alpha_2 E(\lambda_2) + \ldots$$

converge toujours faiblement, car en multipliant (100.2) par l on obtient une suite du type (100.1). La somme de (100.2), multipliée par l, représente une fonction „en escalier" (en allemand: *Treppenfunktion*) dont le diagramme, dans le cas où les λ_i et α_i sont positifs, a la forme:



Si $k = E(\lambda)$, la série de puissances

(100.3) $$l a_0 + l a_1 \lambda k + l a_2 \lambda^2 k^2 + \ldots$$

est absolument fortement convergente pour tout λ complexe. On peut donc appliquer, pour les séries de la forme (100.3) la *multiplication de Cauchy* (v. N° 61):

$$(la_0 + la_1 \lambda k + la_2 \lambda^2 k^2 + \ldots)(l\beta_0 + l\beta_1 \lambda k + l\beta_2 \lambda^2 k^2 + \ldots) =$$
$$= l^2 \gamma_0 + l^2 \gamma_1 \lambda k + l^2 \gamma_2 \lambda^2 k^2 + \ldots,$$

où généralement $\gamma_n = a_0 \beta_n + \ldots + a_n \beta_0$. Par conséquent on a

$$(a_0 + a_1 \lambda k + a_2 \lambda^2 k^2 + \ldots)(\beta_0 + \beta_1 \lambda k + \beta_2 \lambda^2 k^2 + \ldots) = \gamma_0 + \gamma_1 \lambda k + \gamma_2 \lambda^2 k^2 + \ldots,$$

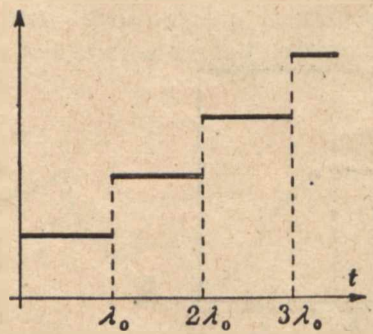
Donc, la multiplication de Cauchy s'applique encore aux séries de puissances de la forme:

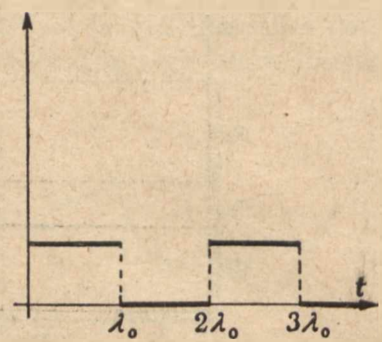
$$a_0 + a_1 \lambda k + a_2 \lambda^2 k^2 + \ldots.$$

Si $\Phi(\lambda)$ est une fonction analytique (au sens ordinaire) holomorphe au point $\lambda = 0$, le sens du symbole $\Phi(\lambda k)$ est déterminé par le développement correspondant en série (v. N° 69). On a en particulier

$$\frac{1}{1 - \lambda k} = 1 + \lambda k + \lambda^2 k^2 + \ldots.$$

Voici les diagrammes des fonctions représentées par les symboles $\frac{l}{1 - E(l_0)}$ et $\frac{l}{1 + E(l_0)}$:





101. Évaluation de quelques intégrales. Nous démontrerons les formules suivantes:

$$\int_0^\lambda E(ax)\,\varphi(x)\,dx = \{f(t, \lambda)\} \tag{101.1}$$

et

$$\int_0^\lambda E[a(\lambda - x)]\,\varphi(x)\,dx = \{f(\lambda - t, \lambda)\}, \tag{101.2}$$

où $a>0$, $\varphi(x)$ est une fonction numérique, sommable (au sens habituel) dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \lambda$, et

$$f(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right) \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant a\lambda \\ 0 \text{ pour } t<0 \text{ et pour } t<a\lambda. \end{cases}$$

Si la fonction $\varphi(\lambda)$ est définie dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda < T$, on obtient de (101.1), pour $a=1$ et $\lambda \to T$, la formule suivante, due à C. Ryll-Nardzewski,

$$\int_0^T E(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda = \{\varphi(t)\}.$$

La démonstration des formules (101.1) et (101.2) s'appueyera sur le

Lemme 101. *Si la fonction $a(\lambda) = \{a(t,\lambda)\}$ est fortement continue dans un intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ et la fonction numérique $\varphi(\lambda)$ est sommable (au sens habituel) dans cet intervalle, alors on a*

$$\int_0^\lambda a(x)\,\varphi(x)\,dx = \left\{\int_0^\lambda a(t, x)\,\varphi(x)\,dx\right\}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit E un ensemble mesurable contenu dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ sur lequel le produit $a(\lambda)\varphi(\lambda)$ est uniformément fortement continu. Alors on a, d'après le N° 71,

$$\int_E a(x)\varphi(x)dx = \lim \sum_{\nu=1}^{kn} |E_\nu^n| \cdot a(\lambda_\nu^n)\,\varphi(\lambda_\nu^n) =$$

$$= \lim \sum_{\nu=1}^{kn} \left\{ |E_\nu^n|\, a(t, \lambda_\nu^n)\,\varphi(\lambda_\nu^n) \right\} = \left\{ \int_E a(t, x)\,\varphi(x)\,dx \right\}.$$

Soit maintenant $E_1, E_2, \ldots$ une suite d'ensembles mesurables disjoints dont la somme diffère de $[0, \lambda_0]$ d'un ensemble de mesure nulle et sur lesquels le produit $a(\lambda)\varphi(\lambda)$ est uniformément fortement continu. On a alors, d'après le N° 73,

$$\int_0^{\lambda_0} a(x)\,\varphi(x)\,dx = \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{E_\nu} a(t, x)\,\varphi(x)\,dx \right\} = \left\{ \int_0^{\lambda_0} a(t, x)\,\varphi(x)\,dx \right\}.$$

D'après le N° 99 on a $l^2 E(ax) = \{k_1(t, ax)\}$, d'où, en vertu du lemme 101,

$$I = \int_0^\lambda l^2 E(ax)\,\varphi(x)\,dx = \{a(t, \lambda)\},$$

où $a(t, \lambda) = \int_0^\lambda k_1(t, ax)\,\varphi(x)\,dx$.

