

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA

VOL. II. Nr 1

SECTIO A

1947

Z Seminarium Matematycznego II Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Jan G.-Mikusiński

Jan G.-Mikusiński

**L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse
fonctionnelle**

(Première partie)

**Pierścień algebraiczny i jego zastosowania w analizie funkcyjnej
(Część pierwsza)**

Introduction. L'algèbre abstraite permet de considérer comme multiplication différentes opérations analytiques, p. e.

$$\int_0^t a(t-\tau)b(\tau) d\tau, \quad \int_0^1 a(x,s)b(s,y) ds.$$

Chacune de ces expressions peut être envisagée comme le produit ab de deux éléments a, b et ce n'est que l'interprétation de ces éléments et de la règle de la multiplication qui sont différentes dans les deux cas. Ce point de vue permet de ramener certains problèmes d'analyse à ceux d'algèbre; c'est ainsi p. e. que les deux équations intégrales

$$u(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad u(x,y) = f(x,y) + \int_0^1 k(x,s)u(s,y) ds$$

se ramènent à une même équation algébrique

$$u = f + ku.$$

De plus, cette équation est susceptible d'une infinité d'autres interprétations.

La solution formelle $u = \frac{1}{1-k}f$ de cette équation n'a, tout d'abord, qu'un sens purement symbolique. Or, cette expression peut gagner un sens tout à fait précis, dès que l'on traite ses symboles comme des éléments d'un *anneau algébrique*.

Nous montrons dans ce travail que beaucoup de problèmes concernant les équations différentielles et intégrales trouvent leur interprétation dans la théorie de l'anneau algébrique. Certaines difficultés qui se présentent dans cette interprétation peuvent être levées par

1^o l'introduction supplémentaire de l'élément unité dans les anneaux qui en sont dépourvus;

2^o l'introduction d'une topologie convenable (en particulier, d'une notion de convergence).

Notre travail se divisera donc en deux parties: dans la première, nous nous bornons à des problèmes dans lesquels on peut se passer de la notion de convergence. Nous montrons, en particulier, que les idées du calcul de Heaviside trouvent leur justification complète dans la théorie des anneaux algébriques. La méthode exposée permet d'embrasser le cas général de la résolution des équations différentielles à coefficients constants et elle n'introduit pas de restrictions imposées p. e. par la méthode de la transformation de Laplace. Nous comparons, dans le N^o 42, la portée de ces deux méthodes. Nous donnons aussi les démonstrations très simples de quelques théorèmes de la théorie des équations intégrales de Fredholm.

Dans la seconde partie, qui se trouve en préparation, nous introduirons la notion de limite; c'est ce qui permettra d'enrichir le champ des applications de notre théorie. En particulier, nous donnerons une méthode de la résolution des équations aux dérivées partielles des types les plus importants.

Nous nous sommes proposés d'exposer systématiquement la théorie de l'anneau linéaire, en introduisant progressivement les notions de l'algèbre et en tâchant de donner beaucoup d'exemples. Nous espérons de rendre ainsi l'exposé plus accessible aux lecteurs non familiers avec les notions de l'algèbre abstraite. Cependant, on trouvera dans la suite certaines démonstrations qui sont moins élémentaires et qui exigent, p. e., la connaissance des éléments de la théorie des fonctions de variables réelles. Le lecteur qui est empressé de saisir des applications pratiques pourra négliger ces démonstrations; cela ne l'empêchera pas de comprendre la suite.

En terminant, qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à M. A. Turowicz, qui m'a conseillé de traiter axiomatiquement la théorie, et à M. M. Biernacki, dont l'extrême bienveillance m'a été d'un grand secours pendant la rédaction du présent travail. C'est aussi avec un grand plaisir que je remercie M. Cz. Ryll-Nardzewski, qui m'a aidé à éclaircir quelques points particuliers de la théorie, et M^{lle} H. Pidek pour son concours à la rédaction des N^{os} 38, 39 et 46.

Chapitre I

Addition

1. Notion de groupe abélien additif. Parmi les propriétés caractérisant l'*addition* des nombres, nous distinguerons les deux suivantes:

$$I. (a + b) + c = a + (c + b);$$

II. Il existe une solution (au moins) de l'équation $a + x = b$.

L'égalité I est juste pour tous les triples de nombres arbitraires a, b, c . D'après la propriété II, il est toujours possible, pour chaque couple de nombres a, b , de trouver un troisième nombre x tel que l'équation $a + x = b$ soit satisfaite.

La notion d'*addition*, qui ne se rapportait tout d'abord qu'à des nombres (réels ou complexes), a subi, au cours du développement des mathématiques, des interprétations bien différentes. On parle p. e. de l'addition de vecteurs, cette opération étant définie d'une manière géométrique tout à fait différente de l'addition arithmétique de nombres. La dénomination „addition” peut être justifiée, dans le cas des vecteurs, par le fait que cette opération obéit aux mêmes lois I et II.

Il est intéressant de chercher d'autres relations qui peuvent être déduites des propriétés I et II. Ces relations seront sûrement justes dans le cas des nombres ou des vecteurs et, plus généralement, dans celui des ensembles d'éléments quelconques pour lesquels l'addition est définie d'une manière tout à fait arbitraire, pourvu que les postulats I et II soient vérifiés.

On est ainsi amené à la définition abstraite de l'addition que nous allons préciser ci-dessous.

Soit A un ensemble quelconque d'éléments a, b, c, \dots, x, \dots . On fait correspondre à chaque couple a, b d'éléments de A un troisième élément $a + b$ qui appartient au même ensemble A ; cet élément est dit *somme* de a et b . La manière dont on établit cette correspondance ne joue aucun rôle, on demande seulement que les postulats I et II soient satisfaits.

On dira alors que l'ensemble A constitue un *groupe abélien* par rapport à cette addition ou, tout court, un *groupe abélien additif*.

Exemples 1. Les ensembles suivants constituent des groupes abéliens:

(a) L'ensemble de tous les nombres entiers, l'addition étant définie comme d'habitude;

(b) L'ensemble de tous les nombres rationnels, zéro étant exclus si l'„addition” est définie comme multiplication au sens ordinaire;

(c) Les nombres $1, -1, i, -i$ ($i^2 = -1$), si l'„addition” est définie comme multiplication au sens ordinaire;

(d) L'ensemble des transformations euclidiennes:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

où l'„addition” est définie comme superposition de deux transformations;

(e) L'ensemble de toutes les fonctions continues, définies dans un intervalle commun, l'addition étant définie comme d'habitude;

(f) L'ensemble de tous les systèmes de n nombres

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

où l'addition est définie comme suit:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

2. Propriétés fondamentales du groupe abélien. Nous établirons maintenant d'autres propriétés du groupe abélien. Ces propriétés sont des conséquences des axiomes I et II et ne dépendent pas de la nature des éléments considérés. Cette méthode, propre à l'algèbre abstraite, est d'une grande portée, les théorèmes déduits étant susceptibles d'une infinité d'interprétations.

Théorème 2.1 (la commutativité). *On a*

$$(2.1) \quad a + b = b + a$$

pour tout couple $a, b \in A$.

Démonstration. On a d'après l'axiome I

$$(a + x) + a = a + (a + x)$$

pour tout couple $a, x \in A$; or on peut choisir, d'après II, un tel x que $a + x = b$, ce qui donne $b + a = a + b$, c'est-à-dire (2.1).

Théorème 2.2 (l'associativité). *On a*

$$(2.2) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

pour tout triple $a, b, c \in A$.

Démonstration. En vertu du théorème 2.1, on peut remplacer dans I $c + b$ par $b + c$.

Le théorème 2.2 permet de négliger les parenthèses et d'écrire simplement $a + b + c$ et, plus généralement, $a_1 + \dots + a_n$.

Théorème 2.3 (l'existence d'élément nul). *Il existe (au moins) un élément $0 \in A$, tel que*

$$(2.3) \quad b + 0 = 0 + b = b$$

pour tout $b \in A$.

Démonstration. D'après II, il existe, pour tout a donné, un élément 0 tel que $a + 0 = a$. Cela posé, nous montrerons que l'on a toujours $b + 0 = b$ pour $b \in A$. En effet, posons $a + x = b$, ce qui est possible d'après II; alors:

$$\begin{aligned} b + 0 &= (a + x) + 0 \\ &= a + (0 + x) \quad (\text{d'après I}) \\ &= (a + 0) + x \quad (\text{d'après le théorème 2.2}) \\ &= b. \end{aligned}$$

En vertu du théorème 2.1, on a encore $b + 0 = 0 + b$.

Théorème 2.4 (l'existence d'élément opposé). *L'élément $a \in A$ étant donné arbitrairement, il existe (au moins) un élément $(-a) \in A$ tel que*

$$(2.4) \quad (-a) + a = a + (-a) = 0.$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe de l'axiome II et du théorème 2.1.

Exemples 2. Les éléments nuls, relatifs aux interprétations données dans les exemples 1 sont: (a) 0; (b) 1; (c) 1; (d) $x' = x$, $y' = y$; (e) $f(t) = 0$; (f) $(0, 0, \dots, 0)$.

L'élément opposé pour la transformation (d) est

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

3. Remarque. Dans la plupart des traités consacrés à la théorie des groupes, ce sont justement les théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 qui sont employés pour définir le groupe abélien et qui y jouent donc le rôle des axiomes. Il n'est pas difficile d'établir l'équivalence de cette définition avec la nôtre. Dans ce travail, nous tâchons de réduire autant que possible le nombre des axiomes, car c'est avantageux pour les applications. En effet, avant d'appliquer la théorie générale à quelque interprétation particulière, il y a lieu de vérifier si les axiomes de cette théorie sont satisfaits, il y a donc intérêt de réduire le nombre de ces axiomes au minimum¹⁾.

Le lecteur vérifiera sans peine que les propriétés I et II sont des conséquences des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 lorsque ces derniers sont admis comme axiomes.

4. Autres propriétés du groupe abélien. Signalons encore les propriétés suivantes du groupe abélien:

Théorème 4.1. *L'élément nul est unique.*

Démonstration. Supposons qu'il y ait deux éléments nuls: 0_1 et 0_2 . Comme 0_1 est nul, on a $0_1 + 0_2 = 0_2$; comme 0_2 est nul, on a $0_1 + 0_2 = 0_1$; donc $0_1 = 0_2$.

¹⁾ L'introduction de l'axiome I est due à A. Tarski.

Théorème 4.2. Si $a + b = a + c$, alors $b = c$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(-a) + (a + b) &= (-a) + (a + c), \\ [(-a) + a] + b &= [(-a) + a] + c, \\ b &= c.\end{aligned}$$

Théorème 4.3. La solution de l'équation $a + x = b$ est unique pour chaque couple $a, b \in A$.

Démonstration. Si $a + x_1 = b$ et $a + x_2 = b$, on a

$$\begin{aligned}a + x_1 &= a + x_2, \\ x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Corollaire. L'élément opposé (à un élément donné) est unique.

En effet, l'élément opposé est défini comme la solution de l'équation $a + x = 0$.

5. Soustraction. Pour rendre les calculs plus commodes, on introduit le symbole

$$b - a = b + (-a).$$

L'élément $b - a$ satisfait évidemment à l'équation $a + x = b$, il peut donc être défini comme la solution de cette équation (théorème 4.3).

On démontre sans peine les formules usuelles de la soustraction:

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \quad a - (b - c) = (a - b) + c, \quad \text{etc.}$$

6. Groupes complexes. Soient A_1, \dots, A_n n groupes (abéliens) quelconques. Les nombres des éléments et les définitions de l'addition ne sont soumises à aucune restriction et peuvent être différentes dans chaque groupe, pourvu que les axiomes I et II soient partout satisfaits. On forme un nouveau ensemble A de tous les systèmes de n éléments

$$(a_1, \dots, a_n)$$

où l'élément a_i ($i = 1, \dots, n$) appartient à l'ensemble A_i .

Deux systèmes (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) seront considérés comme égaux, si $a_i = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et seulement dans ce cas.

On définit dans A l'addition par l'égalité

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

On voit facilement que l'ensemble A constitue un nouveau groupe abélien. En effet, l'axiome I est ici satisfait, car on a

$$\begin{aligned}[(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)] + (c_1, \dots, c_n) &= \\ = [(a_1 + b_1) + c_1, \dots, (a_n + b_n) + c_n];\end{aligned}$$

on a ensuite, en tenant compte de ce que l'axiome I est rempli pour chacun des groupes A_i :

$$\begin{aligned} &= [a_1 + (c_1 + b_1), \dots, a_n + (c_n + b_n)] \\ &= (a_1, \dots, a_n) + [(c_1, \dots, c_n) + (b_1, \dots, b_n)]. \end{aligned}$$

Pareillement, l'axiome II est satisfait, car en cherchant une solution de l'équation

$$(a_1, \dots, a_n) + (x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_n),$$

on a à résoudre les n équations

$$a_i + x_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

ce qui est toujours possible, car les A_i sont des groupes abéliens.

L'ensemble A sera dit un groupe (abélien) *complexe*.

Exemple 6. En supposant que $n=2$, soient A_1 l'ensemble des nombres réels et A_2 celui des fonctions réelles $f(t)$, l'addition des éléments étant entendue au sens ordinaire. On a alors p. e.

$$(6.1) \quad (1, \sin^2 t) + (-1, \cos^2 t) = (0, 1).$$

Il est à remarquer que le „1” dans le second membre doit être considéré comme une fonction (constante) de la variable t et non pas comme un nombre au sens propre, car cet élément appartient au groupe A_2 .

