ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. I, Nr 2 SECTIO A 1946

Z Seminarium Matematycznego II Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Jan G.-Mikusiński

Jan G.-Mikusiński

Sur l'équation differentielle $y^{(6)}+y=0$ [1]

(O równaniu różniczkowym $y^{(6)}+y=0$)

Introduction. Considérons l'ensemble E des intégrales $y=\varphi(x)$ de l'équation

$$y^{(n)}+A(x)y=0 \qquad [A(x)=\text{fonction réelle, continue}]$$

telles que $\varphi(0)=0$ et $\varphi(x)>0$ dans le voisinage droit du point $x=0$. Faisons correspondre à chaque intégrale $\varphi(x)$ de l'ensemble E un nombre positif $l\varphi$ tel que $(0,l\varphi)$ soit le plus grand intervalle, où $\varphi(x)>0$.

Désignons par λ_n $(n=2, 3, \ldots)$ la borne supérieure des $l\varphi$ dans le cas où $A(x)\equiv 1$. Pour $n=2, 3, 4, 5$ on trouve les valeurs approchées:

$$\lambda_2\sim 3{,}14, \quad \lambda_3\sim 4{,}23, \quad \lambda_4\sim 8{,}88, \quad \lambda_5\sim 9{,}67 \text{ [2]}.$$

L'évaluation du nombre λ_6 est le sujet de cet article.

1. Nous démontrerons que les distances entre les zéros successifs de toutes les intégrales de l'équation de sixième ordre

$$(1) \qquad y^{(6)}+y=0$$

sont $\leq 5\pi$ [3].

---

[1]) Le résultat énoncé dans cet article a été obtenu en 1943, il n'a pu être publié plus tôt à cause de l'occupation allemande.

[2]) En cherchant la valeur de λ_2 on ne trouve aucune difficulté. Quant à celles de λ_3 et de λ_4 voir p. e. mon article „Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires", (ces Annales pp. 29—35). La méthode d'évaluation de λ_5 n'a pas encore été publiée.

[3]) D'après l'article „Sur l'inégalité différentiele $|f^{(n)}(x)|\geq m|f(x)|$" [*Comptes Rendus*, Paris, 222, 359—361 (1946)] on trouve que ces distances sont inférieures à $22\sqrt[6]{7!}\sim 91$. La valeur $5\pi\sim 15{,}7$ est évidemment beaucoup plus précise.

Pour le démontrer, on n'a pas besoin de considérer *toutes* les intégrales de cette équation, il suffit de se borner à celles qui sont des fonctions *paires*. De plus, on n'a à considérer, dans cette classe restreinte des intégrales, que les moindres zéros positifs (et les zéros négatifs de la même valeur absolue). Cela résulte, en effet, du lemme suivant:

Lemme 1. *Si $x_1 < x_2$ sont deux zéros consécutifs d'une intégrale quelconque de (1), il existe toujours une intégrale $y_0(x)$ de la même équation qui est une fonction paire, différente de zéro pour $x=0$, et dont le moindre zéro positif est égal à $\frac{x_2-x_1}{2}$.*

On vérifie, en effet, aisément, en posant $y_0(x) = y\left(x+\frac{x_1+x_2}{2}\right) + y\left(-x+\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, que cette fonction $y_0(x)$ satisfait à toutes les conditions requises.

La théorie générale des équations différentielles à coefficients constants permet de trouver la forme explicite d'une intégrale paire de (1), *différente de zéro pour $x=0$.* La voici:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sh}\frac{x\sqrt{3}}{2} \sin\frac{x}{2} + c_3 \operatorname{ch}\frac{x\sqrt{3}}{2} \cos\frac{x}{2} \text{ [1]}; \tag{2}$$

les constantes c_1, c_2 et c_3 sont soumises à une condition unique $c_1+c_3 \neq 0$.

En tenant compte de ce que nous venons de dire, notre théorème se ramène au lemme suivant:

Lemme 2. *L'équation*

$$y(x)=0, \tag{3}$$

où $y(x)$ a la forme (2), possède au moins une racine dans l'intervalle $0 < x \leq \frac{5\pi}{2}$.

D é m o n s t r a t i o n. On peut supposer que $c_1 \geq 0$ [dans le cas contraire on n'aurait qu'à multiplier $y(x)$ par -1]. Celà posé, nous distinguerons les 4 cas suivants:

1° lorsque $c_2 \geq 0$, $c_3 \geq 0$, on a $y(0) > 0$, $y\left(\frac{5\pi}{2}\right) \leq 0$,

2° lorsque $c_2 \leq 0$, $c_3 \geq 0$, on a $y(0) > 0$, $y(\pi) \leq 0$.