Si $0 \leqslant t < a\lambda$, on a

$$a(t, \lambda) = \int_0^{t/a} (t - ax)\,\varphi(x)\,dx = \int_0^t (t - \tau)\,\tfrac{1}{a}\,\varphi\left(\tfrac{\tau}{a}\right) d\tau = \int_0^t (t - \tau)\,f(\tau, \lambda)\,d\tau;$$

si $0 \leqslant a\lambda \leqslant t$, on a

$$a(t, \lambda) = \int_0^\lambda (t - ax)\,\varphi(x)\,dx = \int_0^{a\lambda} (t - \tau)\,\tfrac{1}{a}\,\varphi\left(\tfrac{\tau}{a}\right) d\tau = \int_0^t (t - \tau)\,f(\tau, \lambda)\,d\tau.$$

Donc

$$\{a(t, \lambda)\} = l^2 \{f(t, \lambda)\}$$

et

$$I = l^2 \int_0^\lambda E(ax)\,\varphi(x)\,dx = l^2 \{f(t, \lambda)\},$$

d'où la formule (101.1).

La démonstration de la formule (101.2) est tout à fait analogue.

102. La fonction $F(\lambda)$. La fonction

(102.1) $$F(\lambda) = \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}\, t^{3/2}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \right\}$$

est évidemment ordinaire pour $\lambda > 0$, c'est à dire ses valeurs appartiennent, pour $\lambda > 0$, à C_T. D'après les lemmes 96 et 97 on voit que *la fonction* $E(\lambda)$ *est uniformément fortement continue et régulièrement fortement dérivable dans tout intervalle* $0 > \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Nous démontrerons qu' *en admettant pour* $F(0)$ *la valeur* 1 (v. N° 92) *la fonction* $F(\lambda)$ *deviendra uniformément faiblement continue et régulièrement faiblement dérivable dans tout intervalle* $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$.

Remarquons d'abord que

$$l^{3/2} F(\lambda) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \right\} \quad \text{pour } \lambda > 1. \tag{102.2}$$

En effet, ce produit est égal à

$$\left\{ \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \tau^{-3/2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\tau}} d\tau \right\}$$

ou bien, après la substitution $\frac{\lambda^2}{4\tau} = \frac{\lambda^2}{4t} + \sigma^2$, à

$$\left\{ \frac{2}{\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \int_0^\infty e^{-\sigma^2} d\sigma \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}.$$

L'intégrale

$$G(t, \lambda) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\tau}} d\tau$$

est évidemment continue pour $t \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$. Donc la fonction

$$G(\lambda) = \{G(t, \lambda)\}$$

est, d'après le Corollaire 54.2, uniformément fortement continue dans tout intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Or, pour $\lambda > 0$ on a

$$l^{3/2} F(\lambda) = G(\lambda),$$

on voit donc que $F(\lambda)$ deviendra uniformément faiblement continue, en posant

$$F(0) = l^{-3/2} G(0) = l^{-3/2} \left\{ \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} \right\} = 1.$$

La dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\tau}} d\tau = -\int_0^t \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}\,\tau^{3/2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\tau}} d\tau$$

est continue pour $t \geqslant 0$ et $\lambda > 0$, donc la fonction $l^{3/2}F(\lambda)$ est, d'après le lemme 97, régulièrement fortement dérivable dans tout intervalle $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ et l'on a

$$l^{3/2} F'(\lambda) = l F(\lambda) \qquad \text{pour } \lambda > 0.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à λ, on obtient, pour $0 < \mu < \lambda$

$$l^{3/2} F(\lambda) = l^{3/2} F(\mu) - \int_{\mu}^{\lambda} l F(\lambda)\, d\lambda$$

et, en faisant μ tendre vers zéro,

$$l^{3/2} F(\lambda) = l^{3/2} - \int_{0}^{\lambda} l F(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{pour } \lambda > 0.$$

Or, on voit aussitôt que la dernière égalité a encore lieu pour $\lambda = 0$, ce que entraîne, en la dérivant par rapport à λ,

$$l^{3/2} F'(\lambda) = - l F(\lambda) \qquad \text{pour } \lambda \geqslant 0. \tag{102.3}$$

Nous avons précédemment démontré que la fonction $l^{3/2} F(\lambda)$ est fortement continue pour $\lambda \geqslant 0$. Il s'ensuit, en vertu du N° 98 et de la relation (102.3), que la fonction $l^2 F(\lambda)$ est régulièrement fortement dérivable dans tout intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Par conséquent, *la fonction $F(\lambda)$ est régulièrement faiblement dérivable dans tout intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ et l'on a*

$$F'(\lambda) = - \sqrt{s}\, F(\lambda) \qquad \text{pour } \lambda \geqslant 0,$$

où $\sqrt{s} = l^{-1/2}$ (v. N° 94).

En vertu du théorème 84, la fonction $F(\lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$F(\lambda + \mu) = F(\lambda) \cdot F(\mu) \qquad \text{pour } \lambda, \mu \geqslant 0.$$

103. Les fonctions exponentielles. D'après un théorème de Titchmarsh[14]), *si $a, b \in C_\infty$ et $ab = 0$ alors l'un au moins des facteurs a ou b est nul.* Autrement dit, *tout élément non nul de C_∞ est libre* (v. N° 76).

D'après le N° 85, les fonctions $E(\lambda)$ et $F(\lambda)$ sont les solutions *uniques* des équations différentielles

$$E'(\lambda) = -sE(\lambda) \quad \text{et} \quad F'(\lambda) = -\sqrt{s}\, F(\lambda) \qquad (\lambda \geqslant 0),$$

telles que $E(0) = F(0) = 1$. On peut donc poser, sans ambiguïté,

$$E(\lambda) = e^{-s\lambda} \quad \text{et} \quad F(\lambda) = e^{-\sqrt{s\lambda}},$$

---

[14]) E. C. Titchmarch [22], p. 328, Theorem 153; voir aussi M. M. Crum [4 et J. Dufresnoy [7].

en adoptant généralement le symbole $e^{a\lambda}$ pour la solution (unique) $x(\lambda)$ de l'équation

$$x'(\lambda) = a\,x(\lambda), \tag{103.3}$$

où $x(0) = 1$ et a est un élément généralisé de C_∞. Cette définition est, dans le cas de l'anneau C_∞, plus générale que celle donnée au moyen de la série

$$e^{a\lambda} = 1 + \frac{\lambda a}{1!} + \frac{\lambda^2 a^2}{2!} + \ldots$$

et elle coïncide évidemment avec cette dernière, lorsque a est un élément ordinaire de C_∞.