Il peut, tout d'abord, sembler inutile d'associer des éléments aussi différents qu'un nombre et une fonction, et de les traiter ensemble comme des éléments d'un seul groupe (complexe). Or, nous verrons plus tard que cette association fournit un instrument puissant qui permet de simplifier beaucoup de problèmes d'analyse.

7. Autre notation. Tout élément

$$(a_1, \dots, a_n)$$

de A peut être écrit sous la forme de la somme suivante:

$$(a_1, 0_2, \dots, 0_n) + (0_1, a_2, \dots, 0_n) + \dots + (0_1, 0_2, \dots, a_n),$$

où les $0_1, 0_2, \dots, 0_n$ désignent les éléments nuls des groupes correspondants. Si tous ces groupes sont formés d'éléments différents, on peut introduire des abréviations:

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_1, 0_2, \dots, 0_n), \\ a_2 &= (0_1, a_2, \dots, 0_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n &= (0_1, 0_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Cela posé, on peut écrire

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

ce qui est beaucoup plus commode dans des calculs pratiques.

Il y a quelque ambiguïté dans cette manière d'écrire, car le symbole a_i peut désigner aussi bien un élément de A que celui de A_i . Mais cette ambiguïté ne sera pas source de confusion, car l'addition des éléments appartenant aux différents groupes n'étant guère définie, la somme

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

doit être nécessairement considérée comme somme d'éléments de A .

Une difficulté se présente lorsqu'on veut mettre sous la forme d'une somme p. e. le second membre de (6.1). On ne peut pas écrire, dans ce cas, sans ambiguïté $(0,1) = 0 + 1$. Cette difficulté peut être levée par l'introduction du symbole $\{1\}$:

$$(0,1) = 0 + \{1\},$$

qui signifiera qu'il s'agit ici d'une *fonction*. Pareillement, on écrira dans le cas des nombres complexes $(0,1) = 0 + i$. Ces deux exemples montrent que, dans les cas où certains éléments des groupes A_1, \dots, A_n sont représentés par les mêmes symboles, il faut prendre des précautions.

Chapitre II

Multiplication

8. Anneau algébrique. Nous conservons constamment l'hypothèse que l'ensemble considéré A constitue un groupe abélien (additif), c'est-à-dire qu'une addition y est définie satisfaisant aux axiomes I et II. Nous introduisons, en plus, une nouvelle opération, en faisant correspondre à tout couple d'éléments a, b un troisième élément, désigné par ab ou $a \cdot b$, appartenant au même ensemble A . Cette opération s'appellera *multiplication* (et l'élément ab sera dit le *produit* de a et b), lorsqu'elle satisfait aux trois conditions suivantes:

$$\text{III. } (ab)c = a(bc),$$

$$\text{IV. } a(b+c) = ab+ac,$$

$$\text{V. } (b+c)a = ba+ca.$$

Les deux opérations (addition et multiplication) étant définies, on dit que l'ensemble A constitue un *anneau algébrique*.

Exemples 8. Les ensembles formés

de tous les nombres	(a) entiers, (b) pairs, (c) rationnels, (d) réels, (e) complexes;
---------------------	---

de toutes les fonctions $\left\{ \begin{array}{l} \text{(f) réelles définies dans un intervalle commun,} \\ \text{(g) complexes définies dans un domaine commun,} \end{array} \right.$

forment des anneaux algébriques, lorsque l'addition et la multiplication y sont définies au sens habituel.

9. Diverses interprétations du produit. En général, la „multiplication” est définie d'une manière abstraite; il n'est donc pas nécessaire qu'elle soit toujours entendue au sens ordinaire. Lorsque les éléments qu'on „multiplie” sont des fonctions, les trois interprétations suivantes du produit jouent, dans l'analyse, un rôle important:

$$\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau \quad (\text{composition des fonctions d'une variable})^2),$$

$$\int_0^1 a(x,s)b(s,y)ds \quad (\text{composition de Volterra de I espèce),}$$

$$\int_y^x a(x,s)b(s,y)ds \quad (\text{composition de Volterra de II espèce).}$$

Nous allons étudier successivement ces trois genres du produit.

10. Propriétés fondamentales de la composition des fonctions d'une variable. On a les théorèmes suivants:

Théorème 10.1. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont définies presque partout et sommables dans l'intervalle $0 \leq t < T$, il en est de même de leur composition*

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau.$$

Démonstration. Supposons d'abord que les deux fonctions $a(t)$, $b(t)$ soient non négatives. On a alors

$$\int_0^u dt \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau = \int_0^u b(\tau)d\tau \int_\tau^u a(t-\tau)dt$$

pour tout u fixé arbitrairement dans l'intervalle $0 < u < T$. Or, la seconde de ces intégrales a une valeur finie, car l'intégrale

$$\int_\tau^u a(t-\tau)dt = \int_0^{u-\tau} a(t)dt$$

est une fonction continue de τ dans l'intervalle $0 \leq \tau \leq u$. Il s'en suit que la fonction $\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$ est définie presque partout et sommable dans l'intervalle $0 \leq t \leq u$. Cette propriété se prolonge sur l'intervalle $0 \leq t < T$ entier, car u a été choisi arbitrairement.

²⁾ Ce genre de composition est dit parfois „produit de composition”, en anglais „convolution” ou „resultant”, en allemand „Faltung” ou „Produkt-Integral”.

Pour démontrer le théorème dans le cas général, il suffit de poser $a = a_1 - a_2$ et $b = b_1 - b_2$, où $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$, ce qui ramène la démonstration au cas précédent.

Théorème 10.2. *Lorsque les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont définies presque partout et sommables dans un intervalle $0 \leq t < T$ et que, en plus, elles sont bornées dans tout intervalle $0 < t_1 \leq t \leq t_2 < T$, alors la composition*

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$$

est une fonction continue dans l'intervalle $0 < t < T$.

Démonstration³⁾. Il suffit évidemment de montrer que la différence $c(t+\Theta) - c(t)$ est aussi petite que l'on veut, pourvu que Θ soit suffisamment petit. Supposons d'abord que $\Theta > 0$ et choisissons ε_1 et ε_2 de manière à avoir $0 < \varepsilon_1 < t - \varepsilon_2 < t$. On a

$$\begin{aligned} c(t+\Theta) - c(t) &= \int_0^{t+\Theta} [a(t+\Theta-\tau) - a(t-\tau)]b(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{\varepsilon_1}^{t-\varepsilon_2} [a(t+\Theta-\tau) - a(t-\tau)]a(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t-\varepsilon_2}^t [a(t+\Theta-\tau) - a(t-\tau)]b(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_t^{t+\Theta} a(t+\Theta-\tau)b(\tau)d\tau = K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \end{aligned}$$

On voit sans peine que les intégrales K_1, K_2 et K_4 sont arbitrairement petites, pourvu que l'on choisisse ε_1 et ε_2 suffisamment petits, mais fixes, et que $\Theta < \varepsilon_2$. Or, la fonction $b(\tau)$ est bornée dans l'intervalle $[\varepsilon_1, t - \varepsilon_2]$; on a donc $|b(\tau)| < M$ et

$$|K_2| \leq M \int_{\varepsilon_1}^{t-\varepsilon_2} |a(t+\Theta-\tau) - a(t-\tau)|d\tau = M \int_{\varepsilon_2}^{t-\varepsilon_1} |a(u+\Theta) - a(u)|du,$$

où la dernière intégrale s'annule pour $\Theta \rightarrow 0$, ce que nous démontrons au N° suivant.

La démonstration est analogue dans le cas $\Theta < 0$.

Remarque 10. L'exemple suivant montre que le mot „bornées” ne peut pas être supprimé dans le théorème 10.2.

Soit $a(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $b(t) = \frac{1}{\sqrt{|1-t|}}$; les deux fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont

sommables pour $t \geq 0$; leur composition $c(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)|1-\tau|}}$ est une fonction discontinue au point $t=1$.

³⁾ La démonstration qui suit est empruntée à G. Doetsch [2], p. 159.

Théorème 10.3. *Si les fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont définies presque partout et sommables dans l'intervalle $0 \leq t < T$, alors les deux fonctions:*

$$(10.1) \quad F(t) = \int_0^t f(t-\tau)c(\tau)d\tau, \quad G(t) = \int_0^t a(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

où $f(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$ et $g(t) = \int_0^t b(t-\tau)c(\tau)d\tau$, sont définies presque partout, sommables dans l'intervalle $0 \leq t < T$ et identiques l'une à l'autre (c'est-à-dire que l'une des intégrales (10.1) ayant une valeur déterminée pour quelque valeur de t ($0 \leq t < T$), il en est de même de l'autre et les deux valeurs sont égales).

Démonstration. La première partie de la proposition, à savoir l'existence et la sommabilité de $F(t)$ et de $G(t)$, est une conséquence immédiate du théorème 10.1.

Les fonctions $F(t)$ et $G(t)$ peuvent s'écrire sous la forme

$$(10.3) \quad F(t) = \int_0^t a(t-\tau) \left[\int_0^\tau b(\tau-\sigma)c(\sigma)d\sigma \right] d\tau,$$

$$G(t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-\sigma} a(t-\sigma-\omega)b(\omega)d\omega \right] c(\sigma)d\sigma.$$

En posant dans la dernière intégrale $\omega = \tau - \sigma$, elle devient

$$(10.4) \quad G(t) = \int_0^t \left[\int_\sigma^t a(t-\tau)b(\tau-\sigma)d\tau \right] c(\sigma)d\sigma.$$

Lorsque les fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont non négatives, l'existence de l'une des intégrales (10.3), (10.4) entraîne celle de l'autre, ainsi que l'égalité des deux intégrales. Le cas où les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sont arbitraires se ramène au précédent de la même manière que dans la démonstration du théorème 10.1.

Théorème 10.4. *Si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont définies presque partout et sommables dans l'intervalle $0 \leq t < T$, alors les fonctions*

$$F(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau, \quad G(t) = \int_0^t b(t-\tau)a(\tau)d\tau \quad (0 \leq t < T)$$

sont identiques (voir théorème 10.3).

Démonstration. En posant $t - \tau = \sigma$, la seconde intégrale se ramène à la première.

11. Démonstration de la formule $\lim_{\Theta \rightarrow 0} \int_I |a(u + \Theta) - a(u)| du = 0.$

Nous nous sommes appuyés dans la démonstration du théorème 10.1 sur le lemme suivant que nous allons démontrer maintenant:

Lemme ¹⁾. Si la fonction $a(u)$ est sommable dans un intervalle ouvert J , on a

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_I |a(u+\theta) - a(u)| du = 0$$

pour tout intervalle fermé $I \subset J$.

Démonstration. Soit ε un nombre positif arbitraire. Comme l'intégrale $\int_Q a(u) du$ est une fonction absolument continue de l'ensemble Q , il existe un nombre $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, tel que l'inégalité $|Q| < \eta$ entraîne $\int_Q |a(u)| du < \varepsilon$. D'après un théorème dû à N. Lusin, on peut déterminer un ensemble fermé $F \subset J$ tel que la fonction $a(u)$ soit continue (uniformément) sur F et que $|J-F| < \frac{\eta}{2}$. On peut trouver ensuite un nombre $\delta > 0$ tel que les relations

$$u, \quad (u+\theta) \in F, \quad |\theta| < \delta$$

entraînent $|a(u+\theta) - a(u)| < \varepsilon$.

Fixons arbitrairement θ ($|\theta| < \delta$) et désignons par Q_θ l'ensemble de tous les points u de l'intervalle I tels que $u \in (J-F)$ ou bien $(u+\theta) \in (J-F)$. On a évidemment $|Q_\theta| < \eta$. Soit, enfin, P_θ l'ensemble des points de l'intervalle I qui n'appartiennent pas à Q_θ . On voit aisément que $u \in P_\theta$ entraîne $(u+\theta) \in F$.

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \int_I |a(u+\theta) - a(u)| du &\leq \int_{Q_\theta} |a(u+\theta) - a(u)| du + \int_{Q_\theta} |a(u+\theta)| du + \int_{Q_\theta} |a(u)| du \\ &\leq \varepsilon \cdot |P_\theta| + \varepsilon + \varepsilon \leq \varepsilon(|I| + 2). \end{aligned}$$

12. L'anneau I_T . Pour éviter l'ambiguïté qui pourrait être fâcheuse dans la suite, convenons désormais de désigner les fonctions d'une façon générale par a, b, \dots ou par $\{a(t)\}, \{b(t)\}, \dots$, et de réserver les symboles $a(t), b(t), \dots$ pour désigner les valeurs de ces fonctions au point t .

Désignons par I_T l'ensemble de toutes les fonctions complexes d'une variable réelle t , définies presque partout et sommables dans l'intervalle $0 \leq t < T$. On dira que deux éléments a, b de I_T sont égaux, et on écrira $a = b$, lorsque en tout point de l'intervalle $0 \leq t < T$ où l'une quelconque des fonctions $a = \{a(t)\}$, $b = \{b(t)\}$ a une valeur déterminée (finie), il en est de même de l'autre et les deux valeurs sont égales ²⁾.

¹⁾ Ce lemme et la démonstration qui suit sont valables dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

²⁾ Dans la théorie des fonctions réelles, on dit souvent que deux fonctions a, b sont „égales“ lorsque leurs valeurs ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. Ce point de vue sera discuté plus précisément dans le N° 17.

