ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. I, Nr 2 SECTIO A 1946

Z Seminarium Matematycznego II. Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: Prof. Dr Jan G.-Mikusiński

Jan G.-Mikusiński

# Sur la notion de point remarquable dans la géometrie du triangle

## (O pojęciu punktu osobliwego w geometrii trójkąta)

**Introduction.** Le grand nombre des "points remarquables" discutés dans la géométrie du triangle, suggère la supposition que le nombre de tous les points remarquables soit infini, ou même que chaque point du plan, choisi au hasard, puisse être considéré comme remarquable. En réalité, le problème ne gagne son sens qu'après que la notion de point remarquable soit précisée. C'est ce qui est le but principal de cet article.

Nous distinguons des *points remarquables au sens large* et ceux *au sens restreint,* cette dernière classe étant la plus importante. Chaque point singulier au sens restreint est lié, par ses coordonnées barycentriques, avec un polynome $\lambda(x,y,z)$ homogène, à coefficients entiers. Réciproquement, chaque polynome $\lambda(x,y,z)$ satisfaisant à certaines conditions, détermine un point remarquable.

En imposant une borne supérieure au degré et aux coefficients du polynome, on peut diminuer à volonté le nombre des points singuliers correspondants. Pour les points les plus connus, le degré de $\lambda(x,y,z)$ ne surpasse pas le nombre 4 et les coefficients $a_i$ de ce polynome satisfont à l'inégalité $|a_i| \leq 2$.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude à M. K. Cwojdziński qui m'a suggéré, par ses observations, le sujet du présent article.

**1. Point remarquable au sens large.** La notion de "point remarquable" est une sorte de fonction qui fait correspondre à chaque triangle $T$ un point $P$, appartenant au même plan. Il va sans dire que l'on doit considérer deux points remarquables différents p. e. barycentre, ortocentre etc., comme des fonctions différentes. Or, toute fonction (faisant correspondre à un triangle un point du même plan) ne peut être considérée comme "point remarquable". Elle doit plutôt satisfaire à certaines conditions. Les postulats ci-dessous peuvent être adoptés comme définition générale d'une fonction, qui détermine le point remarquable (au sens large), ou tout simplement comme définition du point remarquable (au sens large).

$1^0$ *La fonction doit être invariante par rapport aux transformations euclidiennes: si le triangle $T$ est soumis aux translations ou aux rotations, le point $P$ doit conserver sa position relative par rapport au triangle.*

$2^0$ *Si 2 triangles $T_1$ et $T_2$ sont symétriques par rapport à une droite, les points correspondants $P_1$ et $P_2$ le sont aussi.*

$3^0$ *Si 2 triangles $T_1$ et $T_2$ sont homothétiques par rapport à un point $O$, les points $P_1$ et $P_2$ le sont aussi.*

Le second de ces postulats peut être négligé, si l'on admet, dans le premier, des rotations dans l'espace à 3 dimensions.

On déduit facilement des postulats ci-dessus que *tout point remarquable d'un triangle isocèle est situé toujours sur son axe de symétrie*; donc *tout point remarquable d'un triangle équilatéral, coïncide avec son centre.*

**2. Interprétation analytique.** En vertu de l'invariabilité par rapport à des translations et à des rotations, il semble le plus convenable de déterminer la position du point $P$ à l'aide des coordonnées barycentriques $\xi_1, \xi_2, \xi_3$. Ces coordonnées satisfont, notamment, toujours à la relation

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \tag{1}$$

quel que soit le point $P$.

Les coordonnées du point remarqnable $P$ dépendent, en général, des côtés $a_1, a_2, a_3$ du triangle considéré $T$; elles s'expriment donc en fonctions de ces côtés, p. e.

$$\xi_1 = \varphi(a_1, a_2, a_3).$$

Aucun de ces cotés n'étant spécialement distingué, leur rôle est symétrique et l'on a

$$\xi_2 = \varphi(a_2, a_3, a_1),$$
$$\xi_3 = \varphi(a_3, a_1, a_2).$$

La fonction $\varphi(x,y,z)$ jouit des propriétés suivantes:

I. *elle est homogène du degré* 0;

II. *elle est symétrique par rapport aux deux dernières variables*;

III. $\varphi(x,y,z) + \varphi(y,z,x) + \varphi(z,x,y) = 1.$

Les propriétés I et II sont des conséquences des postulats géométriques, adoptés dans le № 1, la propriété III résulte de la relation (1).