3° lorsque $c_2 \geq 0$, $c_3 \leq 0$, on a $y(2\pi) \geq 0$, $y(3\pi) \leq 0$,

4° lorsque $c_2 \leq 0$, $c_3 \leq 0$, on a $y\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$, $y(2\pi) \geq 0$.

La fonction $y(x)$ étant continue, on a donc, en désignant par x_0 la moindre racine positive de l'équation (3), respectivement

[1]) sh = sinus hyperbolicus, ch = cosinus hyperbolicus.

$$x_0 \leq \frac{5\pi}{2}, \qquad x_0 \leq \pi, \qquad x \leq 3\pi, \qquad x \leq 2\pi$$

dans les cas considérés. On voit que $x_0 \leq \frac{5\pi}{2}$ dans tous les cas à l'exception, tout au plus, de 3°. Noûs montrerons qu'il est possible, dans le cas 3° également, c'est-à-dire pour $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ et $c_3 \leq 0$, d'améliorer la limite supérieure de x_0 jusqu'à $\frac{5\pi}{2}$. En effet, on a à distinguer ici 2 cas que voici :

$$\text{a)}\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0.$$

$$\text{b)}\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0;$$

Comme $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \geq 0$, on a dans le cas a) sûrement $x_0 \leq \frac{3\pi}{2}$. Il ne reste donc à considérer que le second cas. En vertu de (2) on peut écrire l'inégalité b) sous la forme

$$c_2 \operatorname{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + c_3 \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 0,$$

d'où

$$(4) \qquad -c_3 < c_2 \operatorname{th}\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \text{ [1]}.$$

En profitant des propiétés des fonctions sinus et cosinus, on peut ècrire

$$(5) \qquad y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -c_2 \operatorname{sh}\frac{5\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - c_3 \operatorname{ch}\frac{5\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, en vertu de (4),

$$y\left(\frac{5\pi}{2}\right) < -\frac{c_2}{\sqrt{2}} \operatorname{ch}\frac{5\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\operatorname{th}\frac{5\pi\sqrt{3}}{4} - \operatorname{th}\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\right).$$

La fonction tangens hyperbolicus étant croissante, l'expression entre les paranthèses est positive et l'on a $y\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0$. Il s'en suit, en vertu de $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$, qu'il existe dans l'intervalle $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ une racine au moins de l'équation (3).

Le théorème est ainsi démontré entièrement.

2. On voit d'après le numéro précédent que $\lambda_6 \leq 5\pi$. D'autre part on peut vérifier que la fonction

$$y_0(x) = \varepsilon \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sh}\frac{(x - 2\pi)\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right),$$

où ε est une constante positive suffisamment petite, est une intégrale

[1]) th = tangens hyperbolicus.

de (1) qui s'annule pour $x=0$ et qui est positive $0<x\leq 4\pi$. En vertu de la définition de λ_6 on est donc conduit à l'inégalité

$$4\pi\leq\lambda_6\leq 5\pi.$$

Nous exposerons maintenant une méthode qui perment de renfermer λ_6 dans un intervalle beaucoup plus étroit, notamment dans l'intervalle:

$$\mathbf{15{,}47}<\lambda_6<\mathbf{15{,}48}.$$

Nous démontrerons d'abord que $\lambda_6<15{,}48$. Il suffit, dans ce but, de faire voir que le nombre x_0 du numéro précédent est toujours inférieur à 7,24. Or, on a obtenu ci-dessus l'inégalité $x_0<2\pi$, dans tous les cas à l'exception de ceux-ci:

1^0 $c_1\geq 0,\ c_2\geq 0,\ c_3\geq 0$;

3^0 b) $c_1\geq 0,\ 0\leq -c_3<c_2\,\mathrm{th}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Nous montrerons qu'il est encore possible de rétrécir, dans ces deux cas, la limite supérieure de x_0.

Considérons d'abord le cas 1^0. Lorsque $y(\pi)\leq 0$, on a $x_0\leq\pi$, car $y(0)>0$. Lorsque, au contraire,

$$y(\pi)=-c_1+c_2\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2}>0, \tag{6}$$

on considère encore la valeur

$$y\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{7\pi\sqrt{3}}{6}-c_3\,\mathrm{ch}\,\frac{7\pi\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

qui, en vertu de 1^0 et (6), est négative, la fonction sinus hyperbolicus étant croissante. Alors $x_0<\frac{7\pi}{2}$. On obtient donc toujours $x_0<\frac{7\pi}{3}$ dans le cas 1^0.