On définit dans I_T l'addition et la multiplication (N° 8) par les formules suivantes (où $a, b \in I_T$):

$$a + b = \{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\},$$

$$ab = \{a(t)\} \cdot \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau \right\}.$$

Cela posé, on montre que I_T constitue un anneau algébrique par rapport à ces deux opérations. En effet, l'ensemble I_T est un groupe abélien par rapport à l'addition, il reste donc à vérifier que le „produit“ ab appartient encore à l'ensemble I_T et que les axiomes III, IV et V sont satisfaits. Or, les théorèmes du N° 10 sont évidemment valables pour les fonctions complexes; on a donc, d'après le théorème 10.1, $ab \in I_T$. En vertu du théorème 10.3, on a $(ab)c = a(bc)$ (l'axiome III). Les axiomes IV et V sont aussi satisfaits car on a

$$\int_0^t a(t-\tau)[b(\tau) + c(\tau)]d\tau = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t a(t-\tau)c(\tau)d\tau,$$

$$\int_0^t [b(t-\tau) + c(t-\tau)]a(\tau)d\tau = \int_0^t b(t-\tau)a(\tau)d\tau + \int_0^t c(t-\tau)a(\tau)d\tau.$$

13. Les sous-anneaux de I_T . Considérons l'ensemble $I_T(i)$ de toutes les fonctions réelles qui appartiennent à I_T . En conservant la même définition de l'addition et de la multiplication, l'ensemble $I_T(i)$ constitue évidemment encore un anneau algébrique. Nous dirons d'une façon générale qu'un ensemble est un *sous-anneau* de I_T lorsqu'il est

- 1° un sous-ensemble de I_T ,
- 2° un anneau algébrique (par rapport à l'addition et à la multiplication adoptées dans I_T).

$I_T(i)$ est un sous-anneau de I_T . Pour s'assurer qu'un sous-ensemble $I_T(n)$ de I_T est un sous-anneau de I_T , il suffit de vérifier que l'addition et la multiplication des éléments de $I_T(n)$ donnent toujours des éléments de $I_T(n)$, ce qu'on exprime souvent en disant que l'addition et la multiplication sont *intérieures* dans $I_T(n)$.

Pratiquement, on définira un sous-ensemble de I_T , en demandant que les fonctions envisagées possèdent quelque propriété accessoire. Dans l'exemple précédent, on demandait que les fonctions soient réelles.

Nous donnons ci-dessous différentes propriétés dont chacune détermine un sous-ensemble de I_T : on demandera, par exemple, que chacune des fonctions envisagées soit

- (i) réelle;
- (ii) déterminée (et finie) partout dans l'intervalle ouvert $0 < t < T$ et bornée dans tout intervalle partiel fermé $t_1 \leq t \leq t_2$;

(iii) déterminée (et finie) partout dans l'intervalle $0 \leq t < T$ et bornée dans tout intervalle partiel $0 \leq t \leq t_1$;

(iv) intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle partiel $t_1 \leq t \leq t_2$ de l'intervalle $0 < t < T$;

(v) continue dans l'intervalle $0 < t < T$;

(vi) continue dans l'intervalle;

(vii) continue pour $0 \leq t < T$ et nulle pour $t = 0$;

(viii) analytique;

(ix) un polynôme;

ou, enfin, on supposera que

(x) $T = +\infty$ et, pour toute fonction f , il existe un nombre (réel) s pour lequel l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt < \infty$ est convergente⁶⁾; etc.

Désignons respectivement par $I_T(i), \dots, I_T(x)$ les sous-ensembles de I_T dont les éléments satisfont à la condition (i), ..., (x). Le lecteur vérifiera que les ensembles $I_T(i), \dots, I_T(x)$ constituent des sous-groupes de I_T ; il suffit à ce but de vérifier que si deux fonctions possèdent l'une quelconque des propriétés précédentes, leur somme et leur produit de composition possèdent la même propriété. Afin de le démontrer pour (ii)-(vii), on peut se servir du théorème 10.2.

Remarque 13. Il est clair que la propriété accessoire qui définit un sous-ensemble de I_T ne peut pas être tout à fait arbitraire. Par exemple, la condition que les fonctions soient constantes n'est évidemment pas satisfaite par leur produit de composition (à moins que l'une des fonctions soit nulle).

Désignons enfin, d'une façon générale, par $I_T(p, q, \dots)$ le sous-ensemble de I_T dont les éléments possèdent simultanément les propriétés (p), (q), ...; l'ensemble $I_T(p, q, \dots)$ est l'intersection de $I_T(p), I_T(q), \dots$. On voit aisément que si $I_T(p), I_T(q), \dots$ sont des *sous-anneaux* de I_T , il en est de même de $I_T(p, q, \dots)$.

14. L'anneau F . Nous désignerons par F l'ensemble de toutes les fonctions complexes $f = \{f(x, y)\}$ de deux variables réelles, ces fonctions étant assujetties aux conditions suivantes:

1^o f est définie presque partout dans le carré $K = [0, 1; 0, 1]$;

2^o f est mesurable superficiellement dans K ;

3^o il existe pour tout $f \in F$ un couple de nombres positifs m et k tel que $|f(x, y)| < m|x - y|^{k-1}$ dans K en tout point où la valeur de $f(x, y)$ est déterminée.

⁶⁾ La condition (x) joue un rôle essentiel dans la théorie de la transformation de Laplace (voir N^{os} 41 et 42).

Ces conditions entraînent la sommabilité de la fonction f dans K , puisque l'intégrale $\iint_K m|x-y|^{k-1} dx dy$ a évidemment une valeur finie.

On dira que deux éléments a, b de F sont *égaux* ($a=b$) lorsque en tout point du carré K où l'une quelconque des fonctions $a=a(x, y)$, $b=b(x, y)$ a une valeur déterminée (finie), l'autre a aussi une valeur déterminée et les deux valeurs sont égales (voir N° 12).

On définit la *somme* et le *produit* de deux fonctions $a, b \in F$ par les égalités suivantes:

$$a + b = \{a(x, y)\} + \{b(x, y)\} = \{a(x, y) + b(x, y)\},$$

$$ab = \{a(x, y)\} \cdot \{b(x, y)\} = \left\{ \int_0^1 a(x, s)b(s, y) ds \right\}.$$

On voit tout de suite que la somme $a+b$ est toujours une fonction de F . Nous démontrerons encore qu'il en est de même du produit ab .

En effet, le produit (au sens habituel) $a(x, s)b(s, y)$ est mesurable par rapport à s pour tout couple $x, y \in K$ sauf pour un ensemble de mesure nulle au plus. On a ensuite $|a(x, s)b(s, y)| < m_1 m_2 |x-s|^{k_1-1} \cdot |s-y|^{k_2-1}$ où $k = \min(1, k_1, k_2)$ pour tout triple de valeurs x, y, s de K tel que le produit $a(x, s)b(s, y)$ est déterminé. Or, l'intégrale $\int_0^1 |x-s|^{k-1} |s-y|^{k-1} ds$

est finie pour tout $x \neq y$. Il s'en suit que l'intégrale $\int_0^1 a(x, s)b(s, y) ds$ est finie presque partout dans K . De plus, l'inégalité

$$\left| \int_0^1 a(x, s)b(s, y) ds \right| < m_1 m_2 \cdot \int_0^1 |x-s|^{k-1} \cdot |s-y|^{k-1} ds$$

a lieu pour tout couple $x, y \in K$ où l'intégrale du premier membre est déterminée. Lorsque $0 < y < x < 1$, l'intégrale du second membre est égale à la somme des trois autres:

$$\int_0^y (x-s)^{k-1} (y-s)^{k-1} ds + \int_y^x (x-s)^{k-1} (s-y)^{k-1} ds + \int_x^1 (s-x)^{k-1} (s-y)^{k-1} ds$$

et cette somme est inférieure (par substitution $t = \frac{s-y}{x-y}$ dans la seconde intégrale) à

$$\begin{aligned} & \int_0^y (x-y)^{k-1} (y-s)^{k-1} ds + (x-y)^{2k-1} \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{k-1} dt + \\ & \quad + \int_x^1 (s-x)^{k-1} (x-y)^{k-1} ds = \\ & = \frac{1}{k} (x-y)^{k-1} y^k + (x-y)^{2k-1} B(k, k) + \frac{1}{k} (1-x)^k (x-y)^{k-1} < \\ & < (x-y)^{k-1} \left(\frac{1}{k} + B(k, k) + \frac{1}{k} \right), \end{aligned}$$

où $B(k, k)$ est la fonction „beta” d'Euler.

Par raison de symétrie, on a

$$\left| \int_0^1 a(x, s)b(s, y)ds \right| < \left[\frac{2}{k} + B(k, k) \right] m_1 m_2 |x - y|^{k-1}$$

partout dans K où la valeur de l'intégrale est déterminée. Ceci prouve que le produit ab satisfait à la condition 3°.

Nous allons démontrer que l'anneau F est un anneau algébrique. En effet, les axiomes I et II sont évidemment réalisés, l'addition étant définie comme d'habitude. Il suffit donc de montrer que les axiomes III-V le sont aussi.

Ad III. On a

$$(ab)c = \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 a(x, s)b(s, t)ds \right] c(t, y)dt \right\},$$

$$a(bc) = \left\{ \int_0^1 a(x, s) \left[\int_0^1 b(s, t)c(t, y)dt \right] ds \right\}.$$

Si les fonctions a, b, c sont non négatives, l'existence de l'une de ces intégrales entraîne celle de l'autre et l'égalité des deux. Le cas général se démontre en posant $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$, $c = c_1 - c_2$ où les fonctions $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sont non négatives.

Ad IV et V. On a

$$\int_0^1 a(x, s)[b(s, y) + c(s, y)]ds = \int_0^1 a(x, s)b(s, y)ds + \int_0^1 a(x, s)c(s, y)ds,$$

$$\int_0^1 [b(x, s) + c(x, s)]a(s, y)ds = \int_0^1 b(x, s)a(s, y)ds + \int_0^1 c(x, s)a(s, y)ds.$$

15. L'anneau V_{AB} . Soient A et B deux nombres réels (finis ou infinis), tels que $A < B$. Nous désignerons par V_{AB} l'ensemble de toutes les fonctions complexes $f = \{f(x, y)\}$ de deux variables réelles et qui satisfont aux conditions suivantes:

1° f est définie presque partout dans le triangle T_{AB} :

$$A < y < x < B;$$

2° f est mesurable superficiellement dans T_{AB} ;

3° à toute fonction f et à tout couple de nombres α, β (où $A < \alpha < \beta < B$) on peut faire correspondre deux nombres positifs m et k tels que $|f(x, y)| < m|x - y|^{k-1}$ en tout point x, y du triangle $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha \leq y < x \leq \beta$) où la fonction f a une valeur déterminée.

L'égalité de deux éléments de V_{AB} étant définie d'une manière analogue qu'au N° 12, on définit la *somme* et le *produit* comme suit:

$$a + b = \{a(x, y)\} + \{b(x, y)\} = \{a(x, y) + b(x, y)\},$$

$$ab = \{a(x, y)\} \cdot \{b(x, y)\} = \left\{ \int_y^x a(x, s)b(s, y)ds \right\}.$$

Nous laissons au lecteur de démontrer que l'ensemble V_{AB} constitue un anneau algébrique; cette démonstration n'est d'ailleurs qu'une modification des démonstrations précédentes.

16. Les sous-anneaux de F et de V_{AB} . En imposant une propriété accessoire quelconque aux fonctions de F , on obtient un sous-ensemble de F . Pour que ce sous-ensemble constitue un anneau algébrique, il suffit que l'addition et la multiplication y soient *intérieures* (voir N° 13). Ainsi, on peut considérer p. e. un sous-anneau des fonctions *réelles*, des fonctions *continues*, des *polynômes* etc.

Le même procédé peut être appliqué évidemment à l'anneau V_{AB} .

17. Les anneaux \check{I}_T , \check{F} et \check{V}_{AB} . En supposant que $a \in I_T$, désignons par \check{a} la classe de toutes les fonctions de I_T qui ne diffèrent de a que sur un ensemble de mesure nulle. Le sens du symbole \check{b} étant analogue, on écrira $\check{a} = \check{b}$ lorsque les classes \check{a} et \check{b} sont identiques.

Si $a = b$, on a $\check{a} = \check{b}$. Cependant $\check{a} = \check{b}$ n'entraîne pas nécessairement $a = b$.

Désignons par \check{I}_T l'ensemble de toutes les classes du type précédent. On définit l'addition et la multiplication des classes $\check{a}, \check{b}, \dots \in \check{I}_T$ comme il suit.

On appelle *somme* $\check{a} + \check{b}$ de \check{a} et \check{b} la classe de toutes les fonctions qu'on peut obtenir par l'addition de deux fonctions dont l'une appartient à \check{a} et l'autre à \check{b} . Pareillement, on appelle *produit* $\check{a}\check{b}$ la classe de toutes les fonctions qui sont le produit de deux fonctions quelconques dont l'une appartient à \check{a} et l'autre à \check{b} .

On voit aisément que l'ensemble \check{I}_T constitue un anneau algébrique.

D'une manière tout à fait analogue, on introduit les anneaux \check{F} et \check{V}_{AB} .

18. Autres exemples d'anneaux algébriques. Dans toutes les interprétations précédentes, l'addition était basée sur la notion d'addition habituelle. Or, il est clair qu'au point de vue théorique ce n'est pas nécessaire en général. Nous n'aurons d'ailleurs pas besoin dans la suite d'introduire des anneaux algébriques où l'addition serait définie d'une autre manière. Nous nous contenterons donc de donner 3 exemples très simples, sans leur attacher une importance particulière.

Exemple 18.1. L'ensemble A se compose de deux éléments: 0 et 1. On définit l'addition et la multiplication comme suit:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0, & 0 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 = 1, & 0 \cdot 1 = 0, \\ 1 + 0 = 1, & 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 + 1 = 0, & 1 \cdot 1 = 1. \end{array}$$

Exemple 18.2. L'ensemble A se compose de tous les nombres réels. On pose par définition

$$\begin{aligned} a + b &= (a + b - 1), \\ a \cdot b &= (a + b - a \cdot b), \end{aligned}$$

où les signes $+$, $-$ et \cdot entre parenthèses sont entendus au sens ordinaire.