D'après cette définition on a

$$(e^{a\lambda})' = a e^{a\lambda}.$$

Plus généralement on a, d'après le N° 82,

$$(e^{a\varphi(\lambda)})' = \varphi'(\lambda)\, a e^{a\varphi(\lambda)},$$

quelle que soit la fonction $\varphi(\lambda)$ non négative et dérivable.

On a encore

$$e^{a\lambda} \cdot e^{b\lambda} = e^{(a+b)\lambda}.$$

En effet, si les fonctions $x(\lambda) = e^{a\lambda}$ et $y(\lambda) = e^{b\lambda}$ satisfont aux équations

$$x'(\lambda) = a\,x(\lambda) \quad \text{et} \quad y'(\lambda) = b\,y(\lambda)$$

avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = 1$, alors on a, pour $z(\lambda) = x(\lambda) \cdot y(\lambda)$

$$z'(y) = x'(\lambda)\,y(\lambda) + x(\lambda)\,y'(\lambda) = a\,x(\lambda)\,y(\lambda) + x(\lambda)\,b\,y(\lambda) = (a+b)\,z(\lambda)$$

et $z(0) = 1$, donc $z(\lambda) = e^{(a+b)\lambda}$.

Dans l'interprétation de l'anneau C_T on ne peut pas affirmer que le sens de $e^{a\lambda}$ est déterminé *univoquement* par l'équation (103.2), car cet anneau peut posséder des éléments non libres (diviseurs de zéro)[15]. Il est cependant commode, dans les calculs avec les éléments de C_T, de garder le symbole $e^{a\lambda}$ en adoptant la convention qu'il signifie toujours une fonction dont les valeurs appartiennent à l'anneau C_∞. Le symbole $e^{(a+b)\lambda}$, où b est un élément ordinaire de C_T signifiera alors par définition le produit $e^{a\lambda} \cdot e^{b\lambda}$, où $e^{b\lambda}$ est déterminé par le développement en série de puissances (v. N° 70).

Considérons encore la fonction l^λ. En dérivant l'équation

$$l^{\lambda+\mu} = l^\lambda \cdot l^\mu$$

[15]) Lorsque T est un nombre fini, l'anneau C_T possède certainement des diviseurs de zéro. Si par exemple $b = \{|t - {}^1/_2 T| - (t - {}^1/_2 T)\}$, alors $b \neq 0$ et $b^2 = 0$.

l'une fois par rapport à λ et l'autre par rapport à μ, on obtient l'égalité

$$(l^{\lambda+\mu})' = (l^{\lambda})' l^{\mu} = l^{\lambda} (l^{\mu})'.$$

D'après le N° 97 on a donc, pour $\mu > 1$,

$$l^{\mu} (l^{\lambda})' = \left(\left\{ \frac{t^{\mu-1} \ln t}{\Gamma(\mu)} \right\} - \frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)} l^{\mu} \right) l^{\lambda}.$$

d'où, pour $\mu \to 1$,

$$(l^{\lambda})' = (s \{\ln t\} + C)\, l^{\lambda},$$

où C est la constante d'Euler: 0,57.... Il s'ensuit que l^{λ} peut s'écrire sous la forme

$$e^{C\lambda} \cdot e^{s\{\ln t\}\lambda},$$

où $e^{C\lambda}$ est une fontion numérique et $e^{s\{\ln t\}}$ est la fonction exponentielle, définie par l'équation différentielle

$$x'(\lambda) = s \{\ln t\}\, x(\lambda)$$

avec la valeur initiale $x(0) = 1$.

104. Relation avec la transformation de Laplace. Si $T = \infty$, la formule de Ryll-Nardzewski du N° 101 peut s'écrire dans la forme

$$\int_0^{\infty} e^{-s\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda = \{\varphi(t)\}. \tag{104}$$

Désignons par L l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$ sommables pour $t \geqslant 0$, telles que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{p-t} \varphi(t) dt$$

converge pour certains valeurs complexes de p.

Si $\{\varphi(t)\} \in L$, l'intégrale du premier membre de (104) peut être entendue au sens ordinaire, s étant une variable complexe. Cette intégrale représente alors une fonction de variable complexe s et la formule (104) établit une *transformation* qui fait correspondre aux fonctions de L certaines fonctions de variable complexe. Cette transformation est dite *transformation de Laplace* (v. N° 42).

Il est intéressant, au point de vue théorique, de remarquer que, dans l'interprétation de l'anneau $\overline{C}_{\infty}$ l'intégrale (104) a un sens, quelle que soit la fontion $\varphi(t)$ sommable dans les intervalles $0 \leqslant t \leqslant t_0$, même lorsque cette intégrale, interprétée au sens ordinaire diverge pour tout s complexe. On a ainsi, par exemple,

$$\int_0^\infty e^{-s\lambda+\lambda^2} d\lambda = \{ e^{t^2} \}.$$

105. L'équation aux dérivées partielles: $x_\lambda(\lambda,t)=ax_t(\lambda,t)$. La théorie précédente peut être appliquée à la résolution de certaines équations différentielles aux dérivées partielles. Nous nous bornerons tout d'abord à la recherche des solutions, en laissant de côte la question de leur unicité. Cette question sera discutée au N° 109.

Soit donnée l'équation

$$x_\lambda(\lambda, t) = -a\, x_t(\lambda, t) \tag{105.1}$$

où a est un nombre positif. On demande, pour $\lambda, t \geqslant 0$, une solution $x(\lambda,t)$ telle que

$$x(\lambda, 0) = 0 \text{ pour } \lambda \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x(0, t) = \psi(t) \text{ pour } t \geqslant 0,$$

où $\{\psi(t)\}$ est une fonction dérivable, pour laquelle $\psi'(0)=0$.