On peut dire qu'une fonction $\varphi(x,y,z)$ qui jouit de 3 propriétés ci-dessus, définit analytiquement une singularité (au sens large) d'un point P.

**3. Les points remarquables classiques.** Pour illustrer notre définition, nous donnons ici, dans le cas de quelques points singuliers classiques, la forme explicite de la fonction $\varphi(x,y,z)$ :

1. Centre de gravité : $\varphi = \frac{1}{3}$;
2. Centre du cercle inscrit :

$$\varphi = \frac{x}{x+y+z};$$

3. Centre du cercle circonscrit :

$$\varphi = \frac{x^2(-x^2+y^2+z^2)}{2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-x^4-y^4-z^4};$$

4. Ortocentre :

$$\varphi = \frac{x^4-(y^2-z^2)^2}{2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-x^4-y^4-z^4}.$$

**4. Le point remarquable au sens restreint.** Nous adopterons cette dénomination dans le cas, où la fonction $\varphi$ peut être représentée comme le quotient de deux polynomes à coefficients entiers

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\lambda(x,y,z)}{\mu(x,y,z)}.$$

La classe des points remarquables correspondants est beaucoup plus étroite, mais, en même temps, la plus importante. Tous les points cités dans le No précédent, sont singuliers au sens restraint.

En supposant que les polynomes $\lambda$ et $\mu$ n'aient pas de diviseur commun, ces polynomes sont, à signe près, déterminés pour chaque point remarquable (au sens restreint).

Ces polynomes sont liés par la relation

$$\mu(x,y,z) = \lambda(x,y,z) + \lambda(y,z,x) + \lambda(z,x,y).$$

Il suffit donc de connaître la forme de $\lambda(x,y,z)$, pour trouver $\mu(x,y,z)$ et ensuite la fonction $\varphi(x,y,z)$.

Les polynomes

$$\lambda = 1,$$
$$\lambda = x,$$
$$\lambda = x^2(-x^2+y^2+z^2),$$
$$\lambda = x^4-(y^2-z^2)^2,$$

sont caractéristiques pour les 4 points, considérés dans le No précédent.

En substituant pour $\lambda(x,y,z)$ des différents polynomes homogènes, symétriques par rapport à $y,z$, on est conduit à une infinité de points remarquables (au sens restreint). On peut supposer que c'est surtout parmi les polynomes simples, de degré et de coefficients pas trop élevés, que l'on trouvera les points remarquables les plus intéressants.

Par exemple, en posant $\lambda = x^2$, on retrouve le point *symédian* (de Lemoine).

## Streszczenie

Wielka liczba „punktów osobliwych" rozważanych w geometrii trójkąta nasuwa przypuszczenie, że liczba ich jest nieskończona, albo nawet że każdy punkt płaszczyzny, wybrany na „chybił trafił", może być uważany za punkt osobliwy. W rzeczywistości zagadnienie to nabiera sensu dopiero po wprowadzeniu ścisłej *definicji* punktu osobliwego. To właśnie jest głównym celem tego artykułu.

Rozróżniamy punkty *osobliwe w sensie szerszym* i punkty *osobliwe w sensie węższym*. Każdy punkt tej ostatniej kategorii związany jest z pewnym wielomianem $\varphi(x,y,z)$ jednorodnym, o współczynnikach całkowitych. Odwrotnie, każdy wielomian $\varphi(x.y,z)$, czyniący zadość pewnym warunkom, określa punkt osobliwy.

Ograniczając z góry stopień wielomianu i bezwzględną wartość jego współczynników, można zacieśnić dowolnie liczbę odpowiednich punktów osobliwych. Okazuje się, że dla najbardziej pospolitych punktów osobliwych stopień wielomianu nie przekracza liczby 4, zaś jego współczynniki spełniają nierówność $|a_i| \leq 2$.