Exemple 18.3. L'ensemble A se compose de tous les nombres réels positifs. L'addition est définie comme la multiplication au sens ordinaire. Cependant le „produit” de deux éléments a et b est égal à $a^{\log b}$, ce symbole étant interprété au sens ordinaire.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'ensemble A constitue, dans chacun de ces trois cas, un anneau linéaire.

19. Éléments permutables. Deux éléments a, b d'un anneau algébrique A sont dits *permutables* si $ab = ba$.

Or, la permutabilité des éléments n'a pas lieu en général. Considérons p. e. les éléments $a = \{x\}$ et $b = \{y\}$ de l'anneau F . On a :

$$\begin{aligned} ab &= \{x\} \cdot \{y\} = \left\{ \int_0^1 xy ds \right\} = \{xy\}, \\ ba &= \{y\} \cdot \{x\} = \left\{ \int_0^1 s^2 ds \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}, \end{aligned}$$

de sorte que $ab \neq ba$. Les éléments $\{x\}$ et $\{y\}$ ne sont donc pas permutables.

Au contraire, si l'on pose p. e.

$$a = \{\sin \pi x \cdot \sin \pi y\}, \quad b = \{\cos \pi x \cdot \cos \pi y\},$$

on aura $ab = ba$. En effet :

$$\begin{aligned} ab &= \left\{ \int_0^1 \sin \pi x \cdot \sin \pi s \cdot \cos \pi s \cdot \cos \pi y ds \right\} = 0, \\ ba &= \left\{ \int_0^1 \cos \pi x \cdot \cos \pi s \cdot \sin \pi s \cdot \sin \pi y ds \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dans l'anneau F , il y a donc des éléments qui sont permutables et il y en a qui ne le sont pas.

Cependant dans l'anneau I_T tous les éléments sont permutables en vertu du théorème 10.4.

Par conséquent, il en est de même de l'anneau \tilde{I}_T .

L'anneau dont tous les éléments sont permutables est dit *anneau commutatif*. Les anneaux I_T et \tilde{I}_T sont donc commutatifs. Les anneaux F , \tilde{F} , V_{AB} , \tilde{V}_{AB} ne le sont pas, mais certains parmi leurs éléments sont permutables.

20. Puissance. Il est commode d'introduire les symboles :

$$a = a^1, \\ a \cdot a = a^2,$$

et en général :

$$(20.1) \quad a^n \cdot a = a^{n+1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Le symbole a^n est dit la $n^{\text{ème}}$ puissance de a .

Théorème 20. On a $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pour tous m, n naturels.

Démonstration. Le théorème est exact pour $n = 1$ et pour m arbitraire. Admettons que

$$(20.2) \quad a^m \cdot a^{n-1} = a^{m+n-1}.$$

En multipliant (20.2) par a , il vient

$$(a^m \cdot a^{n-1}) \cdot a = a^{m+n-1} \cdot a,$$

d'où en vertu de l'axiome III et de la formule (20.1)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

On déduit aussitôt du théorème 20 que *les puissances d'un même élément sont toujours permutables*, c'est-à-dire que $a^m \cdot a^n = a^n \cdot a^m$.

Exemples 20. Soit $\{1\}$ l'élément de l'anneau I_T . On a alors

$$\{1\}^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}.$$

On le démontre par récurrence.

Lorsque $\{1\}$ est considéré comme élément de F ou de V_{AB} , on obtient respectivement

$$\{1\}^n = \{1\} \quad \text{ou} \quad \{1\}^n = \left\{ \frac{(x-y)^n}{(n-1)!} \right\}.$$

21. Règles pratiques du calcul. Les calculs où n'interviennent que les trois règles : addition, soustraction et multiplication, s'effectuent, grâce aux axiomes I-V, comme dans l'algèbre classique, avec cette restriction unique que les facteurs d'un produit ne peuvent pas être échangés en général.

$$\begin{aligned} \text{Exemples 21.} \quad & (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd, \\ & (a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd, \\ & (a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Le lecteur établira rigoureusement ces formules, en s'appuyant sur les axiomes I-V et sur les relations établies aux N^{os} 2, 4 et 5.

Il faut remarquer qu'il est défendu, en général, d'effectuer dans le dernier exemple la réduction des termes $-ab$ et ba , car il peut arriver que $ab \neq ba$. C'est seulement dans le cas où la permutabilité des éléments a, b est établie, qu'on peut simplifier cette formule.

22. Le „zéro” dans l'anneau algébrique. Tout anneau algébrique A possède (en sa qualité du groupe abélien additif) un élément nul 0 , caractérisé par les égalités $a + 0 = 0 + a = a$ (qui sont vraies pour tout $a \in A$). Cet élément est unique (théorème 4.1), c'est-à-dire : si 0_1 et 0_2 sont des éléments nuls, on a nécessairement $0_1 = 0_2$. Dans les interprétations I_T , F et V_{AB} , l'élément nul est représenté par la fonction identiquement nulle. Dans les anneaux \check{I}_T , \check{F} et \check{V}_{AB} , le rôle d'élément nul jouent les classes des fonctions presque partout nulles.

Nous démontrerons maintenant une propriété générale du zéro.

Théorème 22. *On a*

$$(22) \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

pour tout élément de l'anneau considéré A .

Démonstration. On a pour tout couple $a, b \in A$:

$$ab + a \cdot 0 = a(b + 0) = ab + 0,$$

d'où $a \cdot 0 = 0$ d'après le théorème 4.2. On démontre d'une manière analogue que $0 \cdot a = 0$.

23. L'„unité” dans l'anneau algébrique. On appelle *unité*, et on désigne par 1 , un élément tel que

$$(23) \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

pour tout élément a de l'anneau considéré.

Dans les exemples (a), (c), (d) et (e) du N° 8, le nombre 1 joue le rôle de l'unité; dans les exemples (f) et (g), il en est de même de la fonction $f(x) = 1$. Dans l'ensemble des nombres pairs (exemple (b) du N° 8), il n'y a pas d'unité. Cet exemple montre qu'il peut exister des anneaux algébriques dépourvus d'unité. Par contre, l'existence du zéro est assurée pour tout anneau algébrique. Les exemples 18.2 et 18.3 donnent des interprétations de l'anneau algébrique où l'unité est différente du nombre 1 . Dans l'exemple 18.2, c'est le nombre 0 qui joue le rôle de l'unité (et le nombre 1 y joue, inversement, le rôle de l'élément nul); dans l'exemple 18.3, l'unité de l'anneau est représentée par la base des logarithmes considérés.

Théorème 23.1. *Si l'élément unité existe, il est unique.*

Démonstration. Si l'on avait deux unités 1_1 et 1_2 , on aurait d'après (23) $1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2$.

Le plus simple anneau algébrique est celui qui ne contient qu'un seul élément. Cet élément peut être considéré, évidemment, comme l'élément nul 0 et, en même temps, comme l'unité 1. On a dans ce cas $0 = 1$. Or, la réciproque est vraie :

Théorème 23.2. *Si $0 = 1$, l'anneau se réduit à un seul élément.*

Démonstration. Soit a un élément quelconque de l'anneau considéré; on a d'après (23) et (22)

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Ce théorème peut être énoncé sous une autre forme :

Théorème 23.2 (bis). *Lorsqu'un anneau algébrique possède au moins deux éléments et que l'unité 1 existe, elle est différente de 0.*

24. Les anneaux I_T , \check{I}_T , V_{AB} , \check{V}_{AB} , F et \check{F} sont dépourvus d'élément unité. Chacun des anneaux I_T , V_{AB} et F contient une fonction qui est identiquement égale à 1 dans le domaine considéré. Il ne faut pas confondre cette fonction avec l'élément unité. Nous démontrerons que ces anneaux, ainsi que \check{I}_T , \check{V}_{AB} , \check{F} , n'ont pas d'unité.

^{1°} Anneaux I_T et \check{I}_T . Si une fonction $\{e(t)\}$ était l'unité de I_T , on aurait en particulier $\{e(t)\} \cdot \{1\} = \{1\}$, c'est-à-dire

$$(24.1) \quad \int_0^t e(\tau) d\tau = 1$$

pour $0 < t < T$, ce qui est évidemment impossible. On voit en même temps que l'anneau \check{I}_T n'a non plus d'élément unité, car l'égalité (24.1) ne peut pas être vraie presque partout.

^{2°} Anneaux V_{AB} et \check{V}_{AB} . Supposons que la fonction $\{e(x, y)\}$ soit l'unité de l'anneau V_{AB} . On aurait alors $\{e(x, y)\} \cdot \{1\} = \{1\}$, c'est-à-dire

$$(24.2) \quad \int_y^x e(x, s) ds = 1.$$

Supposons que cette égalité ait lieu presque partout dans le triangle T_{AB} ($A < y < x < B$). Or, il existent deux nombres positifs m et k tels que $|e(x, y)| < m(x - y)^{k-1}$. Donc

$$(24.3) \quad \left| \int_y^x e(x, s) ds \right| < m \int_y^x (x - s)^{k-1} ds = \frac{m}{k} (x - y)^k,$$

ce qui est incompatible avec (24.2). L'inégalité (24.3) prouve l'absence de l'unité dans les deux anneaux V_{AB} et \check{V}_{AB} .

3° Anneaux F et F^2). Supposons qu'il existe une fonction $\{e(x, y)\}$ telle que

$$(24.4) \quad \int_0^1 e(x, s) s^n ds = x^n \quad \text{presque partout dans } 0 < x < 1.$$

Fixons x de la manière que l'égalité (24.4) ait lieu pour tout $n = 1, 2, \dots$. On a aussi

$$x \int_0^1 e(x, s) s^{n-1} ds = x^n$$

et, en retranchant cette égalité de (24.4),

$$\int_0^1 e(x, s) (x - s) s^{n-1} ds = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Il s'en suit que $e(x, s) = 0$ presque partout dans l'intervalle $0 < s < 1$, ce qui n'est pas compatible avec (24.4). Cela prouve l'absence de l'élément unité dans les anneaux F et F^2 .

L'absence de l'unité entraîne des complications dans les calculs. En particulier, il est impossible d'introduire d'une manière directe les éléments inverses (voir N° 25). Cette difficulté sera levée plus tard (N° 27) par l'introduction de la notion d'anneau complexe.

25. Éléments inverses. Si deux éléments a et b satisfont à la relation

$$ab = ba = 1 \quad (1 = \text{unité}),$$

ils sont dits *inverses* l'un par rapport à l'autre; nous écrivons dans ce cas

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{b}.$$

D'après cette définition, les éléments inverses ne peuvent exister que dans les anneaux qui contiennent l'élément unité.

Théorème 25.1. *Lorsqu'un élément inverse à un élément donné $a \in A$ existe, il est unique.*

Démonstration. Si b_1 et b_2 sont des éléments inverses par rapport à a , on a

$$b_1 = b_1(ab_2) = (b_1a)b_2 = b_2.$$

Théorème 25.2. *Si les inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ par rapport à a et b existent, il existe aussi l'inverse du produit ab et l'on a*

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}.$$

†) La démonstration qui suit est due à M. Cz. Ryll-Nardzewski.

Démonstration.

$$(ab) \left(\frac{1}{b} \frac{1}{a} \right) = a \left(b \frac{1}{b} \right) \frac{1}{a} = a \frac{1}{a} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{b} \frac{1}{a} \right) (ab) = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a} a \right) b = \frac{1}{b} b = 1.$$

Théorème 25.3. Lorsque l'inverse $\frac{1}{a}$ de a existe et que a et b sont permutables, alors $\frac{1}{a}$ et b le sont aussi.

Démonstration.

$$\frac{1}{a} b = \left(\frac{1}{a} b \right) \left(a \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} (ba) \frac{1}{a} = \frac{1}{a} (ab) \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a} a \right) \left(b \frac{1}{a} \right) = b \frac{1}{a}.$$

Théorème 25.4. Lorsque les inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ de a et b existent et que les éléments a, b sont permutables, leurs inverses le sont aussi.

Démonstration.

$$\frac{1}{a} \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{b} b \right) \left(\frac{1}{a} \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b} \left(b \frac{1}{a} \right) \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a} b \right) \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{b} \frac{1}{a} \right) \left(b \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b} \frac{1}{a}.$$

26. Équation linéaire. Si la permutabilité des éléments n'est pas établie, les deux équations

$$(26.1) \quad ax = b,$$

$$(26.2) \quad xa = b$$

doivent être regardées comme différentes.

Si l'inverse $\frac{1}{a}$ de a existe, le produit

$$x = \frac{1}{a} b$$

est évidemment une solution de (26.1). On voit sans peine qu'elle est unique. En effet, s'il y avait deux solutions x_1 et x_2 , on aurait, en multipliant les égalités $ax_1 = b$ et $ax_2 = b$ par $\frac{1}{a}$:

$$x_1 = \frac{1}{a} b, \quad x_2 = \frac{1}{a} b,$$

et par suite $x_1 = x_2$.

Pareillement, s'il existe l'inverse $\frac{1}{a}$ de a , l'équation (26.2) possède une solution et une seule, à savoir $x = b \frac{1}{a}$.

Dans le cas où les éléments a et b sont *permutables*, on a $\frac{1}{a} b = b \frac{1}{a}$. Par conséquent la solution x est permutable avec a et les deux équations (26.1) et (26.2) sont évidemment équivalentes. On peut alors écrire leur solution sans ambiguïté sous la forme

$$x = \frac{b}{a}$$

(ce qui n'est pas légitime en général).

L'existence de l'inverse de a assure l'existence et l'unicité de la solution pour les deux équations (26.1) et (26.2).