En intégrant (105.1) par rapport à t, on obtient

$$\int_0^t x_\lambda(\lambda,\tau)\, d\tau = -a\, x(\lambda, t)$$

et, en posant $x(\lambda) = \{x(\lambda,t)\}$,

$$l\, x'(\lambda) = -a\, x(\lambda)$$

ou bien

$$x'(\lambda) = -a\, s\, x(\lambda). \tag{105.2}$$

Cette équation est satisfaite par la fonction $e^{-as\lambda}$ qui est égale à 1 pour $\lambda=0$. On obtiendra donc la solution démandée en posant

$$\{x(\lambda, t)\} = \{e^{-as\lambda}\}\,\{\psi(t)\},$$

d'où

$$x(\lambda, t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 \leqslant t < a\lambda, \\ \psi(t - a\lambda) \text{ pour } t \geqslant a\lambda. \end{cases} \tag{105.3}$$

Cette solution est encore valable, pour l'équation (105.2), lorsque $\{\psi(t)\}$ est une fonction quelconque, sommable dans tout intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Cependant elle perd son sens strict, en sa qualité de solution de (105.1), car la fonction (105.3) ne sera pas en général, dérivable. Or, on peut rendre cette solution légitime, en interprétant d'une manière convenable l'équation (105.1). Cette interprétation peut être déduite aisément de la théorie de l'anneau C_T, en traduisant le sens de la dérivabilité faible au langage de l'analyse classique.

Nous chercherons maintenant une solution de (105.1) en demandant que

$$x(\lambda, 0) = \varphi(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x(0, t) = \psi(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0,$$

où $\varphi(\lambda)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions dérivables pour lesquelles $\varphi(0)=\psi(0)$ et $\varphi'(0) = - a\psi'(0)$. En intégrant (105.1) par rapport à t on a alors

$$\int_0^t x_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau = a\varphi(\lambda) - a\, x(\lambda, t),$$

d'où

$$l\, x'(\lambda) = a\varphi(\lambda)\cdot l - a\, x(\lambda)$$

et

(105.4) $$x'(\lambda) = a\varphi(\lambda) - a\, s\, x(\lambda).$$

Pour trouver la solution de (105.4) on peut appliquer la méthode de *variation de la constante*. En effet. posons

(105.5) $$x(\lambda) = e^{-sa\lambda}\cdot c(\lambda).$$

On a alors

(105.6) $$x'(\lambda) = e^{-sa\lambda}[c'(\lambda) - a\, s\, c(\lambda)].$$

En substituant (105.5) et (105.6) en (105.4), il vient

$$e^{-sa\lambda}\cdot c'(\lambda) = a\varphi(\lambda)$$

et, en multipliant par $e^{-sa(\mu-\lambda)}$

$$e^{-sa\lambda}\cdot c'(\lambda) = e^{-sa(\mu-\lambda)}\cdot a\varphi(\lambda).$$

En intégrant ensuite cette égalité par rapport à λ, on obtient

$$e^{-sa\mu}\,[c(\mu) - c(0)] = \int_0^\lambda e^{-sa(\mu-\lambda)}\cdot a\varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

La solution cherchée (105.5) peut donc s'écrire, en échangeant les lettres λ et μ, sous la forme

(105.7) $$x(\lambda) - \int_0^\lambda e^{-sa(\lambda-\mu)}\cdot a\varphi(\lambda)\, d\mu + c e^{-sa\lambda},$$

où $c = c(0)$ est une constante arbitraire. Pour obtenir la solution demandée de (105.1), il faut choisir cette constante c de manière que $x(0) = \{\psi(t)\}$. On aura ainsi

$$x(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-sa(\lambda-\mu)}\cdot a\varphi(\mu)\, d\mu + \{\psi(t)\}\; e^{-sa\lambda}.$$

Par conséquent la solution demandée de (105.1) est (v. N° 101)

$$x(\lambda, t) = f(\lambda, t) + g(\lambda, t),$$

où

$$f(\lambda, t) = \begin{cases} \varphi(a\lambda - t) & \text{pour } 0 \leqslant t < a\lambda \\ 0 & \text{pour } 0 \leqslant a\lambda \leqslant t, \end{cases}$$

$$g(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < a\lambda, \\ \psi(t - a\lambda) & \text{pour } 0 \leqslant a\lambda \leqslant t. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$x(\lambda, t) - \begin{cases} \varphi(a\lambda - t) & \text{pour } 0 \leqslant t < a\lambda \\ \psi(t - a\lambda) & \text{pour } 0 \leqslant a\lambda \leqslant t. \end{cases}$$

Remarquons enfin que l'on peut se débarrasser de la supposition de la régularité de $\varphi(\lambda)$ et $\psi(t)$ de la même manière que dans le cas précédent.

106. L'équation hyperbolique. Considérons l'équation hyperbolique

$$(x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_{tt}(\lambda, t) \qquad (a > 0). \tag{106.1}$$

On demande, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ et $t \geqslant 0$, une solution $x(\lambda, t)$, telle que

$$\begin{cases} x(\lambda, 0) = x_t(\lambda, 0) = 0 & \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \\ x(0, t) = f(t) \text{ et } x(\lambda_0, t) = g(t) & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases} \tag{106.2}$$

où $\{f(t)\}$ et $\{g(t)\}$ sont des fonctions données, satisfaisant à certaines conditions de régularité [dérivabilité et $f'(0) = g'(0) = 0$]. Ces conditions pourront d'ailleurs être négligées, pareillement qu'au N° 105, dès que l'on passe à l'interprétation relative à l'anneau C_T.

En intégrant (106.1) deux fois par rapport à t, on obtient

$$\int_0^t (t - \tau)\, x_{\lambda\lambda}(\lambda, \tau)\, d\tau = a^2 x(\lambda, t),$$

et, en posant $x(\lambda) = \{x(\lambda, t)\}$,

$$l^2 x''(\lambda) = a^2 x(\lambda)$$

ou bien

$$x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda). \tag{106.3}$$

Nous chercherons d'abord les solutions de (106.3) qui sont de la forme

$$y(\lambda) = e^{a\lambda + b}.$$

En substituant $y(\lambda)$ dans (106.3), on trouve $a^2 = a^2 s^2$, d'où

$$a = \pm a s.$$

On peut donc disposer arbitrairement de l'élément b dont deux valeurs particulières joueront un rôle distingué dans notre problème: 0 et $-a\lambda_0$. Pour ces valeurs la fonction $y(\lambda)$ devient

$$e^{\pm sa\lambda} \quad \text{et} \quad e^{\pm sa(\lambda_0-\lambda)} \tag{106.4}$$

et elle admet les valeurs 1 aux points 0 et λ_0 respectivement.