Nous abordons maintenant le cas 3^0b). Lorsque $y(\pi)\leq 0$, on a $x_0\leq 2\pi$, car $y(2\pi)\geq 0$. Lorsque $y(\pi)>0$, on a, en vertu de (4) et (6)

$$y(x)<c_2\varphi(x)\qquad\text{pour } 2\pi<x<\frac{5\pi}{2},$$

où

$$\varphi(x)=\mathrm{sh}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\cos x+\mathrm{sh}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}-\mathrm{th}\,\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{ch}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Si ξ est une racine de l'équation $\varphi(x)=0$ contenue dans l'intervalle $2\pi<x<\frac{5\pi}{2}$, on a $y(\xi)<0$ et par suite $x_0<\xi$, car $y(2\pi)>0$. En évaluant ξ par des méthodes numériques, on trouve

$$7{,}735<\xi<7{,}74. \tag{7}$$

Or, il est aisé de voir que $2\pi<\frac{7\pi}{3}<\xi$, on a donc $x_0<\xi$ dans tous les cas possibles.

Pour obtenir maintenant l'inégalité $15,47 < \lambda_6$ il suffit de démontrer qu'il existe une intégrale $y(x)$ de (1) qui soit une fonction paire, non nulle pour $x=0$ et dont le moindre zéro positif η soit supérieur à 7,735. En effet, lorsque $y(x)$ est une telle intégrale, la fonction $y_1(x) = y(x-\eta)$ est encore une intégrale de (1) qui s'annule pour $x=0$ et dont le moindre zéro positif est supérieur à $2\eta \geq 15,47$, c'est ce qui entraîne l'inégalité $15,47 < \lambda_6$.

Pour construire une intégrale qui satisfait aux conditions exigées nous considérons d'abord une intégrale particulière $y_0(x)$ de la forme (2), où

$$c_1 = \sqrt{3} + \operatorname{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}, \qquad c_2 = 2\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2}}{4}, \qquad c_3 = -2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{4};$$

les coefficients ci-dessus sont choisis de la sorte que $y_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_0'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. En étudiant le comportement de la fonction $y_0(x)$ (p. e. par la méthode de la différentation), on vérifie que l'équation

$$(9) \qquad y_0(x) = \left(\sqrt{3} + \operatorname{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)\cos x + 2\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\cdot\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} -$$
$$2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

possède, dans l'intervalle $0 \leq x < \frac{5\pi}{2}$ exactement 2 racines: l'une, égale à $\frac{\pi}{2}$, est double; la seconde, soit ξ', est simple et appartient à l'intervalle $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$. En outre, la fonction $y_0(x)$ est positive pour $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ et pour $\frac{\pi}{2} < x < \xi'$.

En appliquant les méthodes numériques, on trouve pour ξ' les mêmes inégalités que pour ξ:

$$7,735 < \xi' < 7,74.$$

Posons maintenant

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} \qquad (\varepsilon > 0),$$

$y(x)$ sera encore une intégrale de (1). Pour ε suffisamment petit on obtient une intégrale $y(x)$ qui est différente de zéro pour $x=0$ et dont le moindre zéro positif η s'approche autant que l'on veut de ξ'. On peut donc choisir un tel ε que η satisfait aux mêmes inégalités que ξ:

$$7,735 < \eta < 7,74.$$

Comme l'intégrale $y(x)$ est une fonction paire, elle satisfait ainsi à toutes les conditions exigées.

Streszczenie

Weźmy pod uwagę zbiór E całek $y=\varphi(x)$ równania

$$y^{(n)}+A(x)y=0 \quad [A(x) = \text{funkcja rzeczywista, ciągła}]$$

takich że $\varphi(0)=0$ i $\varphi(x)>0$ w prawostronnym otoczeniu punktu $x=0$. Przyporządkujmy każdej całce $\varphi(x)$ zbioru E liczbę dodatnią l_φ, taką żeby $(0,l_\varphi)$ był największym przedziałem, w którym $\varphi(x)>0$.

Oznaczmy przez λ_n $(n=2, 3,\ldots)$ kres górny liczb l_φ w przypadku $A(x)\equiv 1$. Dla $n=2, 3, 4, 5$ mamy odpowiednio: $\lambda_2\sim 3{,}14$; $\lambda_3\sim 4{,}23$; $\lambda_4\sim 8{,}88$ $\lambda_5\sim 9{,}67$. Przybliżone obliczenie wartości λ_6 jest celem niniejszego artykułu. Okazuje się, że dla rozwiązania zagadnienia wystarcza rozważać funkcje $\varphi(x)$ kształtu

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sh}\frac{x\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} + c_3 \operatorname{ch}\frac{x\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2};$$

uwzględniając różne kombinacje znaków współczynników c_1, c_2, c_3, dowodzimy, że $15{,}47<\lambda_6<15{,}48$.