Lorsque l'élément a n'a pas d'inverse, leur solution peut exister ou ne pas exister, suivant le cas. Il suffit, pour le voir, de prendre comme l'anneau l'ensemble de tous les nombres entiers avec addition et multiplication usuelles. Alors aucun élément, sauf 1, n'a d'inverse. Cependant l'équation $2x = 6$ admet une solution: 3; l'équation $2x = 5$ est par contre, dépourvue de solution. Si le coefficient a n'a pas d'inverse, il se peut qu'il y ait plusieurs, et même une infinité de solutions; l'unicité n'est donc pas assurée en général. En effet, il y a une infinité de fonctions $f = \{f(x)\}$ de l'anneau F telles que $\int_0^1 f(x) dx = 1$; chacune d'elle satisfait à l'équation $\{1\} \cdot x = \{1\}$.

27. Anneau complexe. Nous avons vu dans les N^{os} précédents que l'élément „unité” joue un grand rôle dans la théorie des anneaux algébriques et qu'il existe cependant des anneaux qui en sont dépourvus (voir N^o 24). Dans les cas où cela entraîne certaines difficultés dans les applications, il paraît avantageux d'associer les anneaux à d'autres anneaux dans lesquels l'unité existe. On est conduit ainsi à la notion d'*anneau complexe*. Pour fixer les idées, nous étudierons d'abord un exemple particulier. La définition générale de la notion en question sera donnée au N^o 28.

Soit A_1 l'anneau formé de tous les nombres complexes, l'addition et la multiplication étant définies au sens ordinaire; les éléments de cet anneau seront désignés par des lettres grecques α, β, \dots . Considérons parallèlement l'anneau I_1 (voir N^o 12), formé de fonctions complexes d'une variable réelle; les éléments de cet anneau seront désignés par des lettres latines a, b, \dots ou bien par les symboles

$\{a(t)\}, \{b(t)\}, \dots$ En dehors des opérations définies à l'intérieur de chaque anneau, on introduit la multiplication des éléments appartenant à des anneaux différents :

$$aa = a_a = \{aa(t)\} \quad \text{où } a = \{a(t)\}.$$

D'après cette définition, le produit de deux éléments dont l'un appartient à A_1 et l'autre à I_T , appartient lui même à I_T .

Cela posé, on forme un nouvel ensemble A de tous les couples (ordonnés)

$$(a, a)$$

dont le premier élément appartient à A_1 et le second à I_T . On définit l'égalité, l'addition et la multiplication des éléments de A comme il suit :

1° *Égalité.* On écrit $(a, a) = (\beta, b)$ lorsque $a = \beta$ et $a = b$, et dans ce cas seulement.

$$2^\circ \text{ Addition. } (a, a) + (\beta, b) = (a + \beta, a + b).$$

$$3^\circ \text{ Multiplication. } (a, a) \cdot (\beta, b) = (a\beta \cdot ab + \beta a + ab).$$

On démontre sans peine que l'ensemble A constitue un anneau algébrique; il suffit de vérifier que les axiomes I-V sont satisfaits ⁸⁾.

Le nouvel anneau contient l'élément unité, à savoir $(1, 0)$; on a en effet

$$(a, a) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, a) = (a, 0 + 0 + a) = (a, a)$$

pour tous les couples (a, a) de A .

Il est évident que l'anneau A est en même temps un groupe complexe (voir N° 6); il paraît donc naturel de lui assigner, par analogie, le nom d'*anneau complexe*. De même que dans le cas du groupe complexe (voir N° 7), nous introduirons pour les éléments de l'anneau complexe une notation en forme de somme

$$(a, a) = a + a,$$

où $a = (a, 0)$ et $a = (0, a)$. En particulier, on écrira l'unité: $(1, 0) = 1$. Grâce à cette convention, les calculs deviennent, au point de vue formel, identiques à ceux de l'algèbre classique. Nous allons illustrer ce fait par un exemple très simple que voici.

Soit donnée l'équation intégrale

$$x(t) = f(t) + \int_0^t x(\tau) d(\tau),$$

⁸⁾ Pour la démonstration d'une proposition plus générale, voir N° 28.

qui peut être écrite sous la forme symbolique suivante:

$$(27.1) \quad x = f + \{1\}x.$$

Lorsque les symboles sont interprétés comme des éléments de l'anneau complexe A , on peut résoudre cette équation tout simplement par les transformations suivantes:

$$(27.2) \quad \begin{aligned} x - \{1\}x &= f, & (1 - \{1\})x &= f, \\ x &= \frac{f}{1 - \{1\}}. \end{aligned}$$

Cette solution est légitime car l'élément $1 - \{1\}$ possède son inverse, qui est égal à

$$(27.3) \quad \frac{1}{1 - \{1\}} = 1 + \{e^t\},$$

ce qui est facile à vérifier suivant la définition de la multiplication adoptée pour A . On peut obtenir sans peine de la solution (27.2) sa forme explicite, en effectuant la multiplication indiquée:

$$x = (1 + \{e^t\})f = \left\{ f(t) + \int_0^t e^{t-\tau} f(\tau) d\tau \right\},$$

ce qui donne

$$x(t) = f(t) + \int_0^t e^{t-\tau} f(\tau) d\tau.$$

Cet exemple est fort instructif, car, a priori, l'équation (27.1) est susceptible des deux interprétations: les symboles peuvent, en effet, désigner soit les éléments de l'anneau I_T , soit ceux de A .

Or, ce n'est que la seconde interprétation qui nous permet d'obtenir la solution par cette voie, car l'unité 1 (dont I_T est dépourvu) y joue un rôle essentiel.

28. Définition générale de l'anneau complexe. Considérons (comme dans le N° 6) n groupes (abéliens) quelconques A_1, \dots, A_n . Les nombres des éléments et les définitions de l'addition peuvent être différentes dans chacun de ces groupes. Les éléments de A_1, \dots, A_n seront désignés respectivement par a_1, \dots, a_n , de sorte que leurs indices correspondent à ceux des groupes.

A côté de l'addition, qui est définie dans chacun des groupes, on introduit la multiplication

$$a_i b_j = c_k$$

pour toutes les combinaisons i, j de manière que l'indice k soit déterminé univoquement pour tout couple i, j .

Cette condition exige que tous les produits d'éléments dont le premier appartient à A_i et le second à A_j appartiennent au même groupe A_k . La manière dont on définit cette multiplication est d'ailleurs arbitraire, pourvu que les axiomes de la multiplication (N° 8) soient satisfaits :

- III. $(a_i b_j) c_k = a_i (b_j c_k)$ pour tous les triples i, j, k ;
 IV. $a_i (b_j + c_j) = a_i b_j + a_i c_j$ }
 V. $(b_j + c_j) a_i = b_j a_i + c_j a_i$ } pour tous les couples i, j .

Cela posé, on forme un nouvel ensemble A de tous les systèmes de n éléments (a_1, \dots, a_n) appartenant respectivement aux anneaux A_1, \dots, A_n . On définit l'égalité et l'addition de deux systèmes appartenant à l'ensemble A de la même manière que dans le cas des groupes complexes (N° 6) :

1° *Égalité.* $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ lorsque $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$, et dans ce cas seulement.

2° *Addition.* $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.

Nous écrirons en général les éléments (a_1, \dots, a_n) de A sous la forme de somme :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$$

où $a_i = (0_1, \dots, 0_{i-1}, a_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n)$ et $i = 1, \dots, n$. Cette notation permettra de définir d'une façon claire la multiplication de deux éléments de A . Nous adoptons la définition suivante :

3° *Multiplication.* $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j$.

Ces définitions étant établies, l'ensemble A devient un anneau algébrique. Pour le démontrer, il faut vérifier que la somme et le produit des éléments (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) de A appartiennent encore à A et que les axiomes I-V sont satisfaits. Or, c'est évident en ce qui concerne la somme et les axiomes I et II car l'ensemble A est un groupe complexe (N° 6). Pour démontrer que le produit $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j$ est un élément de A , il suffit de remarquer que chacun des produits partiels $a_i b_j$ appartient à A ; il en est donc de même de leur somme.

Pour vérifier l'axiome III, posons:

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{i=1}^n a_i, & b &= \sum_{j=1}^n b_j, & c &= \sum_{k=1}^n c_k; \\
 ab &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{l=1}^n d_l, & bc &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_j c_k = \sum_{l=1}^n e_l. \\
 (ab)c &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n d_l c_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_i b_j) c_k, \\
 a(bc) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_i e_l = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i (b_j c_k).
 \end{aligned}$$

Or, les deux dernières expressions sont égales grâce à l'associativité III de la multiplication de a_i, b_j, c_k .

La vérification de l'axiome IV est plus simple; on a:

$$\begin{aligned}
 a(b+c) &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^n c_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n (b_j + c_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i (b_j + c_j), \\
 ab+ac &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i c_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_i c_j).
 \end{aligned}$$

Les deux dernières expressions sont égales en vertu de IV.

Une démonstration tout à fait analogue s'applique à l'axiome V.

Nous dirons que l'anneau A construit d'après les règles de ce N° est un *anneau complexe*.

Remarque 28.1. La notion d'anneau complexe est une généralisation de celle de système hypercomplexe⁹⁾. Elle se réduit à cette dernière, lorsqu'on suppose que, pour tout $i \geq 2$, il existe un élément $a_i \in A_i$ tel que tout élément de A_i puisse être écrit sous la forme $a_1 a_i \in A_i$.

Remarque 28.2. Admettons en particulier que le produit des éléments de l'anneau complexe satisfait à la condition supplémentaire $a_i b_i = c_i$ ($i = 1, \dots, n$), c'est-à-dire que tout produit de deux éléments appartenant au même groupe appartient encore à ce groupe. Dans ce cas, chacun des groupes A_i , considéré séparément, constitue un anneau algébrique, comme nous l'avons vu au N° 27. Dans la suite, nous traiterons presque exclusivement les anneaux complexes de ce genre. Dans la plupart d'applications, le nombre n d'"anneaux partiels" sera égal à 2.

⁹⁾ B. L. Van der Waerden, [11], p. 46-49.

Chapitre III

Applications

29. Anneaux complexes du type $[A]$. Le cas particulier suivant de l'anneau complexe joue un rôle important dans les applications. On pose $n = 2$ et l'on prend pour A_1 et A_2 des anneaux algébriques ¹⁰⁾ dont le premier est composé de nombres complexes (l'addition et la multiplication étant définies au sens habituel). L'interprétation du second anneau A_2 peut être diverse, suivant le cas; on admet cependant la condition générale que le produit de deux éléments dont le premier appartient à A_1 et le second à A_2 appartienne toujours à A_2 et que ce produit soit permutable (commutatif).

Les anneaux complexes de ce genre seront dits *anneaux du type $[A]$* ; nous nous occuperons, dans ce chapitre, exclusivement des anneaux de ce type.

Convenons d'appeler *nombres* les éléments de l'anneau A_1 et *vecteurs* ceux de l'anneau A_2 . Les nombres seront désignés désormais par lettres grecques, tandis que les lettres latines seront réservées pour désigner les vecteurs.

En admettant en particulier que A_2 est l'un des anneaux considérés aux N^{os} 12-17 et que le produit αa (où $\alpha \in A_1$ et $a \in A_2$) s'obtient en multipliant au sens habituel la fonction a par le nombre α , on est conduit à des interprétations qui peuvent être appliquées dans la théorie des équations différentielles et intégrales. Nous allons envisager, dans ce chapitre, surtout les anneaux I_T et F .

30. L'élément $l = \{1\}$ de l'anneau I_T . Parmi les éléments de I_T la fonction $\{1\}$ joue un rôle particulier; il sera commode de la désigner par un symbole plus court, soit par l . La multiplication de l par un autre élément quelconque $\{b(t)\}$ de I_T donne

$$l \cdot \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t b(\tau) d(\tau) \right\};$$

on voit que la multiplication par l signifie l'intégration de la fonction correspondante. Il revient au même si la fonction est multipliée par l ou, inversement, l par cette fonction, car tous les éléments de I_T sont permutable (N^o 19), c'est-à-dire qu'on a toujours $ab = ba$ pour $a, b \in I_T$.

En particulier, on a

$$l^2 = l \cdot l = \left\{ \int_0^t d\tau \right\} = \{t\}$$

¹⁰⁾ On admet donc que l'anneau considéré satisfait à la condition supplémentaire $a_i b_i = c_i$ (voir Remarque 28.2).

et généralement

$$(30) \quad l^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\},$$

où le symbole l^n est défini, comme on le fait d'habitude, par les relations de récurrence (N° 20):

$$l^1 = l, \quad l^{n+1} = l^n \cdot l \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si n est un nombre positif quelconque, on peut généraliser le symbole l^n en posant

$$l^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \right\},$$

où Γ est la fonction *gamma d'Euler*. Le lecteur vérifiera que l'égalité $l^p l^q = l^{p+q}$ est encore exacte pour tout couple p, q de nombres positifs.

31. L'anneau complexe $[I_T]$. L'anneau $[I_T]$ a été introduit à titre d'exemple au N° 27. Il est composé d'anneau A_1 , dont les éléments α, β, \dots sont des nombres complexes, et d'anneau $I_T (= A_2)$, dont les éléments a, b, \dots (vecteurs) sont des fonctions complexes $\{a(t)\}, \{b(t)\} \dots$ d'une variable réelle t . La multiplication du nombre α par le vecteur $\bar{a} = a(t)$ est définie par la relation

$$\alpha \bar{a} = \bar{a} \alpha = \{\alpha a(t)\}.$$

En vertu de la permutabilité de tous les éléments de I_T (N° 19), tous les éléments $\alpha + a$ de l'anneau complexe $[I_T]$ sont encore permutable.