Or, le symbole $e^{-s\lambda}$ n'a été défini (v. N^{os} 99 et 103) que pour les valeurs positives de λ. Si l'on veut donc que les fonctions (106.4) aient un sens dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, il faut choisir les signes dans l'exposant de la manière suivante:

$$e^{-sa\lambda} \quad \text{et} \quad e^{-sa(\lambda_0-\lambda)} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2).$$

Cela posé, on voit que toute combinaison linéaire

$$x(\lambda) = c_1 e^{-sa\lambda} + c_2 e^{-sa(\lambda_0-\lambda)} \tag{106.5}$$

satisfait encore, dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, à l'équation (106.3), quelles que soient les constantes c_1 et c_2. Pour ajuster la fonction (106.5) aux conditions (106.2), il faut déterminer les constantes c_1 et c_2 de la manière à avoir

$$x(0) = f = \{f(t)\} \quad \text{et} \quad x(\lambda_0) = g = \{g(t)\}.$$

Il suffit, dans ce but, de résoudre en c_1 et c_2 le système des équations que l'on obtient de (106.5) en posant $\lambda = 0$ et $\lambda = \lambda_0$:

$$f = c_1 + c_2\, e^{-a\lambda_0 s},$$
$$g = c_1\, e^{-a\lambda_0 s} + c_2.$$

On trouve ainsi sans peine

$$c_1 = \frac{f - ge^{-a\lambda_0 s}}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}, \qquad c_2 = \frac{g - fe^{-a\lambda_0 s}}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}$$

ou bien, en introduisant les séries de translations (v. N° 100)

$$c_1 = (f - ge^{-a\lambda_0 s}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na\lambda_0 s}, \qquad c_2 = (g - fe^{-a\lambda_0 s}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na\lambda_0 s}.$$

107. L'équation parabolique. La même méthode peut être appliquée à la résolution de l'équation parabolique

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_t(\lambda, t). \tag{107.1}$$

On demande, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ et $t \geqslant 0$, une solution $x(\lambda, t)$, telle que

$$\begin{cases} x(\lambda, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \\ x(0, t) = f(t) \quad \text{et} \quad x(\lambda_0, t) = g(t). \end{cases} \tag{107.2}$$

En intégrant (107.1), on obtient

$$\int_0^t x_{\lambda\lambda}(\lambda,\tau)\,d\tau = a^2 x(\lambda,t)$$

et, en posant $x(\lambda) - \{x(\lambda,t)\}$,

$$x''(\lambda) = a^2 s\, x(\lambda).$$

En cherchant les intégrales de la forme

$$\lambda(\lambda) = e^{a\lambda+b}$$

qui se confondent avec 1 pour $\lambda=0$ et $\lambda=\lambda_0$ respectivement, on trouve de la même manière qu'au N° 105:

$$e^{-a\sqrt{s}\,\lambda} \quad \text{et} \quad e^{-a\sqrt{s}\,(\lambda_0-\lambda}.$$

La continuation du procédé du N° 106 conduit à la solution

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\sqrt{s}\,\lambda} + c_2 e^{-a\sqrt{s}\,(\lambda_0-\lambda)}$$

où

$$c_1 = (f - g e^{-a\lambda_0\sqrt{s}}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na\lambda_0\sqrt{s}}, \quad c_2 = (g - f e^{-a\lambda_0\sqrt{s}}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na\lambda_0\sqrt{s}}.$$

108. Résolution de l'équation hyperbolique et parabolique dans le cas des conditions initiales non nulles. Si l'on demande que la solution de (106.1) satisfasse aux conditions plus générales

$$x(\lambda,0) = \varphi(\lambda) \quad \text{et} \quad x_t(\lambda,0) = \psi(\lambda) \quad \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0,$$
$$x(0,t) = f(t) \quad \text{et} \quad x(\lambda_0,t) = g(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0,$$

on obtient, en intégrant (106.1) deux fois,

$$\int_0^t (t-\tau)\, x_{\lambda\lambda}(\lambda,\tau)\,d\tau = a^2 x(\lambda,t) - a^2\varphi(\lambda) - a^2 t\,\psi(\lambda).$$

ce qui correspond évidement à l'équation

(108.1) $$x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda) - a^2\varphi(\lambda)\, s - a^2\psi(\lambda).$$

Pareillement, en cherchant la solution de (107.1) qui satisfait aux conditions

$$x(\lambda,0, - \varphi(\lambda) \quad \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0,$$
$$x(0,t) - f(t) \quad \text{et} \quad x(\lambda_0,t) = g(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0,$$

on obtient l'équation

$$\int_0^t x_{\lambda\lambda}(\lambda\tau)\,d\tau = a^2 x(\lambda,t) - a^2\varphi(\lambda)$$

et, par suite,

(108.2) $$x''(\lambda) - a^2 s\, x(\lambda) - a^2\varphi(\lambda).$$

Les deux équations (108.1) et (108.2) peuvent être étudiées ensemble, en considérant l'équation plus générale

(108.3) $$x''(\lambda) = a^2 x(\lambda) + b(\lambda).$$

Supposons que la fonction

$$c_1 e^{-a\lambda} + c_2 e^{-a(\mu-\lambda)} \qquad (c_1, c_2 \text{ constantes arbitraires})$$

soit une solution de l'équation homogène

$$x''(\lambda) = a^2 x(\lambda)$$

dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, où $0 < \mu \leqslant \lambda_0$. Alors la méthode de *variation des constantes* permet de trouver une solution de l'équation non homogène (108.3). On pose

(108.4) $$x(\lambda) = e^{-a\lambda} c_1(\lambda) + e^{-a(\mu-\lambda)} c_2(\lambda, \mu).$$