En remplaçant dans l'interprétation précédente l'anneau I_T par l'un quelconque de ses sous-anneaux $I_T(n)$ (voir N° 13), on obtient évidemment un sous-anneau de $[I_T]$; nous le désignerons par $[I_T(n)]$.

32. Éléments de la forme $1 + a_1 l + \dots + a_n l^n$. Lorsque λ est un nombre complexe arbitraire, on a

$$(32.1) \quad (1 - \lambda l) (1 + \lambda \{e^{\lambda t}\}) = (1 + \lambda \{e^{\lambda t}\}) (1 - \lambda l) = 1,$$

ce qui est facile à vérifier d'après la définition de la multiplication. Ces égalités expriment que

$$(32.2) \quad \frac{1}{1 - \lambda l} = 1 + \lambda \{e^{\lambda t}\};$$

il importe de remarquer que la vérification des égalités (32.1) est en même temps la *preuve d'existence* de l'inverse de tout élément de la forme $1 - \lambda l$.

À l'aide de la formule (32.2), on peut trouver l'inverse de tout élément de la forme

$$A = 1 + a_1 l + a_2 l^2 + \dots + a_n l^n,$$

où a_1, \dots, a_n sont des nombres complexes arbitraires ($a_n \neq 0$). À ce but, il suffit d'écrire A sous forme d'un produit

$$A = (1 - \lambda_1 l) (1 - \lambda_2 l) \dots (1 - \lambda_n l) \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ nombres complexes}),$$

ce qui est toujours possible d'après les théorèmes de l'algèbre classique, car les règles du calcul sont les mêmes dans notre cas. On a alors

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{1 - \lambda_1 l} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_2 l} \dots \frac{1}{1 - \lambda_n l};$$

on a pas besoin d'intervertir ici l'ordre des multiplications car tous les éléments de $[I_T]$ sont permutables.

Lorsqu'on sait calculer l'inverse de A , on peut aussi trouver la forme explicite de tout élément Q donné par la formule

$$Q = \frac{\beta_0 + \beta_1 l + \dots + \beta_m l^m}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n};$$

il suffit, en effet, de l'écrire sous la forme

$$Q = \frac{1}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n} (\beta_0 + \beta_1 l + \dots + \beta_m l^m)$$

et, après avoir calculé $\frac{1}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n}$, d'effectuer la multiplication.

Les considérations de ce N° constituent évidemment une *preuve d'existence* de l'élément inverse de A et du quotient Q . Cette remarque permettra d'établir immédiatement l'existence des solutions des équations différentielles que nous allons considérer dans la suite.

On voit facilement que les éléments A et Q , ainsi que leurs éléments inverses, appartiennent toujours au sous-anneau $[I_T(\text{vii})]$, c'est-à-dire que les parties vectorielles de ces éléments sont toujours des fonctions continues pour $0 \leq t < T$.

33. Application aux équations différentielles à coefficients constants. Soit

$$(33.1) \quad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$$

une équation différentielle à coefficients constants a_1, \dots, a_n et soit $f(t)$ une fonction continue pour $0 \leq t < T$. On cherche une intégrale $x(t)$ de (33.1) qui satisfasse aux conditions initiales

$$x(0) = \gamma_0, \quad x'(0) = \gamma_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = \gamma_{n-1}.$$

En intégrant (33.1) n fois, il vient

$$(33.2) \quad \begin{aligned} x(t) + a_1 \int_0^t x(\tau) d\tau + \dots + a_n \int_0^t d\tau \dots \int_0^\tau x(\tau) d\tau = \\ = \beta_0 + \beta_1 \frac{t}{1!} + \dots + \beta_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^t d\tau \dots \int_0^\tau f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où $\beta_i = a_0 \gamma_i + a_1 \gamma_{i-1} + \dots + a_i \gamma_0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Lorsque les termes de cette équation sont considérés comme éléments de l'anneau I_T ou comme ceux de l'anneau complexe $[I_T]$, elle peut s'écrire sous la forme plus simple ¹¹⁾

$$(33.3) \quad x + a_1 l x + \dots + a_n l^n x = \beta_0 l + \beta_1 l^2 + \dots + \beta_{n-1} l^n + l^n f.$$

Or, ce n'est que la seconde interprétation qui permet d'obtenir la solution, à savoir de la manière suivante. On met d'abord x hors parenthèse :

$$(1 + a_1 l + \dots + a_n l^n) x = \beta_0 l + \dots + \beta_{n-1} l^n + l^n f;$$

en multipliant ensuite les deux membres par $\frac{1}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n}$, on obtient

$$(33.4) \quad x = \frac{\beta_0 l + \dots + \beta_{n-1} l^n}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n} + \frac{l^n}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n} f.$$

Enfin, on peut obtenir la forme habituelle de la solution, en suivant les indications du N° 32.

On constate que le calcul ci-dessus prouve simultanément l'existence et l'unicité de la solution ¹²⁾.

Remarque 33. On voit que ce ne sont que les éléments de l'anneau $[I_T(vi)]$ qui interviennent dans le problème considéré et dans sa résolution. Cependant, on pourrait aussi poser le même problème en admettant que $\{f(t)\}$ est une fonction quelconque de I_T , sans qu'elle soit nécessairement continue. Dans ce cas, il faudrait définir la solution de (33.1) comme une fonction $\{x(t)\}$ dont la $(n-1)$ -ème dérivée est absolument continue et qui satisfait à (33.1) presque partout. Le procédé de la résolution resterait, au point de vue formel, exactement le même.

¹¹⁾ En passant de la forme habituelle (33.2) à celle (33.3), on ajoute un l après β_0 . Si l'on négligeait ce l , on commettrait une erreur, car β_0 doit être considéré comme la fonction constante $\{\beta_0\}$ qui est évidemment égale à $\beta_0\{1\} = \beta_0 l$.

¹²⁾ En effet, si x est de la forme (33.4), on revient, en multipliant (33.4) par $1 + a_1 l + \dots + a_n l^n$, à l'équation (33.3), ce qui prouve l'existence. Au contraire, lorsqu'on admet que x satisfait à l'équation (33.3), la voie qui a été suivie montre que x doit être nécessairement de la forme (33.4), qui définit la fonction $\{x(t)\}$ univoquement.

34. Évaluation de Q par décomposition en une somme. L'évaluation de l'élément

$$Q = \frac{\beta_0 + \beta_1 l + \dots + \beta_m l^m}{1 + a_1 l + \dots + a_n l^n} \quad (a_n \neq 0)$$

par décomposition en un produit (N° 32)

$$(34.1) \quad Q = \frac{1}{1 - \lambda_1 l} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_2 l} \cdots \frac{1}{1 - \lambda_n l} \cdot (\beta_0 + \beta_1 l + \dots + \beta_m l^m)$$

n'est pas commode au point de vue pratique. Pour obtenir par ce procédé la forme explicite de Q , il faut encore effectuer n intégrations qui correspondent à la multiplication des facteurs de (34.1). Or, on peut parvenir plus aisément au but, sans même effectuer l'intégration quelconque, en employant une autre méthode, à savoir qui consiste à décomposer Q en une somme (finie) de la forme

$$(34.2) \quad Q = \beta + \sum_{\gamma, \lambda, \nu} \gamma \frac{l^\nu}{(1 - \lambda l)^\nu} \quad (\beta, \gamma, \lambda \text{ complexes, } \nu \text{ naturel})$$

et à appliquer la formule

$$(34.3) \quad \frac{l^\nu}{(1 - \lambda l)^\nu} = \left\{ \frac{l^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\lambda l} \right\}.$$

Pour justifier cette méthode, il faut démontrer que

- 1° la décomposition en question est toujours possible;
- 2° la formule (34.3) est légitime.

35. Démonstration de l'existence de la décomposition de Q . Nous nous servons du lemme suivant:

Lemme 35. Si $B = \beta_0 + \beta_1 l + \dots + \beta_m l^m$ et $\lambda \neq 0$, on a

$$(35) \quad \frac{B}{1 - \lambda l} = D + \frac{\delta}{1 - \lambda l},$$

où $D = \delta_0 + \delta_1 l + \dots + \delta_{m-1} l^{m-1}$.

Pour l'établir, il suffit de poser

$$\delta_i = -\frac{\beta_{i+1}}{\lambda} - \frac{\beta_{i+2}}{\lambda^2} - \dots - \frac{\beta_m}{\lambda^{m-1}} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1),$$

$$\delta = +\beta_0 + \frac{\beta_1}{\lambda} + \dots + \frac{\beta_m}{\lambda^m},$$

et de vérifier (35) en multipliant les deux membres de cette égalité par $1 - \lambda l$.

En écrivant maintenant le dénominateur de Q sous la forme

$$A = 1 + a_1 l + \dots + a_n l^n = (1 - \lambda_1 l)^\nu \cdot C,$$

où C ne contient plus de facteur $(1 - \lambda_1 l)$, on a

$$Q = \frac{B}{A} = \gamma \frac{l^\nu}{(1 - \lambda_1 l)^\nu} + \frac{1}{(1 - \lambda_1 l)^{\nu-1} C} \left(\frac{B}{1 - \lambda_1 l} - \gamma \frac{l^\nu C}{1 - \lambda_1 l} \right).$$

D'après le lemme qui précède, on peut écrire

$$\frac{B}{1-\lambda_1 l} = D_1 + \frac{\delta_1}{1-\lambda_1 l}, \quad \frac{l^\nu C}{1-\lambda_1 l} = D_2 + \frac{\delta_1}{1-\lambda_1 l},$$

où $\gamma_2 \neq 0$. En choisissant γ de manière que $\delta_1 - \gamma \delta_2 = 0$, on a donc

$$Q = \gamma \frac{l^\nu}{(1-\lambda_1 l)^\nu} + \frac{D_1 - \gamma D_2}{(1-\lambda_1 l)^{\nu-1} C}.$$

On répète maintenant le même procédé en l'appliquant à la seconde des fractions obtenues et ainsi de suite, jusqu'à la décomposition complète de Q . Les puissances de l auxquelles on parvient après le dernier pas peuvent évidemment être obtenues en posant $\lambda=0$ dans l'expression $\frac{l^\nu}{(1-\lambda l)^\nu}$.

Le lecteur démontrera que

1° l'exposant le plus élevé de ces puissances de l ne dépasse pas $m-n$;

2° le nombre β dans la formule (34.2) est égal à β_0 .

Remarque 35. Au lieu des considérations qui précèdent, on pourrait donner une démonstration indirecte, en posant formellement $x=1/l$; cela ramène le problème à la décomposition d'une fraction algébrique en fractions simples de la forme $\delta/(x-\lambda)$. Ce procédé exigerait cependant quelques précautions, car l'inverse de l n'existe pas.

36. Démonstration de la formule $\frac{l^\nu}{(1-\lambda l)^\nu} = \left\{ \frac{l^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\lambda l} \right\}$. Cette formule est une généralisation de (30) et elle se réduit à (30) en posant $\lambda=0$. Lorsque $\lambda \neq 0$, la démonstration peut être effectuée par induction. Le cas (où $\nu=1$)

$$\frac{l}{1-\lambda l} = \{e^{\lambda l}\}$$

se laisse vérifier sans peine en multipliant les deux membres par $1-\lambda l$. En effet:

$$(1-\lambda l) \{e^{\lambda l}\} = \left\{ e^{\lambda l} - \lambda \int_0^l e^{\lambda t} dt \right\} = \{1\} = l.$$

En admettant maintenant que la formule est juste pour un exposant $\nu-1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{l^\nu}{(1-\lambda l)^\nu} &= \frac{l}{1-\lambda l} \cdot \frac{l^{\nu-1}}{(1-\lambda l)^{\nu-1}} = \{e^{\lambda l}\} \cdot \left\{ \frac{l^{\nu-2}}{(\nu-2)!} e^{\lambda l} \right\} = \\ &= \left\{ \int_0^l e^{\lambda(t-1)} \cdot \frac{\tau^{\nu-2}}{(\nu-2)!} e^{\lambda \tau} d\tau \right\} = \left\{ \frac{l^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\lambda l} \right\}, \end{aligned} \quad \text{c. q. f. d.}$$

37. Exemples. Voici quelques exemples du calcul pratique:

1° Trouver la forme explicite de

$$Q = \frac{6l + 5l^2 - 6l^3 - 2l^4}{l - 3l^2 - 2l^3}.$$

Il est le plus commode, dans les applications, d'effectuer la décomposition de Q à l'aide des coefficients indéfinis. Comme $l - 3l^2 - 2l^3 = (1 - 2l)(1 + l)^2$, nous écrirons dans le cas considéré

$$(37) \quad Q = a + \beta \frac{l}{1 - 2l} + \gamma \frac{l^2}{(1 + l)^2} + \delta \frac{l}{1 + l}.$$

En multipliant les deux membres par $(1 - 2l)(1 + l)^2$, il vient $6l + 5l^2 - 6l^3 - 2l^4 = a(1 - 3l^2 - 2l^3) + \beta l(1 + 2l + l^2) + \gamma l^2(1 - 2l) + \delta l(1 - l - 2l^2)$.