En dérivant (108.4) par rapport à λ, on obtient

(108.5) $$x'(\lambda) = -a e^{-a\lambda} c_1(\lambda) + a e^{-a(\mu-\lambda)} c_2(\lambda, \mu)$$

pourvu que

(108.6) $$e^{-a\lambda} c_1'(\lambda) + e^{-a(\mu-\lambda)} c_2'(\lambda, \mu) = 0.$$

où $c'_2(\lambda, \mu)$ désigne la dérivée de $c_2(\lambda, \mu)$ par rapport à λ. En dérivant encore (108.5), on obtiendra (108.3), pourvu que

(108.7) $$-a e^{-a\lambda} c_1'(\lambda) + a e^{-a(\mu-\lambda)} c_2'(\lambda, \mu) = b(\lambda).$$

Les conditions (108.6) et (108.7) entraînent, en supposant qu'il existe l'inverse de a, les égalités suivantes

(108.8) $$e^{-a\mu} c_1'(\lambda) = -\frac{1}{2a} e^{-a(\mu-\lambda)} b(\lambda),$$

108.9) $$e^{-a\mu} c_2'(\lambda, \mu) = \frac{1}{2a} e^{-a\lambda} b(\lambda).$$

En intégrant (108.8) dans l'intervalle $[0, \mu]$ et (108.9) dans l'intervalle $[\lambda, \mu]$, on a

(108.10) $$e^{-a\mu} c_1(\mu) = e^{-a\mu} c_1(0) - \frac{1}{2a} \int_0^\mu e^{-a(\mu-x)} b(x)\,dx$$

et

$$e^{-a\mu} c_2(\lambda, \mu) = e^{-a\mu} c_2(\mu, \mu) - \frac{1}{2a} \int_\lambda^\mu e^{-ax} b(x)\,dx.$$

La dernière égalité peut encore s'écrire, pour $\mu = \lambda_0$ et $c_2 = c(\lambda_0, \lambda_0)$,

$$e^{-a\lambda} e^{-a(\lambda_0-\lambda)} c_2(\lambda, \lambda_0) = c_2 e^{-a\lambda} e^{-a(\lambda_0-\lambda)} - e^{-a\lambda} \cdot \frac{1}{2a} \int_\lambda^{\lambda_0} e^{-a(x-\lambda)} b(x)\,dx.$$

d'où

$$e^{-a(\lambda_0-\lambda)}c_2(\lambda, \lambda_0) = c_2 e^{-a(\lambda_0-\lambda)} - \frac{1}{2a}\int_{\lambda}^{\lambda_0} e^{-a(x-\lambda)}b(x)dx.$$

En posant $\mu=\lambda$ et $c_1(0)=c_1$ dans (108.10) et $\mu=\lambda_0$ dans (108.4), on trouve enfin la formule suivante

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda} + c_2 e^{-a(\lambda_0-\lambda)} - \frac{1}{2a}\int_0^{\lambda} e^{-a(\lambda-x)}b(x)\, dx - \tag{108.11}$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{\lambda}^{\lambda_0} e^{-a(x-\lambda)}b(x)dx.$$

Pour déterminer les valeurs de c_1 et c_2 il suffit évidemment de résoudre le système d'équations

$$x(0) = f = c_1 + c_2 e^{-a\lambda_0} - \frac{1}{2a}\int_0^{\lambda_0} e^{-ax}b(x)dx,$$

$$x(\lambda_0) = g = c_1 e^{-a\lambda_0} + c_2 - \frac{1}{2a}\int_0^{\lambda_0} e^{-a(\lambda_0-x)}b(x)dx,$$

c'est ce qui conduit aux formules analogues à celles à la fin du N° 106;

Dans le cas de l'équation (106.1), la première des intégrales qu figurent dans la formule (108.11) prend la forme

$$-\frac{1}{2as}\int_0^{\lambda} e^{-as(\lambda-x)}[a^2\varphi(x)s + a^2\psi(x)]dx =$$

$$= -\frac{a}{2}\int_0^{\lambda} e^{-as(\lambda-x)}\varphi(x)dx - \frac{a}{2}l\int_0^{\lambda} e^{-as(\lambda-x)}\psi(x)dx;$$

elle peut donc être évaluée moyennant la formule (101.2). Pareillement on peut évaluer les autres intégrales qui figurent dans la solution.

Dans le cas de l'équation (107.1), la première des intégrales de (108.11) a la forme

$$I = -a\int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-a\sqrt{s}(\lambda-x)}\, \varphi(x)dx$$

et, en posant $a(\lambda-x)=\mu$,

$$I = \int_0^{a\lambda} l^{1/2}\, e^{-\sqrt{s}\mu}\, \varphi(\lambda-\tfrac{\mu}{a})\, d\mu$$

et enfin, en vertu de la formule (102.2),

$$I = \left\{\int_0^{a\lambda} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\mu^2}{4t}} \varphi(\lambda - \frac{a}{\mu})d\mu\right\}.$$

Pareillement on peut évaluer les autres intégrales qui figurent dans la solution.

109. Sur l'unicité des solutions. L'unicité des solutions $x(\lambda, t)$ des problèmes considérés aux N^{os} 105—108 est assurée pour l'anneau C_T par le fait que tout élément non nul de cet anneau est libre (v. N° 103). En effet, si les fonctions $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ satisfont à l'équation (105.4) avec la même valeur initiale $x_1(0) = x_2(0) = \{\psi(t)\}$, alors la différence $x_1(\lambda) - x_2(\lambda)$ satisfait à l'équation homogène (105.2) et est idevtiquement nulle, d'après le théorème 85. Il s'ensuit que la solution $x(\lambda, t)$ du N° 105 est unique.