La comparaison des coefficients des deux membres conduit au système de 4 équations algébriques:

$$\begin{aligned} 6 &= a + \beta + \delta, \\ 5 &= 2\beta + \gamma - \delta, \\ -6 &= -3a + \beta - 2\gamma - 2\delta, \\ -2 &= -2a, \end{aligned}$$

d'où $a = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$ et $\delta = 2$. En appliquant la formule (34.3), il vient d'après (37)

$$Q = \{t + 3e^{2t} + te^{-t} + 2e^{-t}\}.$$

$$2^0 \frac{l}{1 + \lambda^2 l^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{1 - i\lambda l} + \frac{l}{1 + i\lambda l} \right) = \frac{1}{2} \{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}\} = \{\cos \lambda t\}.$$

$$3^0 \frac{l^2}{1 + \lambda^2 l^2} = \frac{1}{2\lambda i} \left(\frac{l}{1 - i\lambda l} - \frac{l}{1 + i\lambda l} \right) = \frac{1}{2\lambda i} \{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}\} = \frac{1}{\lambda} \{\sin \lambda t\}.$$

Remarque 37. On pourrait aussi déduire la solution de l'exemple 3° de celle de l'exemple 2°:

$$\frac{l^2}{1 + \lambda^2 l^2} = l \cdot \frac{l}{1 + \lambda^2 l^2} = l \cdot \{\cos \lambda t\} = \left\{ \int_0^t \cos \lambda \tau d\tau \right\} = \frac{1}{\lambda} \{\sin \lambda t\}.$$

38. Exemples de la résolution des équations différentielles. On peut apprécier les avantages de ce mode de calculer, en l'appliquant à la résolution de quelques équations différentielles à coefficients constants. En voici des exemples:

Exemple 38.1. On cherche l'intégrale $x(t)$ de l'équation

$$x'' - 4x' + 4x = t^2,$$

telle que $x(0) = 2$ et $x'(0) = 3$.

Résolution. En intégrant deux fois cette équation et en tenant compte des conditions initiales, il vient

$$x(t) - 4 \int_0^t x(\tau) d\tau + 4 \int_0^t d\tau \int_0^\tau x(\tau) d\tau = 2 - 5t + \frac{t^4}{12},$$

c'est-à-dire

$$x - 4lx + 4l^2x = 2l - 5l^2 + 2l^5.$$

On en tire

$$x = \frac{2l - 5l^2 + 2l^5}{1 - 4l + 4l^2} = \frac{3}{8}l + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}l^3 + \frac{13}{8}l^4 \cdot \frac{l}{1 - 2l} - \frac{3}{4} \frac{l^2}{(1 - 2l)^2}$$

et enfin

$$x(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{13}{8}e^{2t} - \frac{3}{4}te^{2t}.$$

Exemple 38.2. On cherche l'intégrale $x(t)$ de l'équation

$$x' - x = (2t - 1)e^{2t},$$

telle que $x(0) = 0$.

Résolution. $x(t) - \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t (2\tau - 1)e^{2\tau} d\tau,$

$$x - lx = l \cdot \{(2t - 1)e^{2t}\}, \quad x = \frac{l}{1 - l} \cdot \{(2t - 1)e^{2t}\} = \{e^t\} \{(2t - 1)e^t\},$$

$$x(t) = \int_0^t e^{t-\tau} (2\tau - 1)e^{2\tau} d\tau = e^{t^2} - e^t.$$

Exemple 38.3. On cherche l'intégrale $x(t)$ de l'équation

$$x'' + 4x = \frac{2t^4 - t^2}{(1 - 4t^2)^{3/2}},$$

telle que $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

Résolution. $x(t) + 4 \int_0^t dt \int_0^t x(t) dt = \int_0^t dt \int_0^t f(t) dt + 1 \quad \left(f(t) = \frac{2t^4 - t^2}{(1 - 4t^2)^{3/2}} \right),$

$$x + 4l^2x = l^2f + l, \quad x = \frac{l^2}{1 + 4l^2}f + \frac{l}{1 + 4l^2},$$

$$x(t) = \cos 2t + \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) \sin 2(t - \tau) d\tau,$$

$$x(t) = \frac{31}{32} \cos 2t + \frac{1}{32} \sqrt{1 - 4t^2}.$$

39. Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. On peut appliquer la même méthode pour résoudre des *systèmes* d'équations. Il est commode alors de se servir parfois des déterminants. La théorie des déterminants s'applique notamment à chaque anneau algébrique dont les éléments sont permutable, ce qui a lieu dans le cas à envisager.

Exemple 39.

$$\begin{aligned}x' + z' - z &= 0, \\ -x' - 2z' + x + y &= \operatorname{tg} t, \\ 2x'' + y'' + z'' + z &= 2 \frac{\sin t}{\cos^3 t}.\end{aligned}$$

On cherche une solution $x(t), y(t), z(t)$ telle que

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

Résolution. En intégrant les équations données (la dernière deux fois), il vient

$$\begin{aligned}x + z - \int_0^t z dt &= 0, \\ -x - 2z + \int_0^t x dt + \int_0^t y dt &= \int_0^t \operatorname{tg} t dt, \\ 2x + y + z + \int_0^t dt \int_0^t z dt &= \operatorname{tg} t - t\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}x + z - lz &= 0, \\ -x - 2z + lx + ly &= lf \quad (f = \{\operatorname{tg} t\}), \\ 2x + y + z + l^2 z &= f - l.\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-l \\ -1+l & l & -2 \\ 2 & 1 & 1+l^2 \end{vmatrix} = (1+l)(1+l^2).$$

On a donc

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-l \\ lf & l & -2 \\ f-l^2 & 1 & 1+l^2 \end{vmatrix} = \frac{-l^4 + l^3}{(1+l)(1+l^2)} = -l + \frac{l}{1+l} + \frac{l^2}{1+l^2}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-l \\ -1+l & lf & -2 \\ 2 & f-l^2 & 1+l^2 \end{vmatrix} = \frac{l^4 - 2l^3 - l^2}{(1+l)(1+l^2)} + f = l - \frac{l}{1+l} - 2\frac{l^2}{1+l^2} + f,$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+l & 1 & lf \\ 2 & 1 & f-l^2 \end{vmatrix} = \frac{l^3}{(1+l)(1+l^2)} = -\frac{1}{2} \frac{l}{1+l} - \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+l^2} + \frac{1}{2} \frac{l}{1+l^2}$$

et enfin

$$x(t) = -1 + e^{-t} + \sin t,$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} - 2 \sin t + \operatorname{tg} t,$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t.$$

40. L'équation intégrale d'Abel. L'équation d' Abel

$$f(t) = \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1)$$

peut s'écrire sous la forme

$$f = \Gamma(1-\alpha) \cdot l^{1-\alpha} \cdot x,$$

où $f = f(t)$ et $x = x(t)$. Pour évaluer l'inconnue x , multiplions les deux membres de cette équation par l^α :

$$l^\alpha f = \Gamma(1-\alpha) \cdot lx,$$

d'où

$$lx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} l^\alpha f.$$

En revenant à la notation ordinaire, on a donc

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

et enfin

$$x(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

en vertu de la formule

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \quad (0 < \alpha < 1).$$

41. Introduction des intégrales définies. Transformation de Laplace. Les procédés décrits aux Nos 30-37 sont susceptibles d'une nouvelle interprétation dès qu'on suppose que le symbole l , qui intervient dans les calculs, désigne une *variable* complexe et non plus la fonction {1}. Alors la formule

$$\frac{l^p}{(1-\lambda l)^p} = \left\{ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{\lambda t} \right\},$$

dont le premier membre devient fonction rationnelle au sens ordinaire,

définit une transformation faisant correspondre à toute fonction de la forme $F(t) = \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} e^{\lambda t}$ une fonction $f(l) = \frac{l^v}{(1-l)^v}$. Cette correspondance est biunivoque.

Il est intéressant de constater que la relation entre ces deux fonctions peut être exprimée à l'aide de l'intégrale définie

$$(41) \quad f(l) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} F(t) dt \quad \left(\frac{1}{l} > \lambda \right).$$

En effet, cette formule est vraie pour $v=1$, car on a

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} e^{\lambda t} dt = \frac{l}{1-\lambda l}.$$

En supposant qu'elle soit encore vraie pour un certain $v \geq 1$, l'intégration *per partes* donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} \frac{t^v}{v!} e^{\lambda t} dt &= \left[-\frac{l}{1-\lambda l} e^{-\frac{1-\lambda l}{l}} \cdot \frac{t}{v!} \right]_0^{\infty} + \frac{l}{1-\lambda l} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} e^{\lambda t} dt = \\ &= \frac{l}{1-\lambda l} \frac{l^v}{(1-\lambda l)^v}, \end{aligned} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Une propriété caractéristique de cette transformation est la suivante:

Si $f_1(l)$ correspond à $F_1(t)$ et $f_2(l)$ à $F_2(t)$, le produit $f(l) = f_1(l) \cdot f_2(l)$ correspond au produit de composition $F(t) = \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau$.

Cette propriété est évidente grâce aux considérations des Nos 12 et 36. Or, elle peut être démontrée aussi à l'aide de la formule (41). En effet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} F(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} dt \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} F_2(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} F_1(t-\tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} F_2(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-\frac{t+\tau}{l}} F_1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{l}} F_2(\tau) d\tau \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} F_1(t) dt = \\ &= f_2(l) \cdot f_1(l), \end{aligned} \quad \text{c. q. f. d.}$$

¹³ Nous renonçons ici à mettre les fonctions entre crochets { }.

Il importe de remarquer que, dans cette démonstration, on n'a pas profité de l'hypothèse que les fonctions considérées sont de la forme $\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\lambda t}$. Cette démonstration est donc légitime pour les fonctions arbitraires $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sommables dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$, pourvu que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-st} F_i(t) dt$ ($i=1,2$) soit convergente pour s suffisamment grand, c'est-à-dire pour toutes les fonctions $F_1, F_2 \in L_{\infty}(x)$ (voir N° 12).

On est ainsi conduit à une extension de la transformation (41) au domaine $L_{\infty}(x)$. La composition de deux fonctions de $L_{\infty}(x)$ entraîne la multiplication (au sens ordinaire) des fonctions correspondantes du contredomaine. C'est en utilisant ce fait qu'on peut ramener certains problèmes d'analyse à ceux d'algèbre.

Il est de coutume d'employer, au lieu de la transformation (41), la transformation équivalente

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

(où s peut être complexe), dite *transformation de Laplace*. La théorie de cette transformation est très développée¹⁴).

42. Comparaison de la méthode de transformation de Laplace à celle d'anneaux complexes. L'application de la transformation de Laplace à la résolution des équations différentielles (à coefficients constants) consiste en ce qu'on remplace les fonctions par leurs transformées. Cela ramène le problème à la résolution des équations algébriques. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce procédé. Nous nous bornerons à remarquer que les calculs que l'on a à effectuer en suivant cette voie sont analogues à ceux qui résultent de la théorie des anneaux algébriques.

Or, le même algorithme a été employé, tout formellement, par Heaviside¹⁵); on l'appelle souvent *calcul de Heaviside*. On ne connaissait, tout d'abord, aucune démonstration mathématique de la validité de ce genre de calcul. La seule raison de l'employer était le fait qu'il conduisait le plus rapidement aux résultats qui pouvaient être vérifiés ensuite par une autre voie.

La théorie de la transformation de Laplace a donné à ce calcul, jusque-là mystérieux et obscur, une base mathématique sûre. La théorie des anneaux complexes en donne une autre.

¹⁴ Voir par exemple G. Doetsch [2] et aussi D. V. Widder [12].

¹⁵ O. Heaviside [4].

Quoique les deux méthodes soient également légitimes, celle des anneaux complexes paraît plus naturelle que l'autre. En effet, elle donne la résolution générale, tandis que la transformation de Laplace rétrécit le champ des applications du calcul à la classe des fonctions $F(t)$ définies dans l'intervalle $(0, \infty)$ et dont l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-at} F(t) dt$ converge.

Remarquons que, pour cette raison, les exemples 38.2, 38.3 et 39 ne peuvent pas être résolus au moyen de la transformation de Laplace.

La théorie des anneaux complexes présente encore un autre avantage: elle est susceptible de diverses interprétations, ce qui permet de l'appliquer à bien d'autres problèmes. Nous en étudierons, par exemple, aux N^{os} 43-46, l'interprétation $[F]$ qui est liée à la théorie des équations intégrales de Fredholm.

43. L'anneau complexe $[F]$. L'équation intégrale de Fredholm. L'anneau $[F]$, envisagé déjà au N^o 29, se compose de deux anneaux algébriques partiels, à savoir $A_1 =$ l'ensemble de tous les nombres complexes (avec addition et multiplication définies au sens habituel) et, $A_2 = F$ (N^o 14). Les éléments de l'anneau A_1 (nombres) sont désignés par les lettres grecques $\alpha, \dots, \lambda, \dots$ et ceux de F (vecteurs) par les lettres latines $a, \dots, k, \dots, u, \dots$, ou par les symboles

$$\{u(x, y)\}, \dots, \{k(x, y)\}, \dots, \{u(x, y)\}, \dots$$

Cela étant, l'équation intégrale de Fredholm

$$(43) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, s) u(s) ds$$

peut s'écrire sous la forme

$$\{u(x)\} = \{f(x)\} + \lambda \{k(x, y)\} \cdot \{u(x)\}$$

ou simplement

$$u = f + \lambda ku^{16}.$$

Pareillement, l'équation associée à (43)

$$u(y) = f(y) + \lambda \int_0^1 k(s, y) u(s) ds$$

s'écrira

$$u = f + \lambda uk.$$

¹⁶⁾ La circonstance que f et u sont des fonctions d'une seule variable n'est pas gênante, car elles peuvent être traitées comme fonctions de deux variables x, y qui sont constantes par rapport à y .

44. Valeurs propres et spectre d'un vecteur. L'interprétation ci-dessus permet, comme nous le verrons dans la suite, de présenter certaines démonstrations de la théorie des équations intégrales de Fredholm sous une forme très claire et courte. De plus, les théorèmes peuvent être énoncés sous une forme plus générale et qui se rattachera à un anneau quelconque du type $[A]$ (voir N° 29). Cependant, il nous sera commode de garder la terminologie adoptée dans la théorie classique des équations intégrales.