Les problèmes des N^{os} 106 et 107 sont des cas particuliers du problème plus général du N° 108, il suffit donc considérer ce dernier. Supposons que $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ soient deux solutions de l'équation (108.3) avec les mêmes conditions limites

$$x_1(0) = x_2(0) = f \quad \text{et} \quad x_1(\lambda_0) = x_2(\lambda_0) = g.$$

Alors la fonction $x(\lambda) = e^{a\lambda_0}[x_1(\lambda) - x_2(\lambda)]$ satisfait à l'équation homogène

$$x''(\lambda) = a^2 x(\lambda)$$

avec les conditions limites $x(0) = x(\lambda_0) = 0$. Si $y(\lambda) = c_1 e^{a\lambda} + c_2 e^{a(\lambda_0 - \lambda)}$ on peut fixer les constantes c_1 et c_2 de manière que $y(0) = x(0)$ et $y'(0) = x'(0)$; en effet, il suffit de poser

$$c_1 = \tfrac{1}{2} e^{a\lambda_0} [a\,x_1(0) - a\,x_2(0) + x'_1(0) - x'_2(0)],$$

$$c_2 = \tfrac{1}{2} [a\,x_1(0) - a\,x_2(0) - x'_1(0) + x'_2(0)].$$

Il s'ensuit, d'après le N° 86, que $y(\lambda) = x(\lambda)$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Donc $y(0) = y(\lambda_0) = 0$, c'est-à-dire

$$c_1 + c_2 e^{a\lambda_0} = c_1 e^{a\lambda_0} + c_2 = 0, \tag{109}$$

d'où

$$c_1(1 - e^{2a\lambda_0}) = 0.$$

Comme tous les éléments (non nuls) de l'anneau C_∞ sont libres' il s'ensuit que $c_1 = 0$ et que, d'après la seconde des égalités (109), $c_2 = 0$. On a donc

$$y(\lambda) = e^{a_0\lambda}[x_1(\lambda) - x_2(\lambda)] = 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$$

et, pour la même raison que tout à l'heure,

$$x_1(\lambda) - x_2(\lambda) = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0,$$

d'où la proposition.

110. La forme générale des équations aux coefficients constants du type hyperbolique et du type parabolique. En terminant la deuxième partie du présent mémoire, nous esquisserons la méthode de résolution de l'équation

(110.1) $$\alpha x_{\lambda\lambda}+2\beta x_{\lambda t}+\gamma x_{tt}+2\delta x_{\lambda}+2\varepsilon x_{t}+\eta x=f(\lambda, t),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des *nombres* et $\{f(\lambda, t)\}$ une fonction donnée. Cette méthode sera applicable aux 2 cas suivants:

(I) $A=\beta^2-\alpha\gamma>0$;

(II) $A=0$ et $B=\beta\delta-\alpha\varepsilon>0$.

Cas (I). Si $\gamma>0$, on trouve, en intégrant (110.1) deux fois,

$$\alpha l^2 x''+2(\beta l+\delta l^2)x'+(\gamma+2\varepsilon l+\eta l^2)x=g(\lambda)$$

et ensuite

(110.2) $$\alpha x''+2(\beta s+\delta)x'+(\gamma s^2+2\varepsilon s+\eta)x=s^2 g(\lambda),$$

où $g(\lambda)$ dépend de $\{f(\lambda, t)\}$ et des conditions initiales.

En cherchant, pour l'équation homogène correspondante

(110.3) $$\alpha x''+2(\beta s+\delta)x'+(\gamma s+2\varepsilon s+\eta)x=0,$$

les solutions de la forme $y(\lambda)=e^{a\lambda+b}$, on trouve pour a la condition suivante

(110.4) $$\alpha a^2+2(\beta s+\delta)a+(\gamma s^2+2\varepsilon s+\eta)=0.$$

Si $\alpha\neq 0$, on trouve ainsi

(110.5) $$a=\frac{1}{\alpha}(-\beta s-\delta\pm s\sqrt{\Delta}),$$

où $A=\beta^2-\alpha\gamma$, $B=\beta\delta-\alpha\varepsilon$, $C=\delta^2-\alpha\eta$ et $\Delta=A+Bl+Cl^2$. On peut transformer (110.5) de la manière suivante:

$$a=\frac{1}{\alpha}(-\beta\pm\sqrt{A})s+\frac{1}{\alpha}\left(-\delta\pm\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)\pm$$
$$\pm\frac{1}{\alpha}\left(\frac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{\Delta}}-\frac{B(B+Cl)}{2\sqrt{A}(\sqrt{A}+\sqrt{\Delta})^2}\right)l.$$

Il existe donc, pour a, deux valeurs de la forme

$$a=\mu s+\nu+m,$$

où μ, ν sont des nombres et m un élément ordinaire de l'anneau considéré. Par conséquent on a, pour $y(\lambda)$, deux expressions de la forme

$$e^{(\mu s+\nu+m)\lambda+b}=e^{\mu s\lambda+b}\cdot e^{\nu\lambda}\cdot e^{m\lambda}.$$

Les deux derniers facteurs $e^{\nu\lambda}$ et $e^{m\lambda}$ ont toujours un sens. Pour que le premier facteur $e^{\mu s\lambda+b}$ ait un sens dans l'intervalle considéré $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, il suffit évidemment de poser $b = -\varkappa s$, où $\varkappa \geqslant \max(\mu\lambda_1, \nu\lambda_2)$.

Si $\alpha = 0$, l'inégalité $A > 0$ entraîne $\beta \neq 0$ et l'on a

$$a = -\frac{\gamma s^2 + 2\varepsilon s + \eta}{2(\beta s + \delta)} = -\frac{\gamma}{2\beta} s + \frac{\gamma\delta - 2\beta\varepsilon}{2\beta^2} - \frac{\beta^2\eta - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{2\beta^2} \cdot \frac{l}{\beta + \delta l};$$

l'expression pour $y(\lambda)$ a donc la forme

$$e^{\mu s\lambda + b} \cdot e^{\nu\lambda} \cdot e^{\sigma l},$$

où μ, ν et σ sont des nombres.

Pour passer de la solution de l'équation homogène (110.3) à celle de l'équation non homogène (110.2), on peut appliquer, pareillement qu'au N° 108, la méthode de variation des constantes. La solution que l'on trouve ainsi contient encore deux constantes dont on peut disposer de la manière à ajuster cette solution au problème donné.

Cas (II). Les relations $A = 0$ et $B > 0$ entraînent $\alpha \neq 0$. Alors les valeurs de a que l'on trouve d'après (110.4) peuvent s'écrire sous la forme

$$a = \frac{1}{\alpha}(-\beta s - \delta \pm \sqrt{s} \cdot \sqrt{B + Cl}) = -\frac{\beta}{\alpha} s + \frac{\sqrt{B}}{\alpha}\sqrt{s} - \frac{\delta}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B + Cl}}{A\sqrt{l}}.$$

On a donc, pour $y(\lambda)$, deux expressions de la forme

$$e^{\mu s\lambda + \nu\sqrt{s}\lambda + \sigma + \tau\sqrt{l} + b} \qquad (\mu, \nu, \sigma, \tau \text{ nombres})$$

dont le sens est toujours, pour b choisi convenablement, déterminé (v. N° 103).

Littérature

[1] Bielecki, A., *Sur le module dans les espaces J. G.-Mikusiński*, Fund. Math. T. XXXVI (à paraître).

[2] — *Quelques conditions nécéssaires et suffisantes pour que l'espace de J. G.-Mikusiński soit topologique*, Fund. Math. T. XXXVI (à paraître).

[3] Churchill, R. A., *Modern Operational Mathematics in Engineering*, New York 1944.

[4] Crum, M. M., *On the resultant of two functions*, The Quart. Journ. Math., Oxford Series, Vol. 12, No 46 (1941), p. 108—111.

[5] Ditkin, V. A., *Calcul opératoirc* (en russe), Uspehi Mat. Nauk, II. 6 (22), Moscou 1947, p. 72—158.

[6] Doetsch, G., *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin 1937.

[7] Dufresnoy, J., *Sur le produit de composition de deux fonctions*, C. R. Paris 1947, p. 857—859.

[8] — *Autour du théorème de Phragmén-Lindelöf*, Bull. Sci. Math., Paris 1948.

[9] Heaviside O., *Electromagnetic Theory*, London 1899.

[10] Lusin N., *Intégrale et série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915.

[11] Mikusiński, J. G.-, *Les méthodes algébriques dans l'analyse fonctionnelle* (Note), C. R. Paris 1947.

[12] — *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle* (Première partie), Annales Univ. M. C.-Skłodowska Sectio A, II, 1, Lublin 1947.

[13] — *Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible*, Fund. Math. XXXVI, Warszawa 1948, p. 235—239.

[14] — *Sur quelques espaces abstraits*, Fund. Math. T. XXXVI (à paraître).

[15] — *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*, Ann. Soc. Pol. Math., T. XXI (à paraître).

[16] Ryll-Nardzewski, C., *Un théorème sur la convergence uniforme dans l'intérieur*, Colloquium Mathematicum I. 2, Wrocław 1948, p. 145—147.

[17] — *Une remarque sur la convergence faible*, Fund. Math. XXXVI, Warszawa 1948, p. 240—241.

[18] Saks, S., *Theory of the Integral*, Warszawa 1937.

[19] Schwartz, L., *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, Ann. Univ. Grenoble 21, 1945.

[20] — *Généralisation de la notion de fonction et de dérivation, Théorie des distributions*, Annales de Télécommunications, T. 3, No 4, Lille 1948.

[21] Titchmarsh, E. C., *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc., Vol. 25 (1926), p. 283—302.

[22] — *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford 1937.

[23] Widder, D. V., *The Laplace Transform*, Princeton 1946.

Table des matières

Streszczenie

Praca niniejsza stanowi ciąg dalszy pracy, która ukazała się pod tym samym tytułem *L'anneau algebrique et ses applications dans l'annalyse fonctionnelle* (Première partie) w tomie II Annales U. M. C. S.

W ustępach 47—50 wprowadzam do grupy abelowej następujące pojęcia: elementy nieujemne, nierówność i moduł.

Zbiór A^* *elementów nieujemnych* spełnia aksjomaty:

1* $0 \in A^*$;
2* Gdy $a \in A^*$ i $b \in A^*$, to $a + b \in A^*$;
3* Gdy $a \in A^*$ i $b - qa \in A^*$ dla każdego q naturalnego, to $a = 0$.

Piszemy nierówność $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy gdy $b - a \in A^*$.

Moduł jest operacją, która przyporządkowuje każdemu elementowi $a \in A$ pewien element $|a| \in A^*$ i która czyni zadość aksjomatom:

1° $|a| = a$ dla każdego $a \in A^*$;
2° Gdy $|a| = 0$, to $a = 0$;
3° $|-a| = |a|$;
4° $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

W ustępach 51—58 omawiam pojęcie *granicy mocnej*. Ciąg a^n $(n = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny mocno do granicy $a \in A$, gdy istnieje taki element $c \in A^*$, że dla każdego q naturalnego mamy $q|a_n - a| \leqslant c$ dla n dość dużego.

Pojęcia powyższe wprowadzam następnie do pierścienia algebraicznego (59—64), uzupełniając odpowiednio aksjomatykę. Z kolei definiuję pojęcie ciągłości, pochodnej i całki (65—74).

W ustępach 75—81 wprowadzam pojęcie *granicy słabej*. Pozwala ono dołączyć do rozważnego pierścienia algebraicznego nowe elementy, które nie były w nim zdefiniowane bezpośrednio. Wychodząc np. z pewnych pierścieni funkcyjnych, otrzymuje się dla każdej funkcji sumowalnej element, który można uważać za jej pochodną. W ten sposób każda funkcja sumowalna staje się różniczkowalna. Podobne zjawisko występuje w teorii dystrybucyj L. Schwartz'a, opartej na teorii funkcjonałów liniowych. Metoda, którą posługuję się w niniejszej pracy, podobna jest raczej do konstrukcji G. Cantora zastosowanej w jego teorii liczb niewymiernych.

Pojęcie zbieżności słabej pozwala na rozszerzenie poprzednio rozważanych pojęć przez wprowadzenie ciągłości słabej, pochodnej słabej i całki słabej (82—83).

W ustępach 84—86 badam najprostsze typy równań różniczkowych w rozważanej przestrzeni abstrakcyjnej.

W zastosowaniach (87—110) główną rolę gra pierścień C_T funkcyj ciągłych, w którym suma jest określona w sposób zwykły, zaś iloczyn przez całkę $\int\limits_0^t (t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau$. Wśród elementów uogólnionych, będących granicami ciągów słabo zbieżnych, otrzymuje się wtenczas wszystkie funkcje sumowalne, liczby zespolone oraz nowe twory matematyczne, realizujące symbole *rachunku Heaviside'a*.

W ostatnich ustępach (105—110) omawiam zastosowania do rozwiązywania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych (typu hyperbolicznego i parabolicznego).