On considère généralement l'anneau complexe du type $[A]$ composé de deux anneaux algébriques A_1 et A_2 . D'après la convention adoptée, les éléments de A_1 , qui sont des *nombre*s, seront désignés par les lettres grecques et ceux de A_2 , dits *vecteurs*, par les lettres latines.

Si k appartient à A_2 , l'élément

$$1 - \lambda k$$

peut avoir un élément inverse ou en être dépourvu; cela dépend en général de la valeur du nombre λ . Les valeurs de λ pour lesquelles l'élément $1 - \lambda k$ n'a pas d'élément inverse seront dites *valeurs propres* de k et leur ensemble portera le nom du *spectre* de k .

Considérons maintenant les deux équations linéaires

$$(44.1) \quad u = f + ku, \quad u = f + uk,$$

où u est l'inconnue et f, k sont les vecteurs donnés. Si λ n'appartient pas au spectre de k , chacune de ces équations possède d'après N° 26 une et une seule solution respectivement:

$$u = \frac{1}{1 - \lambda k} f, \quad u = f \frac{1}{1 - \lambda k}.$$

Dans la théorie classique des équations intégrales, on représente d'habitude ces solutions sous une autre forme. Pour l'obtenir, remarquons que

$$(44.2) \quad \frac{1}{1 - \lambda k} = 1 + \lambda \frac{k}{1 - \lambda k}.$$

L'expression

$$\check{k}(\lambda) = \frac{k}{1 - \lambda k}$$

sera dite la *résolvante* de k .

Cela étant, les solutions peuvent s'écrire sous la forme qui rappelle respectivement celle des équations données, à savoir :

$$u = f + \lambda \check{k}(\lambda) f, \quad u = f + \lambda f \check{k}(\lambda).$$

45. Certaines propriétés de la résolvante. En effectuant les calculs algébriques, il est aisé de vérifier l'égalité

$$\frac{k}{1 - \lambda k} - \frac{k}{1 - \mu k} = (\lambda - \mu) \frac{k}{1 - \lambda k} \frac{k}{1 - \mu k}$$

ou bien

$$\check{k}(\lambda) - \check{k}(\mu) = (\lambda - \mu) \check{k}(\lambda) \check{k}(\mu);$$

cette égalité est connue dans la théorie des équations intégrales sous le nom d'*équation générale du noyau résolvant*¹⁷⁾. Elle est due à Hilbert.

Lorsque $k_1 k_2 = k_2 k_1 = 0$, il vient d'après un calcul tout simple

$$\frac{k_1}{1 - \lambda k_1} + \frac{k_2}{1 - \lambda k_2} = \frac{k_1 + k_2}{1 - \lambda(k_1 + k_2)},$$

c'est-à-dire

$$\check{k}_1(\lambda) + \check{k}_2(\lambda) = \check{k}_1 + \check{k}_2(\lambda).$$

Cette égalité correspond à un théorème de Goursat sur les noyaux orthogonaux¹⁸⁾.

Remarque 45. Si l'on se borne à l'anneau particulier $[f]$, les considérations précédentes deviennent très analogues à celles développées par Volterra dans la théorie des fonctionnelles¹⁹⁾. Or, l'auteur n'y utilise pas de notions de l'algèbre abstraite, en particulier celle d'*anneau algébrique*, ce qui l'empêche de donner les démonstrations complètes. Il se sert cependant des développements de la résolvante en *séries*, en rétrécissant ainsi leur portée aux valeurs de λ suffisamment petites. Par contre, la théorie des anneaux complexes fournit une démonstration générale qui est valable pour tout λ , pourvu que la résolvante existe (c'est-à-dire pour tout λ qui n'appartient pas au spectre).

46. Cas de la solubilité algébrique. La résolution des équations (44.1) peut se faire — comme nous l'avons vu au N° 41 — à l'aide de la résolvante $\frac{k}{1 - \lambda k}$. Il peut arriver que cette résolvante est de la forme

$$(46.1) \quad \frac{k}{1 - \lambda k} = \varphi_1(\lambda) k + \varphi_2(\lambda) k^2 + \dots + \varphi_n(\lambda) k^n,$$

¹⁷⁾ Voir par exemple T. Lalesco [6], p. 41, ou G. Kowalewski [5], p. 122.

¹⁸⁾ E. Goursat [3], T. Lalesco [6], p. 39.

¹⁹⁾ V. Volterra et J. Pérès [10], pp. 247, 249 et 250.

où $\varphi_i(\lambda)$ sont des nombres ²⁰⁾ qui dépendent en général de λ et qui sont définis pour tout λ pour lequel $\frac{k}{1-\lambda k}$ existe (on suppose que $\varphi_n(\lambda)$ n'est pas identiquement nul pour $\lambda \neq 0$). On dira dans ce cas que les équations proposées sont *résolubles algébriquement*.

En multipliant l'égalité (46.1) par $1 - \lambda k$ et en l'ordonnant suivant les puissances de k , il vient

$$(46.2) \quad a_1 k + a_2 k^2 + \dots + a_{n+1} k^{n+1} = 0,$$

où

$$(46.3) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \varphi_1(\lambda) - 1, \\ \alpha_2 = \varphi_2(\lambda) - \lambda \varphi_1(\lambda), \\ \dots \\ \alpha_n = \varphi_n(\lambda) - \lambda \varphi_{n-1}(\lambda), \\ \alpha_{n+1} = -\lambda \varphi_n(\lambda). \end{cases}$$

En fixant ensuite $\lambda \neq 0$ de façon que $\varphi_n(\lambda) \neq 0$, on voit qu'il existe (dans le cas de la solubilité algébrique) un système de nombres (constants)

$$(46.4) \quad a_1, \dots, a_{n+1} \quad (a_{n+1} \neq 0)$$

tel que la combinaison linéaire (46.2) des puissances k, \dots, k^{n+1} s'annule.

Réciproquement, nous allons voir que l'existence d'un système de nombres (46.4) tel que l'égalité (46.2) a lieu entraîne toujours la solubilité algébrique de l'équation proposée.

En effet, si la relation (46.2) a lieu, la formule (46.1) donnera à coup sûr la résolvante dès qu'on détermine les $\varphi_i(\lambda)$ d'après les équations (46.3). On tire de ces équations

$$\varphi_i \lambda = \frac{a_{n+1} \lambda^{i-1} + a_n \lambda^i + \dots + a_{i+1} \lambda^{n-1}}{a_{n+1} + a_n \lambda + \dots + a_1 \lambda^n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

En résumé:

Pour que les équations (46.1)

$$u = f + \lambda k u \quad \text{et} \quad u = f + \lambda u k$$

soient résolubles algébriquement, il faut et il suffit qu'il existe un système a_1, \dots, a_{n+1} de valeurs complexes ($a_{n+1} \neq 0$) tel que

$$a_1 k + \dots + a_{n+1} k^{n+1} = 0.$$

²⁰⁾ Nous disons que les $\varphi_i(\lambda)$ sont des *nombres* pour souligner qu'ils appartiennent à l'anneau A_1 .

Nous avons démontré, de plus, que les coefficients $\varphi_i(\lambda)$ sont rationnels en λ et que leur dénominateur est du degré $\leq n$. Donc, dans le cas de la solubilité algébrique, la résolvante est déterminée pour tout λ complexe, sauf pour un nombre fini des valeurs au plus.

Considérons enfin le noyau $k(x, y) = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu}(x) b_{\mu}(y)$ d'une équation de Fredholm $u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, s) u(s) ds$. Lorsque a_{μ} et b_{μ} ($\mu = 1, \dots, m$) sont des éléments de l'anneau F , on peut écrire $k = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} b_{\mu}$. Nous allons montrer que, dans ce cas, il existe un système de $m^2 + 1$ nombres a_1, \dots, a_{m^2+1} (dont l'un au moins est différent de zéro) tel que $a_1 k + \dots + a_{m^2+1} k^{m^2+1} = 0$ et que, par suite, l'équation proposée est résoluble algébriquement.

En effet, remarquons que l'on a $a_i b_j \cdot a_k b_l = \gamma_{jk} a_i b_l$ pour tout système d'entiers i, j, k, l tels que $1 \leq i, j, k, l \leq m$, où γ_{jk} sont des nombres. On a aussi $k^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^m \gamma_{\mu\nu} a_{\mu} b_{\nu}$ et, d'une façon générale, $k^r = \sum_{\mu, \nu=1}^m \gamma_{\mu\nu} a_{\mu} b_{\nu}$ ($r = 1, 2, \dots$), où γ_{jk} sont des nombres convenablement choisis. Or, cela prouve notre assertion.

Table des matières

	Page
Introduction	1
Chapitre I. Addition.	
1. Notion de groupe abélien additif	3
2. Propriétés fondamentales du groupe abélien	4
3. Remarque	5
4. Autres propriétés du groupe abélien	5
5. Soustraction	6
6. Groupes complexes	6
7. Autre notation	7
Chapitre II. Multiplication.	
8. Anneau algébrique	8
9. Diverses interprétations du produit	9
10. Propriétés fondamentales de la composition des fonctions d'une variable	9
11. Démonstration de la formule $\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_l a(u + \theta) - a(u) du = 0$	11
12. L'anneau I_T	12
13. Les sous-anneaux de I_T	13
14. L'anneau F	14
15. L'anneau V_{AB}	16
16. Les sous-anneaux de F et de V_{AB}	17
17. Les anneaux \check{I}_T, \check{F} et \check{V}_{AB}	17
18. Autres propriétés d'anneaux algébriques	17
19. Éléments permutable	18
20. Puissance	19
21. Règles pratiques du calcul	19
22. Le „zéro” dans l'anneau algébrique	20
23. L' „unité” dans l'anneau algébrique	20
24. Les anneaux $I_T, \check{I}_T, V_{AB}, \check{V}_{AB}, F$ et \check{F} sont dépourvus d'élément unité	21
25. Éléments inverses	22
26. Équation linéaire	23
27. Anneau complexe	24
28. Définition générale de l'anneau complexe	26
Chapitre III. Applications.	
29. Anneaux complexes du type $\{A\}$	29
30. L'élément $l = \{1\}$ de l'anneau I_T	29
31. L'anneau complexe $\{I_T\}$	30
32. Éléments de la forme $1 + \alpha_1 l + \dots + \alpha_n l^n$	30
33. Application aux équations différentielles à coefficients constants	31
34. Évaluation de Q par la décomposition en une somme	33
35. Démonstration de l'existence de la décomposition de Q	33
36. Démonstration de la formule $\frac{l^\nu}{(1 - \lambda l)^\nu} = \left\{ \frac{l^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\lambda l} \right\}$	34

	Page
37. Exemples	35
38. Exemples de la résolution des équations différentielles	35
39. Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants	36
40. L'équation intégrale d'Abel	38
41. Introduction des intégrales définies. Transformation de Laplace	38
42. Comparaison de la méthode de transformation de Laplace à celle d'anneaux complexes	40
43. L'anneau complexe $[F]$. L'équation intégrale de Fredholm	41
44. Valeurs propres et spectre d'un vecteur	42
45. Certaines propriétés de la résolvante	43
46. Cas de la solubilité algébrique	43

Littérature

- [1] Churchill, R. V., *Modern Operational Mathematics in Engineering*, New York 1944.
- [2] Doetsch, G., *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin 1937.
- [3] Goursat, E., *Sur les équations intégrales* (Note), C. R. Paris 1907.
- [4] Heaviside, O., *Electromagnetic Theory*, London 1899.
- [5] Kowalewski, G., *Integralgleichungen*, Berlin 1930.
- [6] Lalesco, T., *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Paris 1912.
- [7] Mac Duffee, C. C., *An Introduction to Abstract Algebra*, New York 1940.
- [8] Mikusiński J. G., *Les méthodes algébriques dans l'analyse fonctionnelle* (Note), C. R. Paris 1947.
- [9] Saks, S., *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, 7, Warszawa 1937.
- [10] Volterra V. et Pèrès J., *Théorie générale des fonctionnelles I*, Paris 1936.
- [11] Waerden, B. L. Van der, *Moderne Algebra I*, Berlin 1937.
- [12] Widder, D. V., *The Laplace Transform*, Princeton 1946.

Streszczenie

W pierwszej części pracy „Pierścień algebraiczny i jego zastosowania w analizie funkcyjnej” wprowadzam pojęcie *pierścienia zespolonego* (28), będącego naturalnym związaniem n dowolnych pierścieni algebraicznych (elementy tego pierścienia nazywałem w dawniejszych pracach *hyperliczbami*). Wykazuję, że pojęcie to nadaje się do teoretycznego i praktycznego rozwiązywania równań różniczkowych o współczynnikach stałych. Metoda ta jest ogólniejsza od ogólnie stosowanej metody transformacji Laplace'a, która nie nadaje się np. do rozwiązania zadań 38.2, 38.3 i 39. Przy pomocy pierścienia zespolonego dają się udowodnić niektóre twierdzenia z równań całkowych Fredholma (45-46). Dowody te są prostsze i ogólniejsze od metod stosowanych np. przez Volterrę w jego teorii funkcjonałów liniowych (Remarque 45),

Podstawowe własności *iloczynu całkowego* (produit de composition 10), który gra ważną rolę w analizie funkcyjnej, podaję w formie ostrzejszej niż w większości podręczników [por. Doetsch (1937), Widder (1946)].

Teorię klasyczną pierścienia algebraicznego starałem się wyłożyć systematycznie, przez stopniowe wprowadzanie nowych pojęć i podawanie licznych przykładów, pragnąc w ten sposób udostępnić lekturę czytelnikom nieobznajmionym z *algebrą abstrakcyjną*.